

刘玉彬 白秉三 等◎编

# 结构力学 [下册]

JIEGOU LIXUE

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 结 构 力 学

下 册

刘玉彬 白秉三等 编

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书包括上、下两册。上册(第1章至第8章)主要内容包括绪论,结构的几何组成分析,静定梁和静定刚架,三铰拱、曲杆和悬索结构,静定桁架和组合结构,静定结构的影响线,虚功原理和结构的位移计算,力法;下册(第9章至第16章)主要内容包括位移法,渐进法和超静定结构的影响线,矩阵位移法,结构的极限荷载,结构的弹性稳定,结构的动力计算、单自由度体系的振动,多自由度体系和无限自由度体系的振动,结构自振频率和振型的近似计算。

本书可供高等院校工科类本科生及研究生阅读。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构力学(上、下册)/刘玉彬,白秉三等编. —北京:科学出版社,2004  
ISBN 7-03-013575-X

I. 结... I. ①刘... ②白... III. 结构力学 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061321 号

责任编辑:童安齐 / 责任校对:刘艳妮  
责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方上林工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2004年7月第一次印刷 印张:46 1/4

印数:1—4 000 字数:902 000

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 前 言

本教材是根据原国家教育委员会 1995 年批准修正的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)所规定的基本内容,结合教育部 1998 年颁布的普通高等学校本科专业目录中土木工程专业的业务培养目标、业务培养要求,参考现行的结构力学教材,根据一般普通院校人才培养目标,由大连民族学院、沈阳工业大学联合编写。本书可作为土木工程专业本科生的教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考。

结构力学是土木工程专业的一门重要的专业基础课,本书分上、下两册出版。上册包括绪论、结构的几何组成分析、静定结构的内力分析及位移计算、静定结构的影响线、超静定结构的力法计算等内容。下册包括超静定结构的位移法及渐近法计算、超静定结构的影响线、矩阵位移法、结构稳定计算、结构的极限荷载、结构动分析等内容。其中在节号上冠有\*号的内容可供选学,不同专业可根据专业的需要酌情取舍。每章均有思考题,以活跃思维、启发思考,加深对基本概念的认识;精选的习题对掌握基本的运算技能具有重要作用。

本教材的编写反映了参编院校多年积累的教学经验,特别是结合新专业目录中对宽口径的土建类人才培养要求方面注意了吸取其他各兄弟院校教材的优点,加强了基本概念及理论知识的阐述,力图保持结构力学基本理论的系统性、内容的先进性,并恰当地掌握内容的深度和广度,贯彻理论联系实际、由浅入深、注意培养学生的解题能力及方便教学等原则。根据目前计算机的普及应用,特别是计算机在结构分析中的应用,在选定编写内容时与矩阵位移法紧密结合,编入了刚架静力分析的源程序,使学生初步具有编写和使用结构计算程序的能力,以为后续课程的学习奠定基础。

参加本书编写的有:刘玉彬(第 1、2、3、4 章),白秉三(第 10、11、12、13 章),陈长征(第 7、8 章),罗跃纲(第 14、15 章),栗青(第 5 章),宁宝宽(第 9 章),谭素杰(第 6 章),赵天雁(第 16 章)。

在编写过程中吸取了目前流行的结构力学教材中适合一般普通院校特点的内容,在此对这些教材的作者表示衷心的感谢。由于水平有限,书中可能存在一些错误或不妥之处,请读者批评指正。

# 目 录

## 前言

## 上 册

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| <b>第 1 章 绪论</b> .....          | 1  |
| 1.1 结构力学的研究对象、基本任务和学习方法.....   | 1  |
| 1.2 结构的计算简图 .....              | 3  |
| 1.3 杆件结构的分类.....               | 10 |
| 1.4 荷载的分类.....                 | 14 |
| 思考题 .....                      | 15 |
| <b>第 2 章 结构的几何组成分析</b> .....   | 16 |
| 2.1 几何组成分析的基本概念.....           | 16 |
| 2.2 几何不变体系的组成规则.....           | 21 |
| 2.3 瞬变体系.....                  | 24 |
| 2.4 几何组成分析举例.....              | 25 |
| 2.5 结构的几何组成和静定性的关系.....        | 31 |
| 思考题 .....                      | 31 |
| 习题 .....                       | 32 |
| <b>第 3 章 静定梁和静定刚架</b> .....    | 36 |
| 3.1 单跨静定梁的计算.....              | 36 |
| 3.2 多跨静定梁的计算.....              | 45 |
| 3.3 静定平面刚架的计算.....             | 48 |
| 3.4* 静定空间刚架的计算 .....           | 58 |
| 思考题 .....                      | 59 |
| 习题 .....                       | 60 |
| <b>第 4 章 三铰拱、曲杆和悬索结构</b> ..... | 65 |
| 4.1 三铰拱的内力计算.....              | 65 |
| 4.2 曲杆的内力计算.....               | 77 |
| 4.3 悬索结构的计算.....               | 80 |
| 思考题 .....                      | 87 |
| 习题 .....                       | 88 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>第 5 章 静定桁架和组合结构</b>         | 91  |
| 5.1 桁架的特点和组成分类                 | 91  |
| 5.2 平面桁架的解法                    | 93  |
| 5.3 平面桁架外形与受力特点                | 105 |
| 5.4 静定组合结构的计算                  | 108 |
| 5.5* 静定空间桁架                    | 111 |
| 5.6* 零载法判别复杂体系的几何组成            | 117 |
| 5.7 静定结构特性                     | 120 |
| 思考题                            | 123 |
| 习题                             | 123 |
| <b>第 6 章 静定结构的影响线</b>          | 130 |
| 6.1 影响线的概念                     | 130 |
| 6.2 静力法作静定梁的影响线                | 132 |
| 6.3 结点荷载作用下梁的影响线               | 140 |
| 6.4 静力法作静定桁架的影响线               | 143 |
| 6.5 机动法作静定梁的影响线                | 149 |
| 6.6 影响线的应用                     | 155 |
| 6.7* 公路、铁路的标准荷载制及换算荷载          | 166 |
| 6.8 简支梁的包络图和绝对最大弯矩             | 169 |
| 思考题                            | 173 |
| 习题                             | 174 |
| <b>第 7 章 虚功原理和结构的位移计算</b>      | 179 |
| 7.1 位移计算概述                     | 179 |
| 7.2 实功与虚功                      | 180 |
| 7.3 广义力与广义位移                   | 183 |
| 7.4 虚功原理                       | 184 |
| 7.5 单位荷载法计算位移和位移计算的一般公式        | 192 |
| 7.6 静定结构在荷载作用下的位移计算            | 193 |
| 7.7 图乘法                        | 201 |
| 7.8 静定结构由于初应变、温度改变和支座移动引起的位移计算 | 214 |
| 7.9* 具有弹性支座的静定结构的位移计算          | 219 |
| 7.10 线性变形体系的互等定理               | 223 |
| 7.11* 空间刚架的位移计算公式              | 225 |
| 思考题                            | 226 |
| 习题                             | 229 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>第8章 力法</b> .....            | 236 |
| 8.1 超静定结构的概念和超静定次数的确定 .....    | 236 |
| 8.2 力法基本原理与力法典型方程 .....        | 239 |
| 8.3 荷载作用下各类超静定结构的力法计算 .....    | 245 |
| 8.4 对称结构的计算 .....              | 257 |
| 8.5 超静定拱的计算 .....              | 268 |
| 8.6 温度改变和支座移动时超静定结构的内力计算 ..... | 276 |
| 8.7 超静定结构的位移计算 .....           | 283 |
| 8.8 超静定结构最后内力图的校核 .....        | 286 |
| 8.9* 交叉梁系和超静定空间刚架 .....        | 289 |
| 思考题.....                       | 295 |
| 习题.....                        | 297 |
| 习题部分答案 .....                   | 306 |

## 下 册

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| <b>第9章 位移法</b> .....            | 317 |
| 9.1 位移法的基本概念 .....              | 317 |
| 9.2 等截面直杆的形常数和载常数 .....         | 320 |
| 9.3 位移法的基本未知量和基本体系 .....        | 327 |
| 9.4 位移法的典型方程 .....              | 332 |
| 9.5 位移法计算连续梁和无侧移刚架 .....        | 335 |
| 9.6 位移法计算有侧移刚架和排架 .....         | 341 |
| 9.7 对称性的利用 .....                | 350 |
| 9.8* 支座位移、弹性支承和温度变化时的计算 .....   | 358 |
| 9.9 直接利用平衡条件建立位移法方程 .....       | 365 |
| 思考题.....                        | 368 |
| 习题.....                         | 369 |
| <b>第10章 渐进法和超静定结构的影响线</b> ..... | 377 |
| 10.1 概述.....                    | 377 |
| 10.2 力矩分配法的概念.....              | 377 |
| 10.3 力矩分配法的基本运算.....            | 382 |
| 10.4 力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架.....      | 387 |
| 10.5 力矩分配法与位移法的联合应用.....        | 399 |
| 10.6 无剪力分配法.....                | 402 |

|               |                             |            |
|---------------|-----------------------------|------------|
| 10.7*         | 超静定结构的工程近似计算方法 .....        | 412        |
| 10.8          | 超静定结构的影响线 .....             | 417        |
| 10.9          | 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图 .....     | 424        |
|               | 思考题 .....                   | 428        |
|               | 习题 .....                    | 428        |
| <b>第 11 章</b> | <b>矩阵位移法 .....</b>          | <b>436</b> |
| 11.1          | 概述 .....                    | 436        |
| 11.2          | 局部坐标系中的单元刚度矩阵 .....         | 438        |
| 11.3          | 整体坐标系中的单元刚度矩阵 .....         | 443        |
| 11.4          | 单元集成法和连续梁的整体刚度矩阵 .....      | 447        |
| 11.5          | 刚架的整体刚度矩阵 .....             | 455        |
| 11.6          | 等效结点荷载 .....                | 460        |
| 11.7          | 平面刚架的计算步骤和算例 .....          | 464        |
| 11.8          | 忽略轴向变形的矩形刚架的整体分析 .....      | 470        |
| 11.9          | 桁架及组合结构的整体分析 .....          | 476        |
| 11.10*        | 平面刚架静力分析程序 .....            | 486        |
|               | 思考题 .....                   | 509        |
|               | 习题 .....                    | 510        |
| <b>第 12 章</b> | <b>结构的极限荷载 .....</b>        | <b>513</b> |
| 12.1          | 概述 .....                    | 513        |
| 12.2          | 极限弯矩和塑性铰、破坏机构、静定梁的计算 .....  | 514        |
| 12.3          | 超静定梁的极限荷载 .....             | 518        |
| 12.4          | 比例加载时判定极限荷载的一般定理和基本方法 ..... | 525        |
| 12.5          | 刚架的极限荷载 .....               | 530        |
| 12.6*         | 矩阵位移法求刚架的极限荷载 .....         | 533        |
|               | 思考题 .....                   | 544        |
|               | 习题 .....                    | 545        |
| <b>第 13 章</b> | <b>结构弹性稳定 .....</b>         | <b>547</b> |
| 13.1          | 概述 .....                    | 547        |
| 13.2          | 用静力法确定临界荷载 .....            | 550        |
| 13.3          | 具有弹性支座压杆的稳定 .....           | 556        |
| 13.4          | 变截面压杆的稳定 .....              | 561        |
| 13.5          | 用能量法确定临界荷载 .....            | 564        |
| 13.6          | 剪力对临界荷载的影响 .....            | 577        |
| 13.7          | 组合压杆的稳定 .....               | 579        |



|               |                                   |            |
|---------------|-----------------------------------|------------|
| 13.8*         | 圆环及拱的稳定 .....                     | 583        |
| 13.9*         | 窄条梁的稳定 .....                      | 591        |
| 13.10*        | 弹性介质上压杆的稳定 .....                  | 594        |
| 13.11*        | 用矩阵位移法计算刚架的稳定 .....               | 597        |
|               | 思考题 .....                         | 606        |
|               | 习题 .....                          | 607        |
| <b>第 14 章</b> | <b>结构的动力计算 单自由度体系的振动 .....</b>    | <b>613</b> |
| 14.1          | 概述 .....                          | 613        |
| 14.2          | 单自由度体系的自由振动 .....                 | 617        |
| 14.3          | 单自由度体系的无阻尼受迫振动 .....              | 628        |
| 14.4          | 单自由度系统的有阻尼受迫振动 .....              | 636        |
|               | 思考题 .....                         | 640        |
|               | 习题 .....                          | 641        |
| <b>第 15 章</b> | <b>多自由度体系和无限自由度体系的振动 .....</b>    | <b>645</b> |
| 15.1          | 两个自由度体系的自由振动 .....                | 645        |
| 15.2          | 两个自由度体系在简谐荷载下的受迫振动 .....          | 656        |
| 15.3          | 多自由度体系的自由振动 .....                 | 664        |
| 15.4          | 多自由度体系在任意动荷载作用下的受迫振动——振型分解法 ..... | 674        |
| 15.5          | 无限自由度体系的自由振动 .....                | 680        |
|               | 思考题 .....                         | 689        |
|               | 习题 .....                          | 689        |
| <b>第 16 章</b> | <b>结构自振频率和振型的近似计算 .....</b>       | <b>692</b> |
| 16.1          | 能量法——瑞利(Rayleigh)法 .....          | 692        |
| 16.2          | 等效质量法 .....                       | 695        |
| 16.3          | 集中质量法 .....                       | 699        |
| 16.4          | 矩阵位移法 .....                       | 701        |
| 16.5          | 瑞利-里茨(Rayleigh-Ritz)法 .....       | 705        |
|               | 思考题 .....                         | 708        |
|               | 习题 .....                          | 708        |
|               | <b>习题部分答案 .....</b>               | <b>712</b> |

## 第9章 位 移 法

### 9.1 位移法的基本概念

#### 9.1.1 概述

力法和位移法是分析超静定结构的两种基本方法。力法在19世纪末就已应用于各种超静定结构的分析,随后由于钢筋混凝土结构的问世,出现了大量的高次超静定刚架,如果仍用力法计算将十分麻烦。于是,20世纪初又在力法的基础上建立了位移法。

几何不变的结构在一定的外因作用下,其内力与位移之间恒具有一定的关系,确定的内力只与确定的位移相对应。从这点出发,在分析超静定结构时,先设法求出内力,然后即可计算相应的位移,这便是力法;但也可以反过来,先确定某些位移,再据此推求内力,这便是位移法。力法是以多余未知力作为基本未知量,位移法则是以某些结点位移作为基本未知量,这就是二者的基本区别。

为了说明位移法的基本概念,我们分析图9.1(a)所示刚架的位移。它在荷载 $P$ 作用下将发生虚线所示的变形,在刚结点1处两杆的杆端均发生相同的转角 $\Delta_1$ ,此外若略去轴向变形,则可认为两杆长度不变,因而结点1没有线位移。如何据此来确定各杆内力呢?对于12杆,可以把它看作是一根两端固定的梁,除了受到荷载 $P$ 作用外,固定支座1还发生了转角 $\Delta_1$ [图9.1(b)],而这两种情况下的内力都可以由力法算出。同理,13杆则可以看作是一端固定另一端铰支的梁,而在固定端1处发生了转角 $\Delta_1$ [图9.1(c)],其内力同样可用力法算出。可见,在计算这刚架时,如果以结点1的角位移 $\Delta_1$ 为基本未知量,设法首先求出 $\Delta_1$ ,则各杆的内力随之均可确定。

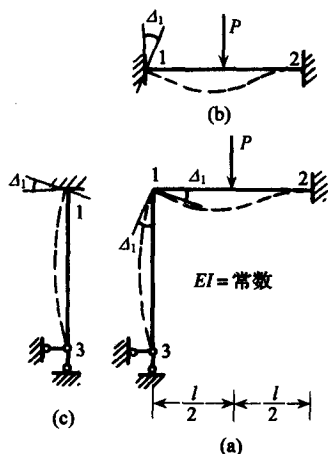


图 9.1 位移法的基本概念

(a)原结构; (b)12杆的简化;

(c)13杆的简化

#### 9.1.2 两端固定等截面梁的转角位移方程

图9.2(a)示一两端固定的等截面梁,除受荷载及温度变化影响外,两端支座还发生了位移。 $A$ 端转角为 $\theta_A$ , $B$ 端转角为 $\theta_B$ , $A$ 、 $B$ 两端在垂直于杆轴方向上的相

对线位移(亦简称侧移)为  $\Delta_{AB}$ (这里,  $AB$  杆沿杆轴方向的线位移以及在垂直杆轴方向的平移均不引起弯矩,故不予考虑)。用力法求解这一问题时,可取简支梁为基本结构,多余未知力为杆端弯矩  $X_1$ 、 $X_2$  和轴力  $X_3$ ,如图 9.2(b)所示。目前  $X_3$  对梁的弯矩没有影响,可不考虑,故仅需求解  $X_1$  和  $X_2$ 。

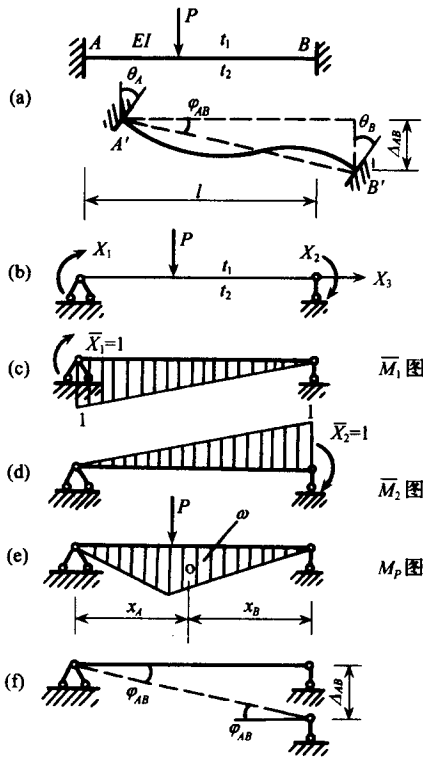


图 9.2 两端固定单跨等截面梁  
(a) 支座位移; (b) 基本结构; (c)  $\bar{M}_1$  图;  
(d)  $\bar{M}_2$  图; (e)  $M_P$  图; (f) 弦转角

关于正负号的规定,在位移法中,为了计算方便,弯矩是以对杆端而言顺时针方向为正(对结点或支座而言则是以反时针方向为正)  $\theta_A$ 、 $\theta_B$  均以顺时针方向为正;  $\Delta_{AB}$  则以使整个杆件顺时针方向转动为正。图中所示的杆端弯矩及位移均为正值。

根据沿  $X_1$  和  $X_2$  方向的位移条件,可建立力法典型方程如下:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1\Delta} &= \theta_A \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2\Delta} &= \theta_B\end{aligned}$$

式中的系数和自由项均可按以前的方法求得。作出  $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $M_P$  图[图 9.2(c)、(d)、(e)]后,由图乘法可算出

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l}{6EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega}{EI} \frac{x_B}{l}, \quad \Delta_{2P} = -\frac{\omega}{EI} \frac{x_A}{l}$$

至于自由项  $\Delta_{1\Delta}$  和  $\Delta_{2\Delta}$  是表示由于支座位移引起的基本结构两端的转角,由图 9.2(f)可以看出,支座转动将不使基本结构

产生任何转角;而支座相对侧移所引起的两端转角为

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta_{2\Delta} = \varphi_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$$

式中,  $\varphi_{AB}$  称为弦转角,亦以顺时针方向为正。

此外,由关于温度变化引起的位移计算公式可算出

$$\Delta_{1t} = \frac{\alpha \Delta t}{h} \times \frac{l}{2} = \frac{\alpha l \Delta t}{2h}$$

$$\Delta_{2t} = -\frac{\alpha l \Delta t}{2h}$$

式中,  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\alpha$  是材料的线膨胀系数,  $h$  是杆件截面高度。

将以上系数和自由项代入典型方程,可解得

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4EI}{l}\theta_A + \frac{2EI}{l}\theta_B - \frac{6EI}{l^2}\Delta_{AB} \\ &\quad - \frac{2\omega}{l^2}(2x_B - x_A) - \frac{EI\alpha\Delta t}{h} \\ X_2 &= \frac{4EI}{l}\theta_B + \frac{2EI}{l}\theta_A - \frac{6EI}{l^2}\Delta_{AB} \\ &\quad + \frac{2\omega}{l^2}(2x_A - x_B) + \frac{EI\alpha\Delta t}{h} \end{aligned}$$

为了方便,令

$$i = \frac{EI}{l}$$

称为杆件的线刚度。此外,用  $M_{AB}$  代替  $X_1$ , 用  $M_{BA}$  代替  $X_2$ , 上式便可写为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 4i\theta_B + 2i\theta_A - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^F &= -\frac{2\omega}{l^2}(2x_B - x_A) - \frac{EI\alpha\Delta t}{h} \\ M_{BA}^F &= \frac{2\omega}{l^2}(2x_A - x_B) + \frac{EI\alpha\Delta t}{h} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$M_{AB}^F$ 、 $M_{BA}^F$  是两端固定梁在荷载及温度变化等外因作用下的杆端弯矩,称为固端弯矩。(a)式是两端固定梁的杆端力的一般计算公式,通常称为转角位移方程。

### 9.1.3 位移法的基本思路

图 9.3(a)所示刚架,在给定的荷载作用下,杆件 AC 和 CB 将发生变形,在忽略杆件轴向变形条件下,结点 C 只发生角位移  $\theta_c$ 。当用位移法计算时,我们将结点角位移  $\theta_c$  作为基本未知量(由刚结点的变形连续条件可知,结构在结点 C 的角位移,

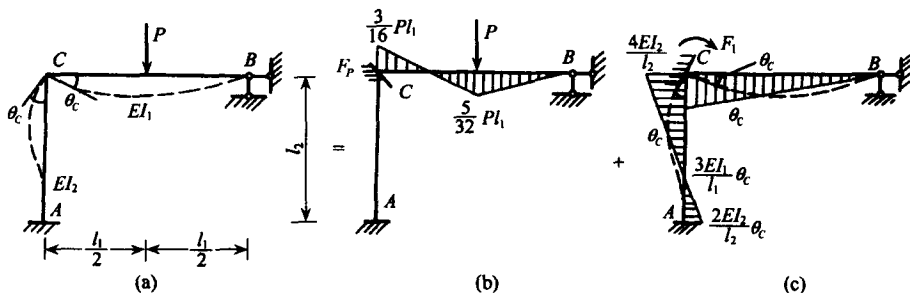


图 9.3 位移法解题思路示意图

(a)原结构;(b)荷载作用;(c)结点位移作用

也就是杆件  $CB$  和  $CA$  的杆端角位移)。如果能设法把位移  $\theta_c$  求出, 则  $CB$  和  $CA$  各杆的变形就可求出, 从而可求出各杆的内力。

现讨论如何求基本未知量  $\theta_c$  的问题, 计算分为两步:

第一步, 增加约束, 将结点位移锁住。此时结构实际上变为两根超静定杆。在荷载作用下, 这两根杆的弯矩可用力法求出, 如图 9.3(b) 所示。这时, 在结点  $C$  处

施加了一个外部约束力矩  $F_P = -\frac{3Pl_1}{16}$ 。

第二步, 施加力偶, 使结点  $C$  产生角位移  $\theta_c$ , 两根超静定杆在  $C$  端有转角  $\theta_c$  时弯矩图也可由力法求出, 如图 9.3(c) 所示。这时, 在结点  $C$  处施加了外部力矩  $F_1 = \frac{3EI_1}{l_1}\theta_c + \frac{4EI_2}{l_2}\theta_c$ 。

这里将实际结构的受力和变形[图 9.3(a)]分解成了两部分: 一部分是荷载单独作用下的结果, 如图 9.3(b) 所示。此时只有荷载作用, 而无结点  $C$  的角位移; 另一部分是结点位移单独作用下的结果, 如图 9.3(c) 所示。此时只有结点  $C$  的角位移, 而无荷载作用。反过来, 将图 9.3(b) 和 (c) 所示两种状态叠加起来, 即成为实际结构。而实际结构在结点  $C$  处是没有外加约束力矩的, 因此由图 9.3(b) 和 (c) 叠加后的结果, 在结点  $C$  处也不应有外加力矩, 即

$$F_1 + F_P = 0$$

$$\left( \frac{3EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} \right) \theta_c - \frac{3Pl_1}{16} = 0 \quad (a)$$

从而求出

$$\theta_c = \frac{\frac{3Pl_1}{16}}{\frac{3EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2}}$$

将  $\theta_c$  代回图 9.3(c), 将所得的结果再叠加上图 9.3(b) 的结果, 即得到图 9.3(a) 所示原结构的解。从以上分析过程, 可得位移法要点如下:

- (1) 位移法的基本未知量是结点位移[图 9.3(a) 中结点  $C$  的角位移  $\theta_c$ ]。
- (2) 位移法的基本方程是平衡方程[结点  $C$  的力矩平衡方程(a)]。
- (3) 建立基本方程的方法是: 先将结点位移锁住, 求各超静定杆在荷载作用下的结果; 再求各超静定杆在结点位移作用下的结果。最后叠加以上两步结果, 使外加约束中的约束力等于零, 即得位移法的基本方程。

- (4) 求解位移法方程, 得到基本未知量, 从而求出各杆内力。

这就是位移法的基本思路和解题过程。

## 9.2 等截面直杆的形常数和载常数

位移法的基础是杆件分析。为此, 需先研究杆件(单跨超静定杆)杆端力和杆端

位移、荷载之间的关系。

### 9.2.1 等截面直杆的形常数

图 9.4 所示为一等截面直杆  $AB$  的隔离体, 杆件材料和截面惯性矩  $EI$  为常数, 杆端  $A$  和  $B$  的角位移分别为  $\theta_A$  和  $\theta_B$ , 杆端  $A$  和  $B$  在垂直于杆轴  $AB$  方向的相对线位移为  $\Delta$ , 弦转角  $\varphi = \frac{\Delta}{l}$ , 杆端  $A$  和  $B$  的弯矩和剪力分别为  $M_{AB}$ 、 $M_{BA}$ 、 $Q_{AB}$ 、 $Q_{BA}$ 。

采用位移法分析等截面直杆时, 关键是要用杆端位移表示杆端力。当杆端位移是单位值(即等于 1)时, 所得的杆端力称为等截面直杆的刚度系数。因刚度系数只与杆件材料性质、尺寸及截面几何形状有关, 也称为形常数。

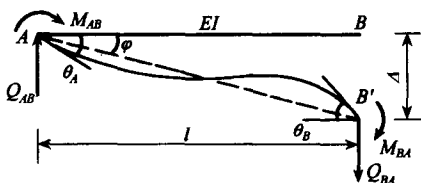


图 9.4 杆端位移和杆端力

(1) 当  $A$  端作为固定端, 有角位移  $\theta_A = 1$  时的形常数。

1)  $B$  端为固定端[图 9.5(a)]。

当  $A$  端位移为  $\theta_A$  时, 可由力法计算得到

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= 2i_{AB}\theta_A \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{6i_{AB}}{l}\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

式中,  $i_{AB} = \frac{EI}{l}$  称为杆  $AB$  的线刚度。当  $\theta_A = 1$  时, 杆  $AB$  的  $A$  端弯矩的形常数为  $4i_{AB}$ ,  $B$  端弯矩的形常数为  $2i_{AB}$ ,  $A$  端和  $B$  端剪力的形常数为  $-\frac{6i_{AB}}{l}$ 。

2)  $B$  端为铰支端[图 9.5(b)]。

当  $A$  端位移为  $\theta_A$  时, 同理可由力法求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 3i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= 0 \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{3i_{AB}}{l}\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

可知当  $\theta_A = 1$  时, 杆  $AB$  的  $A$  端弯矩的形常数为  $3i_{AB}$ ,  $A$  端和  $B$  端剪力的形常数则为  $-\frac{3i_{AB}}{l}$ 。

3)  $B$  端为滑动支座[图 9.5(c)]。

当  $A$  端位移为  $\theta_A$  时, 可求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= -i_{AB}\theta_A \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

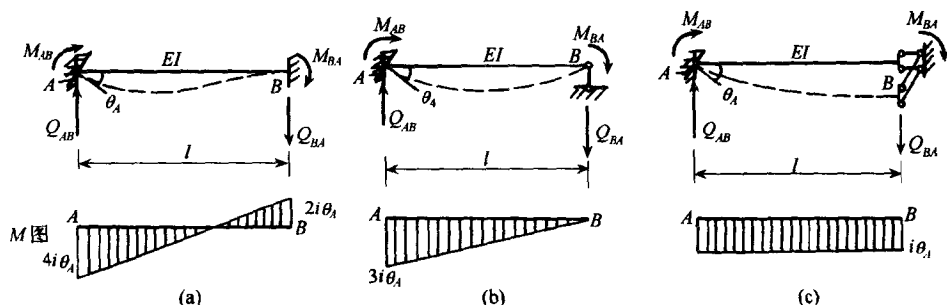


图 9.5 A 端位移为  $\theta_A$  时的杆端弯矩

(a) B 端固定; (b) B 端铰支; (c) B 端滑动支座

可知当  $\theta_A=1$  时, 杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为  $i_{AB}$ , B 端弯矩的形常数为  $-i_{AB}$ , A 端和 B 端剪力的形常数则为零。

(2) 当 A 端作为固定端, 而 AB 两端有相对杆端线位移  $\Delta=1$  时的形常数。

1) B 端为固定端[图 9.6(a)]。

当 B 端有线位移  $\Delta$  时, 同样可由力法求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{BA} = -\frac{6i_{AB}}{l}\Delta \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = \frac{12i_{AB}}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

当  $\Delta=1$  时, 得到杆 AB 的 A 端和 B 端弯矩的形常数为  $-\frac{6i_{AB}}{l}$ , 剪力的形常数则为  $\frac{12i_{AB}}{l^2}$ 。

2) B 端为铰支座[图 9.6(b)]。

当 B 端有线位移  $\Delta$  时, 可得到

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{3i_{AB}}{l}\Delta \\ M_{BA} &= 0 \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = \frac{3i_{AB}}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

当  $\Delta=1$  时, 得到杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为  $-\frac{3i_{AB}}{l}$ , A 端和 B 端剪力的形常数则为  $\frac{3i_{AB}}{l^2}$ 。

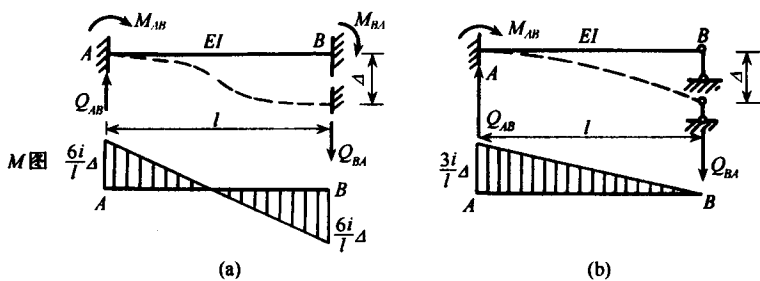


图 9.6 有杆端相对线位移  $\Delta$  时的杆端弯矩

(a) B 端固定; (b) B 端铰支

各种情形的形常数见表 9.1。形常数用  $\bar{M}_{AB}$ 、 $\bar{M}_{BA}$ 、 $\bar{Q}_{AB}$ 、 $\bar{Q}_{BA}$  表示。

表 9.1 等截面直杆的形常数

| 编号           | 简 图   | 弯 矩               |                   | 剪 力               |                   |
|--------------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|              |       | $\bar{M}_{AB}$    | $\bar{M}_{BA}$    | $\bar{Q}_{AB}$    | $\bar{Q}_{BA}$    |
| 两端<br>固定     | 1<br> | 4i                | 2i                | $-\frac{6i}{l}$   | $-\frac{6i}{l}$   |
|              | 2<br> | $-\frac{6i}{l^2}$ | $-\frac{6i}{l^2}$ | $\frac{12i}{l^2}$ | $\frac{12i}{l^2}$ |
| 一端固定<br>一端铰支 | 3<br> | 3i                | 0                 | $-\frac{3i}{l}$   | $-\frac{3i}{l}$   |
|              | 4<br> | $-\frac{3i}{l^2}$ | 0                 | $\frac{3i}{l^2}$  | $\frac{3i}{l^2}$  |
| 一端固定<br>一端滑动 | 5<br> | i                 | -i                | 0                 | 0                 |



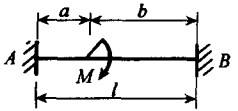
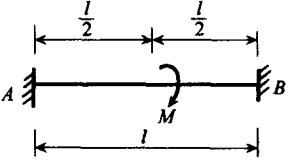
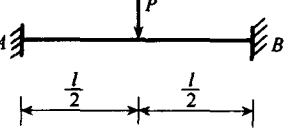
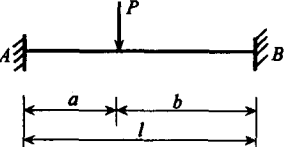
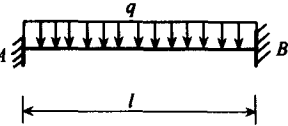
### 9.2.2 等截面直杆的载常数

在等截面直杆中,当杆两端固定(或一端固定、一端铰支,或一端固定、一端滑动,均称为固端),只受荷载作用时,所得的杆端力,通常称为固端力(包括固端弯矩和固端剪力)。因固端力与杆件所受荷载的形式有关,也称为载常数。同样,可利用力法求得各种荷载作用下的杆件固端力。

常用的载常数见表 9.2。载常数用  $M_{AB}^F$ 、 $M_{BA}^F$ 、 $Q_{AB}^F$ 、 $Q_{BA}^F$  表示。

表 9.1 和表 9.2 中的杆端弯矩(包括固端弯矩)、杆端剪力(包括固端剪力)一律以顺时针转向为正。

表 9.2 等截面直杆的载常数

| 编 号 | 简 图                                                                                 | 弯 矩                     |                         | 剪 力                                              |                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
|     |                                                                                     | $M_{AB}^F$              | $M_{BA}^F$              | $Q_{AB}^F$                                       | $Q_{BA}^F$                                        |
| 1   |    | $M \frac{b(3a-l)}{l^2}$ | $M \frac{a(3b-l)}{l^2}$ | $-M \frac{6ab}{l^3}$                             | $-M \frac{6ab}{l^3}$                              |
| 2   |    | $\frac{M}{4}$           | $\frac{M}{4}$           | $-\frac{3M}{2l}$                                 | $-\frac{3M}{2l}$                                  |
| 3   |  | $-\frac{Pl}{8}$         | $+\frac{Pl}{8}$         | $+\frac{P}{2}$                                   | $-\frac{P}{2}$                                    |
| 4   |  | $-\frac{Pab^2}{l^2}$    | $+\frac{Pa^2b}{l^2}$    | $\frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ | $-\frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right)$ |
| 5   |  | $-\frac{1}{12}ql^2$     | $+\frac{1}{12}ql^2$     | $+\frac{ql}{2}$                                  | $-\frac{ql}{2}$                                   |