中学数学
公式的记忆与应用

吴鸣凤　编著

湖北教育出版社

责任编辑　江 丹

封面设计　邱 玲

ISBN 7—5351—0826—1

G·624　　定价：1.65元

中学数学公式的记忆与应用

吴鸣凤

湖 北 教 育 出 版 社

鄂新登字02号

中学数学公式的记忆与应用
吴鸣凤　编著

*

湖北教育出版社出版、发行　湖北省新华书店经销
咸宁地区印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　4.5印张　98 000字
1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷
ISBN 7—5351—0826—1/G·624
定价：1.65 元

前　　言

记忆是知识的积累，记忆是知识的深化，记忆在我们的数学学习中起着十分重要的作用.中学生的记忆活动正在从机械记忆逐渐过渡到意义记忆.为了保证学习的顺利，中学生应从初一开始，逐步学习一些记忆方法，不断增强记忆能力，以适应学习的需要.

本书从教育学、心理学方面系统阐述了培养记忆能力的方法，同时阐述了培养理解能力、运用能力及探求规律的能力的途径，饱含着知识性、趣味性和哲理性，对中学生具体掌握学习方法是有帮助的.

作者根据中学数学教材及三十三年教学实践的切身体会，编著了《中学数学公式的记忆与应用》一书，对那些想提高探求能力、增进记忆能力的中学生、自学青年、中学数学教师是一本较好的参考读物.

限于作者的水平，本书缺点、错误在所难免，恳请广大读者多多批评指正，我将不胜感激.

吴鸣凤

1991年9月9日于武汉

目　录

一、掌握知识，理解记忆

〔理解记忆法〕

理解是记忆的前提，只有真正理解了的知识，才能抓住实质，记准记牢. 即使忘记，还可以根据原理把它推出. 因此，先悟后记，是最重要的、最基本的记忆之路.

1. 抓住实质，深入领会

如，记算术根定义“正数的正的方根”时，首先弄清一是被开方数(根底数)是正数，二是方根也是正数. 其次弄清在实数范围内，负数没有算术根，因为负数的奇次方根只有唯一的负数根，而负数的偶次方根不存在；零的算术根是零；正数的偶次方根只有一个算术根，因为正数的偶次方根是两个相反的数，其中只有一个正方根；正数的奇次方根永远是算术根，因为正数的奇次方根只有唯一的正方根. 这样深刻理解了算术根的意义，才能达到“牢记不忘”的效果.

记对数定义时，首先要弄清“对数”运算是“指数”运算的逆运算，即在指数式 $a^b=N(a>0,a\neq1)$ 中，b 称作以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$. 深刻理解这种互逆关系也是正确地进行对数运算的基础. 其次，要理解为什么要设 $a>0$，且 $a\neq1$ 呢？这是因为：①当 $a<0$ 时，有时 b 不存在. 如，$\log_{(-3)}27$ 就不存在；②当 $a=0$，而 $N\neq0$ 时，b 也可能不存在. 如，$\log_0 5$ 就不存在. 所以只能规定 $a>0$；③当 $a=1$ 时，若 $N=1$，$b=\log_1 1$ 有无穷多个值，所以规

定 $a\neq1$. 这样深刻地理解了对数定义，从而形成牢固的记忆.

又如，要记住等比数列通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，只要理解了等比数列为

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots,$$

则很容易在理解的基础上记住等比数列通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$.

同样，要记住等比数列前 n 项和的公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$，只要掌握等比数列的定义，在理解的基础上就可以推出它的公式.

即
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q\ (q\neq1),$$

由等比定理，得

$$\frac{a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}=q,$$

$$\therefore\quad \frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q,$$

即
$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 x_1、x_2 和系数的关系 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$、$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ 的记忆，同学们常常记错为 $x_1+x_2=-b$，$x_1\cdot x_2=c$ 或 $x_1+x_2=\dfrac{b}{a}$，如果真正掌握了这个结论的来源，联想求根公式就不会忘记，即使一时忘了也能很快推出：

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

对于弧长公式 $l=\dfrac{n\pi R}{180^\circ}$，理解了，记不上可以推导出来，因

为全圆周长为 $2\pi R$，n 度中心角的弧长是全圆周长的 $\frac{n}{360^\circ}$.

$\therefore$ 弧长 $l=2\pi R\cdot\frac{n}{360^\circ}=\frac{n\pi R}{180^\circ}$.

关于转轴的坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

的逆变换公式，往往不易记住. 若我们理解到：若把 Oxy 看成是由 $O'xy$ 绕 O' 转角度 $(-\theta)$ 而得到，把 $(-\theta)$ 代入正变换公式，就得到逆变换公式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

不少同学出现了 $a^2\cdot a^3=a^6$ 的错误，究其原因，也是没有理解公式 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 的来源

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{个}}\cdot\underbrace{a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^{m+n}.$$

总之，明白了"理"，记忆就容易了，一旦忘记，也可顺理推出.

2. 扎根串联，理解记忆

三角学中公式众多，一个个的死记容易忘或混，掌握公式的来龙去脉，注意它们的联系，才能较好的理解记忆.

三角的和、差、倍、半角公式是以正弦、余弦的和角公式为基础推导出来的，其关系由下页表可以一目了然.

3. 反复使用，加深记忆

认识不能一次完成. 公式也只有在反复使用中才能加深理解，牢固记忆；同时也只有在反复应用中，才能不断领会其使用的条件和方法，从而达到熟练掌握、灵活运用、举一反三的程度.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}} \xrightarrow{-\beta\text{代}\beta} \boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

$$\Big\Downarrow \text{令 } \alpha=\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=1-2\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\end{aligned}} \xrightarrow{\text{用}\frac{\alpha}{2}\text{代}\alpha} \boxed{\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\end{aligned}}$$

如，两角和、差正切公式

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad (\mathrm{I})$$

主要解决函数求值问题，其多种应用举例如下.

(1)原形应用

A. 顺向用

例 1 不查表，求 tg75° 的值.

解 由公式(Ⅰ)从左向右展开，即可得出结论.

∵ $75°=45°+30°$,

∴ $$\mathrm{tg}75°=\mathrm{tg}(45°+30°)=\frac{\mathrm{tg}45°+\mathrm{tg}30°}{1-\mathrm{tg}45°\mathrm{tg}30°}=2+\sqrt{3}.$$

B. 逆向用

例 2 求 $\dfrac{1+\mathrm{tg}75°}{1-\mathrm{tg}75°}$ 的值.

解 由公式(Ⅰ)从右到左合并，即可得出结论.

∵ $\mathrm{tg}45°=1$,

$$\therefore \quad \frac{1+\mathrm{tg}75^\circ}{1-\mathrm{tg}75^\circ}=\frac{\mathrm{tg}45^\circ+\mathrm{tg}75^\circ}{1-\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{tg}75^\circ}$$

$$=\mathrm{tg}(45^\circ+75^\circ)=\mathrm{tg}120^\circ=-\sqrt{3}.$$

(2)变形应用

利用 $$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=(1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta)\cdot\mathrm{tg}(\alpha+\beta),$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1-\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}.$$

变换中遇正切的和、差与积，往往用两角和、差的正切变形公式.

例 3 化简：$\mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ$.

解 由上述变形后的第一个公式，得

$$\mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{tg}30^\circ=(1-\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ)\cdot\mathrm{tg}(15^\circ+30^\circ)$$

$$=1-\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ,$$

$$\therefore \quad \mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{tg}15^\circ\cdot\mathrm{tg}30^\circ=1.$$

例 4 求 $\mathrm{tg}(29^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(57^\circ+\beta)\mathrm{tg}(61^\circ+\alpha)\mathrm{tg}(147^\circ+\beta)$ 的值.

解 $\because \quad (29^\circ-\alpha)+(61^\circ+\alpha)=90^\circ,$

$$(147^\circ+\beta)-(57^\circ+\beta)=90^\circ,$$

$$\therefore \quad \mathrm{ctg}[(29^\circ-\alpha)+(61^\circ+\alpha)]=0,$$

即 $$\frac{1-\mathrm{tg}(29^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(61^\circ+\alpha)}{\mathrm{tg}(29^\circ-\alpha)+\mathrm{tg}(61^\circ+\alpha)}=0,$$

$$\therefore \quad \mathrm{tg}(29^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(61^\circ+\alpha)=1. \qquad ①$$

同样可以推得

$$\mathrm{tg}(147^\circ+\beta)\cdot\mathrm{tg}(57^\circ+\beta)=-1. \qquad ②$$

由 ① × ②，得

$$\mathrm{tg}(29^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(57^\circ+\beta)\mathrm{tg}(61^\circ+\alpha)\mathrm{tg}(147^\circ+\beta)=-1.$$

例 5 在△ABC 中，若 $\lg\mathrm{tg}A+\lg\mathrm{tg}C=2\lg\mathrm{tg}B$，求角 B 的范围.

解 在△ABC 中，$\lg\mathrm{tg}A+\lg\mathrm{tg}C=2\lg\mathrm{tg}B$.

$\therefore \quad 0<A<\frac{\pi}{2}、0<B<\frac{\pi}{2}、0<C<\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}^2 B,$$

$$\operatorname{tg}(A+C) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}C}{1 - \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}C} = -\operatorname{tg}B.$$

$\therefore \quad \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}C = -\operatorname{tg}B(1 - \operatorname{tg}^2 B)$.

根据韦达定理逆定理,可知:$\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}C$ 是方程 $x^2 + \operatorname{tg}B(1 - \operatorname{tg}^2 B) \cdot x + \operatorname{tg}^2 B = 0$ 的两根.

$\because \quad \operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}C$ 是实数,

$\therefore$ 判别式 $\Delta \geqslant 0$,

即 $\quad [\operatorname{tg}B(\operatorname{tg}^2 B - 1)]^2 - 4\operatorname{tg}^2 B \geqslant 0$,

$\because \quad \operatorname{tg}^2 B > 0$, $\therefore \quad (\operatorname{tg}^2 B - 1)^2 - 4 \geqslant 0$,

$\operatorname{tg}^2 B \geqslant 3$, $\operatorname{tg}^2 B \leqslant -1$(舍去).

$\because \quad \operatorname{tg}B > 0$, $\therefore$ 由 $\operatorname{tg}^2 B \geqslant 3$, 得 $\operatorname{tg}B \geqslant \sqrt{3}$.

由 $y = \operatorname{tg}x$ 在$(0, \frac{\pi}{2})$内是增函数, $\therefore \frac{\pi}{3} \leqslant B < \frac{\pi}{2}$.

又如,乘法公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

主要解决求值问题.

(1)原形应用

A.顺向用

如,公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的实质是要求找两个数,使其和等于$(a+b)$,其差等于$(a-b)$. 又如,$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的实质是要求找两个数,使其和为$(a+b)$,为了使大家弄清实质,下面举例说明.

例 1 计算:102×98.

分析 要利用平方差公式计算 102×98,问题的关键在于

确定公式里的 a 和 b，怎样确定 a 和 b 呢？$a=\frac{102+98}{2}$，$b=\frac{102-98}{2}$，即两数和的一半就是 a，两数差的一半就是 b. 这样就可用平方差公式计算了.

解 $102\times98=(100+2)(100-2)=100^2-2^2=9996.$

例 2 计算：$(-5a+3b^2)^2$.

解 $\because$ $a=-5a,b=3b^2$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{原式}&=(-5a)^2+2\cdot(-5a)\cdot(3b^2)+(3b^2)^2\\&=25a^2-30ab^2+9b^4.\end{aligned}$$

计算 $(-5a+3b^2)^2$ 也可以用两数差的平方公式进行计算.

B. 逆向用

例 3 把 $(x-y)^2-10(y-x)+25$ 分解因式.

分析 应用 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 公式进行因式分解，首先要根据两个平方项确定公式里的 a 和 b，在这里 $a^2=(x-y)^2$，$b^2=5^2$，然后看中间项是不是相当于 $+2ab$ 或 $-2ab$，如果是的，就可分解成为两数和或两数差的平方形式了.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x-y)^2+2\cdot(x-y)\cdot5+5^2\\&=(x-y+5)^2.\end{aligned}$$

(2)变形应用

如，两数和的平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 变形为：

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

$$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2].$$

这两个变形公式在解题中有着广泛的应用.

例 4 在 $x^2+x+1=0$ 的条件下，求有理式 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$ 的值.

解 $\because$ $x^2+x+1=0$,

$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=-1(x\neq 0).$

又 $\because\quad x^2+x+1=0,$

$\therefore\quad (x^2+x+1)(x-1)=x^3-1=0,$

$x^3=1,$

$$\therefore\quad x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=x^{12}\cdot x^2+\frac{1}{x^{12}\cdot x^2}$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=(x+\frac{1}{x})^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=-1.$$

(3)推广应用

对公式的推广,既能加深对公式的理解,还能扩大公式的应用.

如,对两数和的平方公式可以这样推广:

①多项式的平方和

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd;$$

…

②二项式的高次幂

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

…

上面这些式子可以作为公式应用.

例 5 计算:$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$.

解 原式$=[(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]\cdot[c+(a-b)]\cdot[c$

$-(a-b)]$

$$=[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]$$
$$=[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\cdot[2ab-(a^2+b^2-c^2)]$$
$$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

(4)综合应用

解数学综合题，要求综合运用多个公式，它有助于将我们所学的公式融会贯通，起到复习和提高的作用，也有利于提高灵活运用公式的能力.

如，以乘法公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$为基础的配方法，在解答综合题时有多种灵活应用.

例 6 用配方法把x^4-10x^2+9分解因式.

解 1 原式$=x^4-10x^2+5^2-16$

$$=(x^2-5)^2-4^2$$
$$=(x^2-1)(x^2-9)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3).$$

这个题目也可以先通过加上$6x^2$，把其中x^4+9配成完全平方式，然后将原多项式化为平方差的形式进行因式分解.

解 2 原式$=x^4+6x^2+9-16x^2$

$$=(x^2+3)^2-(4x)^2$$
$$=(x^2+4x+3)(x^2-4x+3)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3).$$

例 7 已知a、b、c、d都是正数，且$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求证：$a=b=c=d$.

证明 由已知，得

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0.$$

配方，得