

高中数学复习参考資料

南京市教师进修学院編

高中数学复习参考资料

(修订本)

南京市教师进修学院编

*

江苏省书刊出版业营业许可出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路一三号

江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 12 3/8 字数 296,000

一九六〇年六月第一版 一九六一年六月第二版

一九六一年六月南京第三次印刷

印数 5,001—32,000

统一书号：7100·1065

定 价：(6)九角七分

责任编辑：何震邦

责任校对

封面设计：余迎如

目 录

第一部分 代数	1
一、数的概念的发展	1
(一)自然数 (二)有理数 (三)度量 (四)百分法与比例 (五)实数 (六)复数	
二、代数式	11
(一)代数式 (二)代数式的值 (三)代数式的分类 (四)有 理式 (五)无理式、根式 (六)指数概念的普遍化	
三、函数和它的图象	34
(一)常量和变量 (二)函数的定义 (三)增函数与减函数 (四)函数的表示法 (五)函数的图象	
四、代数方程	51
(一)方程(或方程组)和方程(或方程组)的解 (二)同解方程 (或方程组) (三)方程的分类 (四)方程的解法与讨论	
五、不等式	89
(一)不等式的基本性质 (二)不等式的证明 (三)解不等式	
六、数列	112
(一)数列 (二)数列极限 (三)等差数列 (四)等比数列 (五)无穷递缩等比数列和的极限	
七、指数与对数	126
(一)指数函数的定义 (二)指数函数的图象及其性质 (三)对 数函数的定义 (四)对数函数的图象及其性质	
八、排列、组合和二项式定理	139

第二部分 平面几何 158

一、直綫形与圆 158

(一)三角形的全等 (二)三角形中的相等关系 (三)三角形中的不等关系 (四)垂綫和射影 (五)平行綫 (六)对应边相互平行或垂直的两角 (七)多边形的内角和及外角和 (八)直角三角形的性质 (九)平行四边形 (十)特殊平行四边形——矩形、菱形、正方形 (十一)梯形 (十二)三角形和梯形两腰中点联綫的性质、等分綫段 (十三)圆内直径(或半径)、弦、弧和弦心距的关系 (十四)圆和直綫的关系 (十五)两圆的关系 (十六)圆和多边形的关系 (十七)圆和角的关系 (十八)三角形的心

二、比例相似形 183

(一)綫段的比和比例 (二)相似三角形和相似多边形 (三)位似形 (四)成比例的綫段 (五)三角形的内外角平分綫的性质 (六)相交二直綫被圆截成的綫段的比例关系 (七)直角三角形弦上的高与勾股在弦上的射影定理 (八)勾股定理及其推广

三、面积 199

(一)面积的基本性质 (二)面积的计算 (三)面积的比

四、正多边形、圆周长和圆面积 208

(一)正多边形的作法 (二)正多边形的性质 (三)边数相同的正多边形的相似及其周长的关系 (四)圆周长和圆周长率 (五)圆面积和扇形、弓形面积

五、作图 215

(一)作图方法 (二)基本作图 (三)轨迹的概念 (四)基本轨迹

第三部分 立体几何 229

一、直线和平面 229

(一)平面的基本性质 (二)平面的确定定理 (三)空间二直线的相互位置关系 (四)一直线和一个平面的相互位置关系 (五)两个平面的相互位置关系 (六)有关两条直线平行的判定定理 (七)有关直线与平面平行的判定定理 (八)有关两个平面平行的判定定理 (九)有关直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定定理 (十)量的概念与量的比较 (十一)二面角与多面角 (十二)作图

二、多面体 241

(一)多面体 (二)棱柱 (三)棱锥 (四)棱台 (五)棱柱、棱锥、棱台的侧面积、全面积和体积 (六)正多面体

三、旋转体 258

(一)圆柱、圆锥、圆台的形成和性质 (二)球 (三)旋转面的面积 (四)圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图 (五)旋转体的体积

第四部分 平面三角 267

一、角的概念及度量 267

(一)角的概念的扩张 (二)角的度量

二、三角函数 270

(一)三角函数定义 (二)三角函数性质

三、加法定理 287

(一)二角和与差的三角函数 (二)倍角三角函数 (三)半角三角函数 (四)三角函数的和差化积与积化和差

四、反三角函数 305

五、三角方程 316

(一)最简三角方程的解 (二)三角方程的同解方程 (三)三

角方程的各种解法

六、解三角形 336

(一) 直角三角形 (二) 斜三角形 (三) 斜三角形的解法

(四) 三角在测量方面的应用 (五) 三角在工农业生产方面的应用

第一部分 代 数

一、数的概念的发展

(一) 自然数

1. 自然数 以1为单位,由一个或若干个单位所组成的集合,叫做自然数.

自然数集的性质:

- (1) 在自然数集中有最小的数1,但没有最大的数.
- (2) 任意两个自然数都能比较大小.(顺序性)
- (3) 在自然数集中永远可以施行加法和乘法两种运算.

2. 约数和倍数 数a能被b整除,则数a称作数b的倍数,数b称作数a的约数(或因数).

3. 质数与合数 一个自然数除1及其本身外,没有其他约数,则此数称为质数.一个自然数除1及其本身外,还有其他的约数,则此数称为合数.

4. 数的质因数分解 就是要求出一切质数,使其积等于该已知数.

例如 $105840 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7$.

5. 公约数与最大公约数 若一数能整除全部已知数,则此数是这些已知数的公约数.这些公约数中的最大数称为它们的最大公约数.

求若干个数的最大公约数,可以把这些数分别分解成质因数,取其公共的质因数(相同的质因数照公有的个数取),把它们

連乘起来。

[例] 求 192, 240, 288 的最大公約数。

$$192=2^6 \times 3; 240=2^4 \times 3 \times 5; 288=2^5 \times 3^2.$$

∴ 192, 240, 288 的最大公約数是 $2^4 \times 3=48$ 。

6. 公倍数与最小公倍数 若干个数的公倍数, 就是能被这些数的每一个数所整除的数。这些公倍数中的最小的数, 称为它们的最小公倍数。求若干个数的最小公倍数, 可以借助于簡除法, 比較簡捷。

[例] 求 96, 120, 144 的最小公倍数。

2	96	120	144
2	48	60	72
2	24	30	36
2	12	15	18
3	6	15	9
	2	5	3

……两两互质。

∴ 所求的最小公倍数为

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 = 1440.$$

(二) 有理数

1. 有理数集 正負整数, 正負分数和 0 一起合成的数集, 叫做有理数集合。

有理数集的性质:

(1) 有理数集內沒有最小的数, 也沒有最大的数。

(2) 有理数有順序性: 在数軸上的两个有理数, 右边的一个数总比左边的一个数大。

(3) 有理数具有間断性: 有理数集合与数軸点的集合不能建立一一对应关系。如数軸上有一点对应于 $\sqrt{2}$, 但 $\sqrt{2}$ 却不是有理数。

(4) 在有理数集內永远可以施行加法、減法、乘法和除法 (除数不得为 0) 四种运算, 加法和乘法并具有以下性质:

$$a+b=b+a, (a+b)+c=a+(b+c);$$

$$ab=ba, (ab)c=a(bc);$$

$$(a+b)c=ac+bc, c(a+b)=ca+cb.$$

2. 分数和小数

(1) 分数的基本性质 若 $m \neq 0$, 则

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}.$$

(2) 分母只含质因数 2 和 5 的分数, 必能化成有限小数. 如

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = 0.15.$$

分母不含有质因数 2 和 5 的分数, 或者分母不只含有质因数 2 和 5 的分数, 必能化成循环小数. 如:

$$\frac{3}{11} = 0.\dot{2}\dot{7}, \quad \frac{7}{22} = 0.3\dot{1}\dot{8}.$$

(3) 有限小数都能化成分数. 如:

$$0.28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}.$$

循环小数也都能化成分数.

(三) 度量

1. 度量 我們常用一个已知量去测度另一个同类量, 这个已知量称为单位量. 在测度的結果中得出一个数, 借以表示被量的量所含单位量的倍数, 这个数称为該量的数值.

2. 公制与市制:

(1) 常用公制与市制的度、量、衡的单位和进率表:

长 度 (公制)

名 称	公 里	米	厘 米	毫 米
代 号	km	m	cm	mm
进 率	1000 米	100 厘米	10 毫米	

长度(市制, 略)

1 公里 = 2 市里 1 公尺 = 3 市尺

重量(公制)

名 称	公 吨	公 斤	克
代 号	T	kg	g
进 率	1000 公斤	1000 克	

重量(市制, 略)

1 公斤 = 2 市斤

容量(公制)

名 称	升	毫 升
代 号	L	cc
进 率	1000 毫升	

容量(市制, 略)

1 公升 = 1 市升

(2) 复名数的运算

化法和聚法 名数由高级单位化为低级单位名称叫化法;
反之叫聚法。

(四) 百分法与比例

1. 分母为 100 的分数叫做百分数。

2. 两个比相等的式子叫做比例。在任何比例里, 两个外项的积等于两个内项的积。

3. 正比例和反比例

两种相互有关的量, 如果一种量扩大(或缩小)若干倍, 另一

种量也扩大(或缩小)同样的倍数,那末这两种量叫做成正比例的量。

两种相互有关的量,如果一种量扩大(或缩小)若干倍,另一种量反而缩小(或扩大)同样的倍数,那末这两种量叫做成反比例的量。

(五)实数

1. 无理数 无限不循环小数叫做无理数。

2. 无理数的近似值 如果有一个已知的无理数 α (即一个已知的正无理数 α):

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots$$

这里的 α_0 是自然数或 0, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ 是十进数码 (即从 0 到 9 的整数)。

则有 $\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + 1$ 。

我们把 α_0 叫做 α 的精确到 1 的不足近似值, 而 $\alpha_0 + 1$ 叫做 α 的精确到 1 的过剩近似值。

同样 $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} < \alpha < \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}$,

我们把 $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10}$ 的不足近似值, 而 $\alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10}$ 的过剩近似值。一般说来, 有限小数 (即有理数)

$$\gamma_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

和 $\gamma'_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$,

分别叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值与过剩近似值, 即

$$\gamma_n < \alpha < \gamma'_n.$$

[例] 設 α 是 $\sqrt{2}$, 則

$$\alpha = 1.414213\cdots$$

这里

$$\alpha_0=1, \alpha_1=4, \alpha_2=1, \alpha_3=4, \alpha_4=2, \alpha_5=1, \alpha_6=3\cdots$$

显然

$$1.414213 < \sqrt{2} < 1.414214,$$

这里

$$\gamma_6 = 1.414213, \gamma'_6 = 1.414214.$$

它們分別是 $\sqrt{2}$ 精确到 $\frac{1}{10^6}$ (或 0.000001) 的不足近似值与过剩近似值。

一个无理数的对应的过剩近似值与不足近似值的差等于所取的小数最末一位的一个单位:

$$\gamma'_n - \gamma_n = \frac{1}{10^n}.$$

3. 实数 有理数和无理数总称实数。

实数集的性质:

(1) 在实数集內沒有最小的数,也沒有最大的数。

(2) 实数具有順序性。两个实数可以比較大小。

(3) 实数集具有連續性。实数集合与数軸上的点之間建立一一对应的关系。

(4) 在实数集內永远可以施行加、减、乘、除(除数不得为0)四种运算。

4. 实数的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a > 0 \\ 0, & \text{若 } a = 0 \\ -a, & \text{若 } a < 0 \end{cases}$$

6. (六) 复数

1. 形式为 $a+bi$ 的数叫做复数 (a 与 b 都是实数), 其实部 a 的单位是 1, 其虚部 bi 的单位是 i ($i^2 = -1$)。

若 $b=0$, 则复数 $a+bi$ 就是实数; 若 $b \neq 0$, 则复数 $a+bi$ 叫做虚数; 若 $b \neq 0$, 而 $a=0$, 则复数 $a+bi$ 叫做纯虚数。

$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. r 叫做复数 $a+bi$ 的模数。

虚数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 叫做共轭虚数。

2. 复数 $a+bi$ 可以用直角坐标系所表示的复数平面内的点 M 来表示, 这个点的横坐标是 a , 纵坐标是 bi . 很明显, 表示实数的点都在 X 轴上, 表示纯虚数的点都在 Y 轴上。

3. 两复数相等。

当 $a=c$, $b=d$, 时, 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 相等。

当 $a=b=0$ 时, $a+bi=0$ 。

4. 复数的四则运算

$$(1) (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

$$(2) (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i.$$

$$(3) (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

两个共轭复数的积:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

$$(4) \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) i.$$

(5) 复数的乘方. $i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$.
(k 为整数) 复数的乘方可按二项式定理来计算, 把结果中 i 的幂化简, 再按复数的加减法则进行化简。

5. 复数的三角函数表示法:

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

其中:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \cos \varphi = \frac{a}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r}, \end{cases}$$

复数的三角函数式的运算:

$$(1) \gamma_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \gamma_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ = \gamma_1 \gamma_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

$$(2) \frac{\gamma_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{\gamma_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

$$(3) [\gamma(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \gamma^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \text{ 是正整数.}$$

$$(4) \sqrt[n]{\gamma(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{\gamma} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

[例 1] 化简下式:

$$(1) \frac{3+2i^{103}}{2-i^{92}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i} + \frac{1-4i^{33}}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= \frac{3-2i}{2-1} - \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)} \\ &\quad + \frac{1+4i}{5} = 3-2i + \frac{1+2\sqrt{6}i}{5} + \frac{1+4i}{5} \\ &= \frac{17}{5} + \left(\frac{2\sqrt{6}-6}{5} \right) i. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}.$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= \frac{[2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)]^{50}}{(\sqrt{2})^{100} [\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)]^{100}} \\ &= \frac{2^{50}(\cos 1500^\circ + i \sin 1500^\circ)}{2^{50}[\cos(-4500^\circ) + i \sin(-4500^\circ)]} \\ &= \cos(1500^\circ + 4500^\circ) + i \sin(1500^\circ + 4500^\circ) \end{aligned}$$

$$= -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

【例2】由方程 $(3-x) + (2+x+2y)i = 4(x+y) + 3(x+y)i$, 求实数 x, y .

【解】由两复数相等的定义, 得

$$\begin{cases} 3-x=4(x+y), \\ 2+x+2y=3(x+y). \end{cases}$$

解之, 得 $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{4}{3}.$

【例3】设 n 是自然数, 求证:

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ 当 n 是偶数的时候等于 1, 当 n 是奇数的时候等于 -1.

证: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]^n = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^n = (-1)^n.$

当 n 为偶数时,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n = 1;$$

当 n 为奇数时,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n = -1.$$

【例4】把多项式 $f(x) = x^5 + x^4 - 2x - 2$ 分解为因式的乘积:

(1) 在有理数集内; (2) 在实数集内; (3) 在复数集内.

解: (1) $f(x) = x^4(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(x^4-2);$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= (x+1)(x^2+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}) \\ &= (x+1)(x^2+\sqrt{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) f(x) &= (x+1)(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2}) \\
 &= (x+1)(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt{2}i) \\
 &\quad (x-\sqrt{2}i).
 \end{aligned}$$

复习思考题

1. 求下列各代数式的值:

(1) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, 其中 $x = -\frac{1}{2}$;

(2) $\frac{3a^2 - 2ab - 4b^2}{2a^2b^2 - 1}$, 其中 $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1\frac{1}{2}$;

(3) $\frac{m + \frac{n}{m} - n}{m^2 + \frac{1}{n^2}}$, 其中 $m = \frac{2}{3}$, $n = -\frac{3}{2}$;

(4) $x^4 + ix^3 - (1+2i)x^2 + 3x + 93 + 160i$, 其中 $x = 1-i$.

2. 两个无理数的和, 差, 积, 商一定是无理数吗? 试举例说明.

3. 化简下列各式:

(1) $\frac{(1+i)^5}{1-i} + \frac{(1-i)^5}{1+i}$;

(2) $\frac{(\sin \varphi + i \cos \varphi)(\sqrt{3}-i)^{100}}{(\cos \varphi - i \sin \varphi)(1+\sqrt{3}i)^{95}}$.

4. 解方程:

(1) $x^2 - (5+2i)x + 21+i = 0$;

(2) $\frac{3x+2iy}{5i-2} = \frac{15}{-8x+3iy}$, 其中 x 和 y 是实数;

(3) $x|-x = 1+2i$.

5. 把多项式 $f(x) = 9x^5 + 4x^4 - 6x - 3$ 分解为因式的乘积:

(1) 在有理数集内; (2) 在实数集内; (3) 在复数集内.

6. 设 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega_1$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega_2$,

验证下列等式:

(1) $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$; (2) $\omega_1^2 = \omega_2$, $\omega_2^2 = \omega_1$; (3) $1 + \omega_1 + \omega_2 = 0$.

7. 計算:

$$(1) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n, \quad (n \text{ 为自然数})$$

$$(2) \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-6}}, \quad (n \text{ 为自然数})$$

8. 証明: 若 $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi$, 則 $x^m + \frac{1}{x^m} = 2 \cos m\varphi$.

提示: 假定 $x = \cos \varphi + i \sin \varphi$, 則 $\frac{1}{x} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

二、代 数 式

(一) 代数式

用数字或表示数的字母, 并且用指明运算的种类和順序的符号把它們連接起来所得到的式子, 叫做代数式.

(二) 代数式的值

如果用数字代替代数式里的字母, 并且按照指定的順序进行运算, 則所得到的結果叫做代数式的值.

(三) 代数式的分类

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式} \end{cases} \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases} \begin{cases} \text{單項式} \\ \text{多項式} \end{cases}$$

(四) 有理式

由数字或表示数的字母利用有限次的四則运算所組成的代数式, 叫做有理式.

1. 整式: 在一有理式中, 若不含有以字母組成的式子作除数时, 就叫有理整式, 简称整式.

(1) 單項式 沒有加法和减法运算的整式, 叫做單項式.

(2) 多項式 几个單項式的和, 叫做多項式.