高中数学复习参考資料

南京市教师进修学院編

高中数學复习参考資料

（修訂本）

南京市教师进修学院編

*

江苏省书刊出版營业許可証出〇〇一号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 三 号

江苏省新华书店发行　江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗1/32　印張 12 3/8　字数 296,000

一九六〇年六月第一版　一九六一年六月第二版

一九六一年六月南京第二次印刷

印数 5,001—32,000

統一书号： 7100 · 1065

定　　价：(6)九角七分

責任編輯
責任校对：　何震邦

封面設計：　余運如

目 录

第一部分　代　　数

一、数的概念的发展

(一)自然数

1. 自然数　以1为单位，由一个或若干个单位所組成的集合，叫做自然数.

自然数集的性质:

(1) 在自然数集中有最小的数1，但沒有最大的数.

(2) 任意两个自然数都能比較大小.(順序性)

(3) 在自然数集中永远可以施行加法和乘法两种运算.

2. 約数和倍数　数a能被b整除，則数a称作数b的倍数，数b称作数a的約数(或因数).

3. 质数与合数　一个自然数除1及其本身外，沒有其他的約数，則此数称为质数. 一个自然数除1及其本身外，还有其他的約数，則此数称为合数.

4. 数的质因数分解　就是要求出一切质数，使其积等于該已知数.

例如 $105840=2^4\times3^3\times5\times7$.

5. 公約数与最大公約数　若一数能整除全部已知数，則此数是这些已知数的公約数. 这些公約数中的最大数称为它們的最大公約数.

求若干个数的最大公約数，可以把这些数分别分解成质因数，取其公共的质因数(相同的质因数照公有的个数取)，把它們

连乘起来。

［例］ 求192，240，288的最大公約数．

. $192=2^6\times3$； $240=2^4\times3\times5$； $288=2^5\times3^2$.

∴ 192，240，288的最大公約数是 $2^4\times3=48$.

6．公倍数与最小公倍数 若干个数的公倍数，就是能被这些数的每一个数所整除的数．这些公倍数中的最小的数，称为它們的最小公倍数．求若干个数的最小公倍数，可以借助于簡除法，比較簡捷。

［例］ 求96，120，144的最小公倍数．

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 96 & 120 & 144 \\ \hline
2 & 48 & 60 & 72 \\ \hline
2 & 24 & 30 & 36 \\ \hline
2 & 12 & 15 & 18 \\ \hline
3 & 6 & 15 & 9 \\ \hline
 & 2 & 5 & 3
\end{array}
\cdots\cdots\text{两两互质.}
$$

∴ 所求的最小公倍数为

$$2\times2\times2\times2\times3\times2\times5\times3=1440.$$

（二）有理数

1．有理数集 正負整数，正負分数和0一起合成的数集，叫做有理数集合．

有理数集的性質：

（1）有理数集內沒有最小的数，也沒有最大的数。

（2）有理数有順序性：在数軸上的两个有理数，右边的一个数总比左边的一个数大．

（3）有理数具有間断性：有理数集合与数軸点的集合不能建立一一对应关系。如数軸上有一点对应于$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$却不是有理数。

（4）在有理数集內永远可以施行加法、減法、乘法和除法（除数不得为0）四种运算，加法和乘法并具有以下性質：

$$a+b=b+a,\quad (a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba,\qquad (ab)c=a(bc);$$
$$(a+b)c=ac+bc,\quad c(a+b)=ca+cb.$$

2. 分数和小数

(1) 分数的基本性质　若$m\neq 0$，则

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}.$$

(2) 分母只含质因数2和5的分数，必能化成有限小数。如

$$\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\times 5}=\frac{3\times 5}{2^2\times 5^2}=0.15.$$

分母不含有质因数2和5的分数，或者分母不只含有质因数2和5的分数，必能化成循环小数。如：

$$\frac{3}{11}=0.\dot{2}\dot{7},\qquad \frac{7}{22}=0.3\dot{1}\dot{8}.$$

(3) 有限小数都能化成分数。如：

$$0.28=\frac{28}{100}=\frac{7}{25}.$$

循环小数也都能化成分数。

(三)度量

1. 度量　我們常用一个已知量去測度另一个同类量，这个已知量称为单位量。在測度的結果中得出一个数，借以表示被測的量所含单位量的倍数，这个数称为該量的数值。

2. 公制与市制：

(1) 常用公制与市制的度、量、衡的单位和进率表：

长　度　(公制)

名　称	公　里	米	厘　米	毫　米
代　号	km	m	cm	mm
进　率	1000米	100厘米	10毫米	

长度(市制，略)

1公里=2市里　　1公尺=3市尺

重　量　(公制)

名　称	公　吨	公　斤	克
代　号	T	kg	g
进　率	1000公斤	1000克	

重量(市制，略)

1公斤=2市斤

容　量　(公制)

名　称	升	毫　升
代　号	L	cc
进　率	1000毫升	

容量(市制，略)

1公升=1市升

(2) 复名数的运算

化法和聚法　名数由高級单位化为低級单位名称叫化法；反之叫聚法.

(四)百分法与比例

1. 分母为100的分数叫做百分数.

2. 两个比相等的式子叫做比例. 在任何比例里，两个外項的积等于两个內項的积.

3. 正比例和反比例

两种相互有关的量，如果一种量扩大(或縮小)若干倍，另一

种量也扩大(或縮小)同样的倍数，那末这两种量叫做成正比例的量。

两种相互有关的量，如果一种量扩大(或縮小)若干倍，另一种量反而縮小(或扩大)同样的倍数，那末这两种量叫做成反比例的量。

(五)实数

1. 无理数 无限不循环小数叫做无理数。

2. 无理数的近似值 如果有一个已知的无理数 α (即一个已知的正无理数 α):

$$\alpha=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha^n}{10^n}+\cdots$$

这里的 α_0 是自然数或 0，而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 是十进数碼(即从 0 到 9 的整数)。

则有 $$\alpha_0<\alpha<\alpha_0+1.$$

我們把 α_0 叫做 α 的精确到 1 的不足近似值，而 α_0+1 叫做 a 的精确到 1 的过剩近似值。

同样 $$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}<\alpha<\alpha_0+\frac{\alpha_1+1}{10},$$

我們把 $\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10}$ 的不足近似值，而 $\alpha_0+\frac{\alpha_1+1}{10}$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10}$ 的过剩近似值。一般說来，有限小数(即有理数)

$$\gamma_n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10^1}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}$$

和 $$\gamma_n'=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\cdots+\frac{\alpha_n+1}{10^n},$$

分别叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值与过剩近似值，即

$$\gamma_n<\alpha<\gamma_n'.$$

[例] 設α是$\sqrt{2}$，则

$$\alpha=1.414213\cdots$$

这里

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=4,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=4,\ \alpha_4=2,\ \alpha_5=1,\ \alpha_6=3\cdots$$

顯然

$$1.414213<\sqrt{2}<1.414214,$$

这里

$$\gamma_6=1.414213,\ \gamma_6'=1.414214.$$

它們分別是$\sqrt{2}$精确到$\frac{1}{10^6}$(或0.000001)的不足近似值与过剩近似值。

一个无理数的对应的过剩近似值与不足近似值的差等于所取的小数最末一位的一个单位：

$$\gamma_n'-\gamma_n=\frac{1}{10^n}.$$

3. 实数 有理数和无理数总称实数。

实数集的性质：

(1) 在实数集内沒有最小的数，也沒有最大的数。

(2) 实数具有順序性．两个实数可以比較大小。

(3) 实数集具有連續性．实数集合与数軸上的点之間建立一一对应的关系。

(4) 在实数集内永远可以施行加、减、乘、除(除数不得为0)四种运算。

4. 实数的絕对值

$$|a|=\begin{cases} a, & 若\quad a>0\\ 0, & 若\quad a=0\\ -a, & 若\quad a<0\end{cases}$$

(六)复数

1. 形式为$a+bi$的数叫做复数(a与b都是实数)，其实部a的单位是1，其虚部bi的单位是i ($i^2=-1$)。

若 $b=0$，则复数 $a+bi$ 就是实数；若 $b\neq 0$，则复数 $a+bi$ 叫做虚数，若 $b\neq 0$，而 $a=0$，则复数 $a+bi$ 叫做純虚数。

$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. r 叫做复数 $a+bi$ 的模数。

虚数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 叫做共軛虚数。

2. 复数 $a+bi$ 可以用直角坐标系所表示的复数平面内的点 M 来表示，这个点的横坐标是 a，纵坐标是 bi。很明显，表示实数的点都在 X 軸上，表示純虚数的点都在 Y 軸上。

3. 两复数相等。

当 $a=c$，$b=d$，时，复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 相等。

当 $a=b=0$ 时，$a+bi=0$。

4. 复数的四则运算

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

两个共軛复数的积：

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$.

(5) 复数的乘方 $i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$.（k 为整数）复数的乘方可按二項式定理来計算，把結果中 i 的幂化簡，再按复数的加减法则进行化簡。

5. 复数的三角函数表示法：

$$a+bi=\gamma(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

其中：

$$\begin{cases} \gamma=\sqrt{a^2+b^2}, \\ \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}, \end{cases}$$

复数的三角函数式的运算：

(1) $\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\gamma_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)$
$=\gamma_1\gamma_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$,

(2) $\dfrac{\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

(3) $[\gamma(\cos\theta+i\sin\theta]^n=\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$， n是正整数.

(4) $\sqrt[n]{\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{\gamma}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right.$

$\left.+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k=0, 1, \cdots, n-1$.

[例1] 化简下式:

(1) $\dfrac{3+2i^{103}}{2-i^{92}}-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}+\dfrac{1-4i^{33}}{5}$.

[解] 原式$=\dfrac{3-2i}{2-1}-\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}$

$+\dfrac{1+4i}{5}=3-2i+\dfrac{1+2\sqrt{6}i}{5}+\dfrac{1+4i}{5}$

$=\dfrac{17}{5}+\left(\dfrac{2\sqrt{6}-6}{5}\right)i$.

(2) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}$.

[解] 原式$=\dfrac{[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ]^{50}}{(\sqrt{2})^{100}[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]^{100}}$

$=\dfrac{2^{50}(\cos 1500^\circ+i\sin 150^\circ)}{2^{50}[\cos(-4500^\circ)+i\sin(-4500^\circ)]}$

$=\cos(1500^\circ+4500^\circ)+i\sin(1500^\circ+4500^\circ)$

$$=-\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

［例 2］ 由方程 $(3-x)+(2+x+2y)i=4(x+y)+3(x+y)i$，求实数 x，y。

［解］ 由两复数相等的定义，得

$$\begin{cases} 3-x=4(x+y), \\ 2+x+2y=3(x+y). \end{cases}$$

解之，得 $\qquad x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{4}{3}.$

［例 3］ 設 n 是自然数，求証：

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ 当 n 是偶数的时候等于 1，当 n 是奇数的时候等于 -1。

証：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]^n=\left(\frac{2i}{-2i}\right)^n=(-1)^n.$

当 n 为偶数时，

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}=(-1)^n=1;$$

当 n 为奇数时，

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}=(-1)^n=-1.$$

［例 4］ 把多项式 $f(x)=x^5+x^4-2x-2$ 分解为因式的乘积：

(1) 在有理数集内；(2) 在实数集内；(3) 在复数集内。

解：(1) $f(x)=x^4(x+1)-2(x+1)=(x+1)(x^4-2)$；

(2) $f(x)=(x+1)(x^2+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2})$

$\qquad =(x+1)(x^2+\sqrt{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})$；

(3) $f(x)=(x+1)(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2})$

$=(x+1)(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2}i)$

$(x-\sqrt[4]{2}i)$.

复习思考题

1．求下列各代数式的值：

(1) $2x^3-3x^2+3x-1$，其中 $x=-\frac{1}{2}$；

(2) $\frac{3a^2-2ab-4b^2}{2a^2b^2-1}$，其中 $a=-\frac{2}{3}$，$b=1\frac{1}{2}$；

(3) $\dfrac{m+\frac{n}{m}-n}{m^2+\frac{1}{n^2}}$，其中 $m=\frac{2}{3}$，$n=-\frac{3}{2}$；

(4) $x^4+ix^3-(1+2i)x^2+3x+93+160i$，其中 $x=1-i$。

2．两个无理数的和，差，积，商一定是无理数嗎？試举例說明。

3．化简下列各式：

(1) $\frac{(1+i)^5}{1-i}+\frac{(1-i)^5}{1+i}$；

(2) $\frac{(\sin\varphi+i\cos\varphi)(\sqrt{3}-i)^{100}}{(\cos\varphi-i\sin\varphi)(1+\sqrt{3}i)^{95}}$.

4．解方程：

(1) $x^2-(5+2i)x+21+i=0$；

(2) $\frac{3x+2iy}{5i-2}=\frac{15}{8x+3iy}$，其中 x 和 y 是实数；

(3) $x|-x=1+2i$。

5．把多项式 $f(x)=8x^5+4x^4-6x-3$ 分解为因式的乘积：

(1) 在有理数集内；(2) 在实数集内；(3) 在复数集内。

6．設 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega_1$，$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega_2$，

驗証下列等式：

(1) $\omega_1^3=\omega_2^3=1$；(2) $\omega_1^2=\omega_2$，$\omega_2^2=\omega_1$；(3) $1+\omega_1+\omega_2=0$。

7．計算：

(1) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$，(n 为自然数)

(2) $\frac{(1+i)^{n}}{(1-i)^{n-6}}$．(n 为自然数)

8．証明：若 $x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi$，則 $x^{m}+\frac{1}{x^{m}}=2\cos m\varphi$．

提示：假定 $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$，則 $\frac{1}{x}=\cos\varphi-i\sin\varphi$．

二、代 数 式

（一）代数式

用数字或表示数的字母，并且用指明运算的种类和順序的符号把它們連接起来所得到的式子，叫做代数式．

（二）代数式的値

如果用数字代替代数式里的字母，并且按照指定的順序進行运算，則所得到的結果叫做代数式的値．

（三）代数式的分类

$$代数式\begin{cases}有理式\begin{cases}整\quad 式\begin{cases}单項式\\ 多項式\end{cases}\\ 分\quad 式\end{cases}\\ 无理式\end{cases}$$

（四）有理式

由数字或表示数的字母利用有限次的四則运算所組成的代数式，叫做有理式．

1．整式　在一有理式中，若不含有以字母組成的式子作除数时，就叫有理整式，簡称整式．

(1) 单項式　沒有加法和減法运算的整式，叫做单項式．

(2) 多項式　几个单項式的和，叫做多項式．