震撼名师阵容 高考复习必备

中国高考宝典

数学

本书主编：乔荣凝

丛书主编：刘振贵 王树声

中国名校 特级教师

全国高考命题研究课题组专家

中央电视台、中央教育电视台

高考栏目主讲教师

经典高考模拟试题原创作者

强强联手编撰

中国大百科全书出版社

中国高考宝典

数 学

本书主编 乔荣凝
丛书主编 刘振贵 王树声

中国大百科全书出版社
北 京

总编辑:徐惟诚　　社长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

中国高考宝典·数学/乔荣凝,白翔主编 .—北京:中国大百科全书出版社,2003.9
ISBN 7－5000－6936－7

Ⅰ.中…　Ⅱ.①乔…②白…　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 081299 号

策划编辑:韩知更　周　茵　朱　勇
责任编辑:戴中器　余　会　周　茵
责任校对:李　静
责任印制:乌　灵　李　静
封面设计:陈　勉

中国高考宝典·数学
中国大百科全书出版社出版发行
(北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010－88390715)
http://www.ecph.com.cn
高等教育出版社印刷厂印刷
新华书店经销
开本:889×1194 毫米　1/16　印张:18.5　字数:447 千字
2003 年 9 月第 1 版　2004 年 8 月第 2 次印刷
ISBN 7－5000－6936－7/G·628
定价:24.00 元

“中国高考宝典”丛书编委会名单

本书著作者名单

主　编　乔荣凝
作　者　乔荣凝　白　翔　刘万里　王红军

前　　言

经过高中两年的勤奋耕耘，又一个收获的季节向我们走来。为了帮助高三学生梳理总结所学知识，从容应对高考，中国著名重点高中特级教师特地精心编撰了《中国高考宝典》丛书。这套丛书，也是国内第一套百科全书式的高考备考用书。

丛书以其震撼的名师阵容，为高考全程复习所必备，指导考生突破知识弱点，并且教会考生掌握应试技巧。具有以下特点：

一、权威的专家，顶级的作者

丛书作者来自北京师范大学附属实验中学、北京师范大学附属中学、北京四中、北京八中、北京二中、中国人民大学附属中学等全国著名重点高中。其中，有全国高考命题研究组专家，也有经典高考模拟试题原创作者，还有中央电视台、中央教育电视台高考咨询栏目主讲教师。他们积多年高考教学经验和科研成果，殚精竭虑，群策群力，终于成就《中国高考宝典》丛书。

二、全新的备考思路

丛书运用"梳辫子"的办法，以最新《考试大纲》为依据，剖析基本理论、基本知识，纵横贯穿，建立完整的知识体系。

丛书以《考试大纲》所列考点为单元，构筑知识网络结构，点拨高考命题走向，精析相关例题，并通过《高考精题荟萃》、《联系实际创新题》、《综合创新题》、《综合能力检测》等专栏，提高学生掌握基础知识的水平。

全书思路清晰，循序渐进，画龙点睛，能使读者收到事半功倍的效果。

三、突出的综合性

丛书既全面介绍《考试大纲》列出的知识点，又深刻分析学科内和跨学科的综合问题，是对教育部高考《考试大纲》的说明、扩展和延伸。丛书注重联系相关知识，编织知识体系，使学生能够学会举一反三，达到融会贯通的目的。

四、独特的百科索引

为了便于读者释疑解惑，本书特别设置了知识点考点索引。索引不仅收入了《考试大纲》列出的高考考点，而且还包括本学科及其交叉学科的新知识点和边缘知识点，可以使读者迅速查到自己所需要的知识。

索引具有三大功能：①提示知识点在学科中的地位，便于检查自己对考点、知识点的理解；②使学生了解考点的分布，便于拟出有针对性的复习计划，加强高考复习的力度；③对于教师快捷编制模拟试卷，也有相当价值。

由于时间的限制，丛书难免存在一些不足和疏漏之处，我们恳切地希望广大读者多多提出宝贵意见，以便继续修订，不断提高质量，更好地为冲刺高考的同学们服务。

编　者

再版说明

本书是特为使用新课程卷的考生准备的（使用人民教育出版社普通高级中学教科书试验修订本 A，B 的同学，均可使用）。在新课程卷的高考试题中，在以能力立意命题的基础上，更加体现了新课程的理念和对能力的要求。同时也加强了对新增内容的考查。考试中将注重对数学思想和方法的考查，注重对数学能力的考查，增加应用性和能力型的试题，融知识、方法、思想、能力于一体，全面检测考生的数学素养，注重展现数学的科学价值和人文价值，同时兼顾试题的基础性、综合性和现实性，重视试题的层次性，合理调控综合程度。新课程试卷中将更强调基础的更新，减少对单纯知识、公式的记忆要求，降低对运算复杂性、技巧性的要求。试题将坚持“贴近生活、背景公平、控制难度”的原则。解决实际问题的能力仍然是高考的重点，包括数学地提出问题、分析问题和解决问题的能力。

在高考复习时，要把握好这些变化，更要关注教材中新增内容与传统内容知识的交汇点，特别是新增内容带来的新思想、新方法和新观念。夯实基础知识，特别是新增内容基础知识的落实，形成知识纵横联系的网络，突出知识主干，重视思想方法的渗透和运用。

为了帮助同学们完成上述的要求，再版时在内容上进行了积极的调整，充实了能表述以上观点的、代表性的创新题型，并给以科学的讲解，使内容更加科学、务实、精炼，以确保同学在认真研读这本书之后，能有事半功倍的效果。

乔荣凝

2004 年 8 月

目　录

一、集合、简易逻辑

知识网络

集合 {集合的表示; 集合的运算}

简易逻辑 {命题 {逻辑联结词; 简单命题与复合命题}; 四种命题及其关系; 充分必要条件}

高考精题荟萃

集合是高中数学最基本的概念，集合思想是一种重要的数学思想，它渗透于高中数学的各部分内容。

逻辑是研究思维形式及其规律的科学，是掌握推理技能和训练思维能力的必要基础知识。对于简易逻辑，要深刻理解概念，掌握逻辑联结词的意义及其应用，理解四种命题间的相互关系，会判断和应用充要条件。

1. (2003－北京) 设集合 $A=\{x|x^2-1>0\}$，$B=\{x|\log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于

A. $\{x|x>1\}$

B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|x<-1\}$

D. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

【分析】 解 $x^2-1>0$ 得 $x>1$ 或 $x<-1$，解 $\log_2 x>0$ 得 $x>1$，则 $A\cap B=\{x|x>1\}$.

【答案】 A

2. (2000－全国) 设集合 $A=\{x|x\in Z$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\in Z$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

【分析】 集合 A 共有 -10，-9，-8，…，-2，-1 共 10 个元素，集合 B 共有 -5，-4，…，-1，0，1，2，3，4，5 共 11 个元素，$A\cup B$ 中有 -10，-9，-8，…，-1，0，1，…，5，共有 16 个元素.

【答案】 C

3. (2000－上海) 若集合 $S=\{y|y=3^x,\ x\in R\}$，$T=\{y|y=x^2-1,\ x\in R\}$，则 $S\cap T$ 是

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

【分析】 集合 S 是函数 $y=3^x$ 的值域，$S=\{y|y>0\}$，同理，$T=\{y|y\geqslant -1\}$，所以 $S\cap T=\{y|y>0\}=S$

【答案】 A

4. (2001－全国新课程版) 在空间中，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线. ②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中，逆命题为真命题的是________. (把符合要求的命题序号都填上)

【分析】 命题①的逆命题是："若四个点中的任何三个点都不共线，则这四个点不共面." 这个命题不是真命题，如平面四边形. 命题②的逆命题是："若两条直线是异面直线，则这两条直线没有公共点." 这是一个真命题，由异面直线的定义即可知.

【答案】 ②

经典例题

例1 指出由下面两命题构成的"p 或 q"，"p 且 q"，"非 p" 形式的复合命题及命题的真假.

p：$x^2+x+1>0$ 恒成立，

q：$x^2-x+1<0$ 恒成立.

【分析】 首先判断 p、q 的真假，然后结合真值表可以判断真假.

解 p 或 q：$x^2+x+1>0$ 或 $x^2-x+1<0$ 恒成立.

p 且 q：$x^2+x+1>0$ 且 $x^2-x+1<0$ 恒成立.

非 p：$x^2+x+1>0$ 不恒成立.

由二次函数的知识知 p 为真，q 为假，由真值表知：p 或 q 为真；p 且 q 为假；非 p 为假.

例 2 "$ab<0$"是"方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线"的

A. 必要非充分条件

B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不是充分条件又不是必要条件

【分析】充要条件的最常见的命题形式是"判断 A 是 B 的什么条件"，关键是看两个命题"$A\Rightarrow B$"和"$B\Rightarrow A$"的真假情况. 如果要说明一个命题是假命题，只需举一个反例即可.

解 若方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线，则应有$\frac{ab}{c^2}<0$，即 $ab<0$.

若 $ab<0$，取 $a=1$，$b=-1$，$c=0$，则方程 $ax^2+by^2=c$ 化为 $x^2-y^2=0$，不表示双曲线.

由此知，"$ab<0$"是"方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线"的必要非充分条件.

【答案】A

例 3 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in R\}$，$B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0,x\in R\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的范围.

【分析】由 $A\cup B=A$ 知，$B\subseteq A$，故应分 $B\neq\varnothing$ 与 $B=\varnothing$ 两种情况讨论.

解 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$，即集合 $A=\{1,2\}$.

由于 $A\cup B=A$，因此 $B\subseteq A$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，把 $x=1$ 代入 $2x^2-ax+2=0$，得 $a=4$，此时 $B=\{1\}$，符合题意.

把 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$，得 $a=5$. 此时 $B=\{2,\frac{1}{2}\}$，从而 $A\cup B\neq A$. 不合题意.

当 $B=\varnothing$ 时，由 $\Delta=a^2-4\times2\times2<0$，得 $-4<a<4$，此时 $B=\varnothing\leqslant A$，符合题意.

综上，所求实数 a 的取值范围是 $\{a\mid -4<a\leqslant4\}$

评述 在研究集合的有关问题时，一定要认清集合中元素的实质. 本例中，A、B 集合中的元素均为方程的根.

由于空集是任意集合的子集，因此本题分 $B=\varnothing$ 和 $B=\varnothing$ 两种情况讨论.

精练备考

一、选择题

1. α，$\beta\in\mathbf{R}$，则 $\alpha>1$，$\beta>1$ 的充要条件是

A. $\alpha+\beta>2$ B. $\alpha\beta>1$

C. $\begin{cases}\alpha+\beta>2\\ \alpha\beta>1\end{cases}$

D. $\begin{cases}\alpha+\beta>2\\ (\alpha-1)(\beta-1)>0\end{cases}$

2. 下列命题为真命题的是

A. $2\geqslant1$ 且 $3\leqslant2$

B. $A\subsetneqq A\cup B$ 或 $A\cap B\subsetneqq B$

C. 奇数集为 $\{x\mid x=4n\pm1,n\in Z\}$ 且偶数集为 $\{x\mid x=2n,n\in Z\}$

D. $-a$ 不大于零

3. 若集合 A_1、A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称 (A_1,A_2) 为集合 A 的一种分拆，并规定：当且仅当 $A_1=A_2$ 时，(A_1,A_2) 与 (A_2,A_1) 为集合 A 的同一种分拆，则集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的不同分拆种数是

A. 27 B. 26 C. 9 D. 8

4. 调查了100名携带药品出国的旅游者，其中 75 人带有感冒药，80 人带有胃药，那么对于既带感冒药又带胃药的人数统计中，下列说法正确的是

A. 最多人数是 55 B. 最少人数是 55

C. 最少人数是 75 D. 最多人数是 80

5. 含有三个实数的集合可表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2003}+b^{2003}$ 的值为

A. 0 B. 1 C. -1 D. ±1

6. 若 M 和 N 都是非空集合，且 $M\neq N$，则 $a\in M\cap N$ 是 $a\in M\cup N$ 的

A. 充分条件但非必要条件

B. 必要条件但非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分条件又非必要条件

二、解答题

7. 已知集合 $A=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$，集合 $B=\{x\mid\frac{2a}{x-a}>1\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

8. 若函数 $y=mx^2+mx-1$ 的取值恒为负数，求实数 m 的取值范围.

9. 设 x，$y\in R$，求证：

$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是：$xy\geqslant0$

二、函　　数

知识网络

映射 → 函数 → 函数的性质、图象

映射 → 函数 → 反函数

映射 → 函数 → 指数函数和对数函数

高考精题荟萃

函数是高中数学最主要的概念之一，是高中数学的主要内容，是高考重点考查的对象。要切实掌握函数的有关概念，并会用定义证明函数的性质。函数知识是形成函数思想、数形结合与等价变换等数学思想方法的基础。要深刻理解并掌握函数的性质和图象以及图象变换，并能熟练使用配方法、待定系数法、换元法、数形结合法、分类讨论法以及这几种方法的综合应用。

一、选择题

1.（2000－全国）设集合 A 和 B 都是自然数集合 N_+，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【分析】 本题主要考查集合和映射的基本知识，根据映射的概念，有方程：$2^n+n=20$ 解方程可得.

解　依据映射的定义，在题设下，所求的原象 n 满足 $2^n+n=20$. 由于 20 和 2^n 都是偶数，故可排除 B、D，验证 A、C 可得.

【答案】 C

2.（2003－北京）设 $y_1=4^{0.9}$，$y_2=8^{0.48}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$，则

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

【分析】 根据题目的特点，可将 y_1、y_2、y_3 化为以 2 为底的指数式进行比较.

解　$y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$

由 $1.8>1.5>1.44$ 及指数函数的性质知：$y_1>y_3>y_2$.

【答案】 D

3.（2003－全国）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1 & x\leqslant0\\ x^{\frac{1}{2}} & x>0\end{cases}$，若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是

A. $(-1,\ 1)$

B. $(-1,\ +\infty)$

C. $(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$

D. $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

【分析】 本题主要考查函数的基本知识及

解不等式，题中所给函数为分段函数，因此求 $f(x_0)>1$ 的 x_0 的范围就转化为解下面两个不等式 $2^{-x}-1>1$ $(x\leqslant 0)$，$x^{\frac{1}{2}}>1$ $(x>0)$，分别解得：$x<-1$，$x>1$，因此 x_0 的范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

【答案】D

4. (2001－全国)若定义在区间$(-1,0)$内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足 $f(x)>0$,则 a 的取值范围是

A. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$

C. $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$　　D. $(0,\ +\infty)$

【分析】本题考查函数的定义域及对数函数的性质，由已知，$f(x)$ 定义在 $(-1,0)$ 上，即 $x\in(-1,0)$，故 $x+1\in(0,1)$，由 $f(x)>0$ 可得 a 的范围.

解　由已知$x\in(-1,0)$，可得 $x+1\in(0,1)$，由 $f(x)>0$，得 $0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$.

【答案】A

5. (1997－全国)定义在区间$(-\infty,+\infty)$的奇函数 $f(x)$为增函数;偶函数 $g(x)$在区间 $[0,+\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合，设 $a>b>0$，给出下列不等式：

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$

其中成立的是

A.①与④　　B.②与③

C.①与③　　D.②与④

【分析】本题主要考查函数的奇偶性、单调性，根据 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数可得：$f(-a)=-f(a)$,$f(-b)=-f(b)$,$f(0)=0$,$g(-a)=g(a)$,$g(-b)=g(b)$,由 $f(x)$与 $g(x)$在$[0,+\infty)$图象重合,可得 $f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,又 $f(x)$是增函数,可得 $f(a)>f(b)>0$,代入四个式子中,整理可得.

解　利用$f(x)$,$g(x)$的奇偶性,可知 4 个不等式的左端都等于 $f(a)+f(b)$,①、②的右端都等于 $g(a)-g(b)$,③、④的右端都等于 $g(b)-g(a)$,依设,$g(a)=f(a)$,$g(b)=f(b)$,因此 4 个不等式分别等价于:①$f(b)>0$;②$f(b)<0$;③$f(a)>0$;④$f(a)<0$.由于 $f(x)$是奇函数,且定义在$(-\infty,+\infty)$上,所以 $f(0)=0$.又 $f(x)$是增函数,$a>b>0$,得 $f(a)>f(b)>0$,得不等式①③成立.

【答案】C

6.(1993－全国)$F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$是偶函数,且 $f(x)$不恒等于零,则 $f(x)$

A. 是奇函数　　B. 是偶函数

C. 可能是奇函数也可能是偶函数

D. 不是奇函数也不是偶函数

【分析】判断函数的奇偶性应根据奇偶性的定义，由已知，$F(-x)=F(x)$.

解法一　$\because F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)$

$$=\frac{2^x+1}{2^x-1}f(x)(x\neq 0)$$

又 $F(x)$是偶函数,即 $F(-x)=F(x)$,

$\therefore \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}f(-x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}f(x)$,

$\because \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=\frac{1+2^x}{1-2^x}$,

$\therefore f(-x)=-f(x)(x\neq 0)$

又 $f(x)$不恒等于零,所以 $f(x)$是奇函数.应选 A.

解法二　由题设得 $F(-x)=F(x)$,且

$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}F(x)(x\neq 0)$.

$$\therefore f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}F(-x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}F(x)=-f(x)(x\neq 0)$$

又 $f(x)$不恒等于零.故 $f(x)$是奇函数.

【答案】A

7. (1997－全国) 将 $y=2^x$ 的图象

A. 先向左平行移动 1 个单位

B. 先向右平行移动 1 个单位

C. 先向上平行移动 1 个单位

D. 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图象，可得到

函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象.

【分析】 本题主要考查指数函数、对数函数的图象及函数图象变换，可利用函数图象的平移变换和对称变换由 $y=\log_2(x+1)$ 的图象得到 $y=2^x$ 的图象，亦可采用特殊值法.

解法一 与函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线是反函数 $y=2^x-1$ 的图象，为了得到它，只须将 $y=2^x$ 的图象向下平移 1 个单位. 故应选 D.

解法二 坐标原点 O 在函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象上，又点 O 关于直线 $y=x$ 的对称点是 O 自身，而函数 $y=2^x$ 的图象向左或向右平移都不会经过原点 O，向上平移也不会经过原点 O，因此排除 A、B、C，得 D.

【答案】 D

8. (2000－全国) 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象（图 2－1）是

【分析】 所给的函数式是幂函数与余弦函数的乘积，其图象并非我们所常见，注意到函数的奇偶性及函数值的符号，就可以进行判断.

解法一 由所给函数是奇函数，可知函数的图象关于原点中心对称，故排除 A、C，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y<0$，故排除 B，得答案为 D.

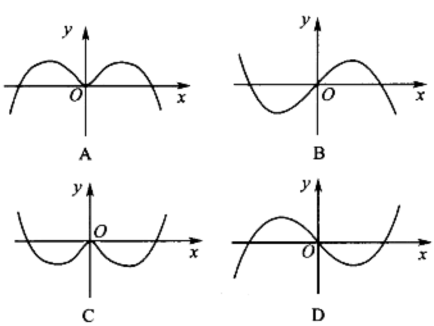

图 2－1

解法二 因为 $y=-x\cos x$，所以，当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$y>0$；当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y<0$. 在 4 个选择项中，能满足此条件者只有 D. 故应选 D.

【答案】 D

9. (2002－北京) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数，当 $0<x<3$ 时，$f(x)$ 的图象如图 2－2 所示，那么不等式 $f(x).\cos x<0$ 的解集是

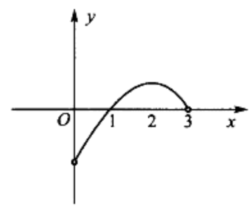

图 2－2

A. $\left(-3,\ -\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,\ 1)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{2},\ -1\right)\cup(0,\ 1)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$

C. $(-3,\ -1)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ 3)$

D. $\left(-3,\ -\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ 3)$

【分析】 本题主要考查函数的奇偶性，余弦函数的图象和性质，不等式的解法等知识. 首先要利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系作出函数 $f(x)$ 在 $(-3,\ 0)$ 上的图象. 再依据图象上给出的信息，作出正确的推理和判断，要体会数形结合思想的运用.

解法一 由 $f(x)$ 是定义在 $(-3,\ 3)$ 上的奇函数，作出 $f(x)$ 在 $(-3,\ 0)$ 上的图象，再作出函数 $y=\cos x$ $(-3<x<3)$ 的图象，并注意 $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$，$1<\frac{\pi}{2}<2$，依图可得不等式的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2},\ -1\right)\cup(0,\ 1)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$，故选 B.

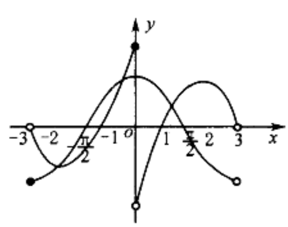

图 2－3

解法二 先对不等式 $f(x)\cos x<0$ $(-3<x<3)$ 作等价变形，得 $\begin{cases}f(x)>0\\ \cos x<0,\\ -3<x<3\end{cases}$ 或

$$\begin{cases} f(x)<0, \\ \cos x>0, \\ -3<x<3. \end{cases}$$

再依图得

$$\begin{cases} -1<x<0 \text{ 或 } 1<x<3 \\ -3<x<-\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2}<x<3 \end{cases}$$

或$\begin{cases} -3<x<-1 \text{ 或 } 0<x<1, \\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

由此可解得$\frac{\pi}{2}<x<3$或$-\frac{\pi}{2}<x<-1$或$0<x<1$．故选B．

【答案】 B

10．（2002－北京）如图2－4所示，$f_i(x)$（$i=1,2,3,4$）是定义在$[0,1]$上的四个函数，其中满足性质："对$[0,1]$中任意的x_1和x_2，任意$\lambda\in[0,1]$，$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$恒成立"的只有

A. $f_1(x)$，$f_3(x)$　　B. $f_2(x)$

C. $f_2(x)$，$f_3(x)$　　D. $f_4(x)$

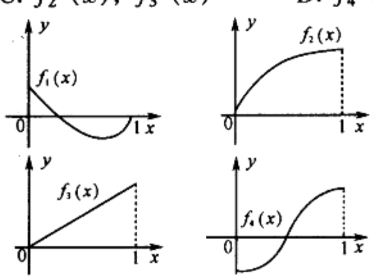

图2－4

【分析】 本题主要考查对函数符号的表达式与函数图形之间对应关系的理解与掌握．

解法一　本题关键在理解下列两个表达式的几何意义：

令$x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_2+\lambda(x_1-x_2)$，

当$\lambda\in[0,1]$时，x_λ表示点x_1与x_2中的一个点（如图2－5），特别是，当$\lambda=0$时，$x_\lambda=x_2$；$\lambda=1$时，$x_\lambda=x_1$；$\lambda=\frac{1}{2}$时，$x_\lambda=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，即$x_1$与$x_2$的中点．

令$l(\lambda)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$
$=f(x_2)+\lambda(f(x_1)-f(x_2))$，

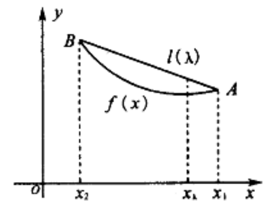

图2－5

当$\lambda\in[0,1]$时，$l(\lambda)$表示由直线段BA所确定的函数（如图2－5）．

当$\lambda=0$时，$l(0)=f(x_2)$；

当$\lambda=1$时，$l(1)=f(x_1)$；

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$l\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$．

基于以上认识，对题设不等式

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，

可写成：对给定的x_1，$x_2\in[0,1]$，对任意的$\lambda\in[0,1]$，有$f(x_\lambda)\leqslant l(\lambda)$．这意味着直线段$BA$在相应区间上的曲线$y=f(x)$的上方．这样一来，可以取特别点，例如$x_1=1$，$x_2=0$及$\lambda=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$来测试，四个图形中符合所给不等式的只有$f_1$与$f_3$．也可以直接利用"弦直线段在曲线上面"的几何意义来检查四个函数，结果仍是f_1与f_3．

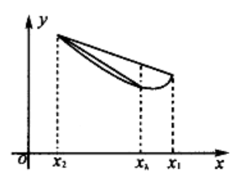

图2－6

解法二　若将不等式$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$作如下变形：$f(x_1)-f(x_2)$

$$\geqslant\frac{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_2)}{\lambda}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$\geqslant\frac{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)},$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geqslant \frac{f(x_\lambda)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

这个不等式表示：对任意给的 x_1，$x_2 \in [0, 1]$（设 $x_1 > x_2$）和任意的 $x_2 < x_\lambda < x_1$，两点 $(x, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 连线的斜率大于等于两点 $(x_\lambda, f(x_\lambda))$，$(x_2, f(x_2))$ 连线的斜率，由此亦可用来检查四个函数中符合条件的仍然是 f_1 与 f_3.

【答案】A

二、填空题

11.（2001－上海）函数 $f(x) = x^2+1$ $(x \leqslant 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$____________.

【分析】本小题考查反函数的概念以及反函数的求法，应注意定义域.

由 $y = x^2+1$ $(x \leqslant 0)$，得 $x = -\sqrt{y-1}$，又 $y = x^2+1 \geqslant 1$，所以所求的反函数为 $y = -\sqrt{x-1}$，$(x \geqslant 1)$.

【答案】$-\sqrt{x-1}$ $(x \geqslant 1)$

12.（1998－上海）函数

$$y=\begin{cases} 2x+3, & x \leqslant 0 \\ x+3, & 0 < x \leqslant 1 \\ -x+5, & x > 1 \end{cases}$$ 的最大值是________.

【分析】题中所给为分段函数，应求出每个区间上的最大值，然后取最大的.

设 $y = f(x)$，当 $x \leqslant 0$ 时，$y_{最大} = f(0) = 3$；

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，$y_{最大} = f(1) = 4$；

当 $x > 1$ 时，$-x+5 < -1+5 = 4$.

$\therefore$ $y = f(x)$ 的最大值是 4.

【答案】4

13.（1994－全国）在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1，a_2，…，a_n 共 n 个数据. 我们规定所测量物理量的"最佳近似值" a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小. 依此规定，从 a_1，a_2，…，a_n 推出的 $a =$____________.

【分析】本题考查求函数的最值与建立数学模型解决实际问题的能力，能否弄清题意是解题关键.

设各数据的平方和是 y，那么

$$y = (a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$$

$$= n\left(a-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$$

显然，$a = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 时 y 值最小.

【答案】$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

14.（2000－上海）方程 $\log_4(3x-1) = \log_4(x-1)+\log_4(3+x)$ 的解是____________.

【分析】本小题考查对数方程的解法，要注意运算的准确性.

原方程可化为：

$\log_4(3x-1) = \log_4(x-1)(3+x)$

于是 $3x-1 = (x-1)(3+x)$

即 $x^2-x-2=0$

得 $x_1=2$，$x_2=-1$

经检验 $x=-1$ 不是方程的解，舍去.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=2$.

【答案】$x=2$

三、解答题

15.（2001－北京）设函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ $(a > b > 0)$，求 $f(x)$ 的单调区间，并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

【分析】本小题主要考查函数的单调性及不等式的基础知识，在证明函数的单调性时要注意变形到位.

解 函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ 的定义域为 $(-\infty, -b) \cup (-b, +\infty)$.

$f(x)$ 在 $(-\infty, -b)$ 内是减函数，$f(x)$ 在 $(-b, +\infty)$ 内也是减函数.

证明 $f(x)$ 在 $(-b, +\infty)$ 内是减函数.

取 x_1，$x_2 \in (-b, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$，那么

$$f(x_1)-f(x_2) = \frac{x_1+a}{x_1+b}-\frac{x_2+a}{x_2+b} = \frac{(a-b)(x_2-x_1)}{(x_1+b)(x_2+b)},$$

$\because$ $a-b>0$，$x_2-x_1>0$，

$(x_1+b)(x_2+b) > 0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$,

即 $f(x)$ 在 $(-b, +\infty)$ 内是减函数.

同理可证 $f(x)$ 在 $(-\infty, -b)$ 内是减函数.

16. (2000－全国) 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中 $a>0$

(Ⅰ) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(Ⅱ) 求 a 的取值范围, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

【分析】 第 (Ⅰ) 问是解不等式, 首先应注意到根式有意义的条件 $x^2+1\geqslant 1$; 其次, 由 x 的系数 (a^2-1) 确定参数 a 分为 $a\geqslant 1$, $0<a<1$ 两个区间讨论, 第 (Ⅱ) 问是研究函数的单调性, 总是从表达 $f(x_1)-f(x_2)$ 入手, 研究其大小关系.

解 (Ⅰ) 不等式 $f(x)\leqslant 1$ 即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant 1+ax$,

由此得 $1\leqslant 1+ax$, 即 $ax\geqslant 0$, 其中常数 $a>0$.

所以, 原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\leqslant(1+ax)^2,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ (a^2-1)x+2a\geqslant 0.\end{cases}$

所以, 当 $0<a<1$ 时, 所给不等式的解集为 $\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$;

当 $a\geqslant 1$ 时, 所给不等式的解集为 $\{x|x\geqslant 0\}$.

(Ⅱ) 在区间 $[0, +\infty)$ 上任取 x_1、x_2, 使得 $x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(ⅰ) 当 $a\geqslant 1$ 时

$$\because \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0,$$

又 $x_1-x_2<0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$,

即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以, 当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递减函数.

(ⅱ) 当 $0<a<1$ 时, 在区间 $[0, +\infty)$ 上存在两点 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$, 满足 $f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$, 即 $f(x_1)=f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不是单调函数.

综上所述, 当且仅当 $a\geqslant 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

17. (2001－全国) 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 其图象关于直线 $x=1$ 对称, 对任意 x_1、$x_2\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, 且 $f(1)=a>0$.

(Ⅰ) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

(Ⅱ) 证明 $f(x)$ 是周期函数;

(Ⅲ) 记 $a_n=f\left(2n+\dfrac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

【分析】 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 时应充分利用 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 中 x_1, x_2 的任意性, 证 $f(x)$ 是周期函数, 就是设法证明 $f(x+T)=f(x)$ $(T\neq 0)$.

解 (Ⅰ) 因为对任意 x_1、$x_2\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, 所以

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0,$$

$$\therefore f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

$\because f(1)=a>0$.

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}},\ f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}.$$

(Ⅱ) 依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称.

故 $f(x)=f(2-x)$, $x\in\mathbf{R}$.

又由 $f(x)$ 是偶函数知