2005年

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学一和数学二适用）

教育部考试中心

高等教育出版社
Higher Education Press

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学考试参考书

（数学一和数学二适用）

教育部考试中心

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书／教育部考试中心. —北京：高等教育出版社，2004.8
数学一和数学二适用
ISBN 7-04-015247-9

Ⅰ.2...　Ⅱ.教...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第070403号

策划编辑　刘　佳　　责任编辑　田晓兰　　封面设计　王　雎
责任绘图　宗小梅　　责任校对　黄丽雯　　责任印制　韩　刚

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100011
总　　机　010-82028899
购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　高等教育出版社印刷厂

开　　本　850×1168　1/16
印　　张　23
字　　数　810 000
版　　次　2004年8月第1版
印　　次　2004年8月第1次印刷
定　　价　38.00元

前　言

全国硕士研究生入学统一考试是国家选拔硕士研究生的主要途径，在教育类大规模、社会化全国统一考试项目中（不含博士生录用考试），就考试水准和层次来说，目前是我国最高水平的。从测量学角度来说，硕士研究生入学统一考试，应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定。

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解《考试大纲》的内容和要求，增加考试的透明度，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，我们组织部分参加大纲制订和修订的专家，根据《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，对《2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》进行了修订，今年继续出版《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》。

《数学考试参考书》分工学类和经济学类两册出版，对考试内容和要求作了进一步说明，并通过一定量的例题对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点。期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好成绩。

由于时间和经验不足，难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正。

应书增

2004 年 6 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

一、函数　极限　连续

"函数、极限、连续"这一部分的概念及运算，是高等数学的基础.

函数是高等数学研究的主要对象.事实上，全部微积分主要就是讨论各类函数的各种性质.极限不仅是一个主要的基本概念，而且它的思想和方法贯彻于微积分的始终.连续是一大类函数的重要特性，连续函数是微积分研究的重点.因此，通过复习，读者在这一部分要达到：

理解函数的概念，会进行函数记号的运算，并会建立简单应用问题中的函数关系式；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)；会判断函数间断点的类型；了解连续函数性质和初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

·考试内容概要·

(一) 函数

1. 定义　设 x 与 y 是两个变量，D 是实数集的某个子集，若对于 D 中的每个值 x，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

数集 D 称为函数的定义域，由函数对应法则或实际问题的要求来确定.相应的函数值的全体称为函数的值域.对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

1° 有界性　设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对于每一个 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则，即这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 X 上无界.

2° 单调性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，均有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,[\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)],$$

称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).如果其中的"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")改为"$<$"(或"$>$")，称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加(或严格单调减少).

3° 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)(a>0)$，若对于任一 $x\in(-a,a)$，都有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数，如常数 C，x^2，$\cos x$ 等；若对于任一 $x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数，如 x，x^3，$\sin x$ 等.

4° 周期性　对函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，使得对于定义域的每一个 x，$x+T$ 仍在定义域内，且有

$$f(x+T)=f(x),$$

称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1) 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 为中间变量.对复合函数，重要的是会把它分解，即知道

它是由哪些"简单"函数复合而成的.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$的值域为 Z_f,定义域为 D_f,则对于每一个 $y\in Z_f$,必存在$x\in D_f$ 使$y=f(x)$.若把 y 作为自变量,x 作为因变量,便得一个函数 $x=\varphi(y)$,且 $f[\varphi(y)]=y$,称 $x=\varphi(y)$为 $y=f(x)$的反函数.但习惯上把 $y=f(x)$的反函数记作 $y=\varphi(x)$. $y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

(3) 隐函数　设有方程 $F(x,y)=0$,若当 x 在某区间内取任一值,便总有满足该方程唯一的值 y 存在时,称由方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(4) 分段函数　若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示其对应规律,如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), a<x<b,\\ \psi(x), c<x<d,\end{cases}$称为分段函数.

(二) 极限

1. 概念

(1) 定义 1　设 $y=f(x)$在 x_0 的一个去心邻域$(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为函数$f(x)$在 $x\to x_0$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或$f(x)\to a$(当 $x\to x_0$).直观地说,即当 x 无限趋近x_0 时,函数 $f(x)$无限趋近常数 a.

定义 2　设 $f(x)$在区域$|x|>E>0$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当$|x|>M\geqslant E$ 时,不等式
$$|f(x)-a|<\varepsilon$$
恒成立,则称 a 为当$x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限,记作
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a.$$
直观地说,即当$|x|$无限增大时,函数无限趋近常数 a.

(2) 左极限与右极限　在定义 1 中,若把"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0-\delta<x<x_0$",即自变量 x 从x_0 的左侧趋近于 x_0,则称 a 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作
$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a \quad 或 \quad f(x_0-0)=a;$$
相应把定义 1 中的"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0<x<x_0+\delta$",a 便是函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作
$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a \quad 或 \quad f(x_0+0)=a.$$

极限存在的充分必要条件:当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限存在的充分必要条件为左、右极限存在并相等,即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

在定义 2 中,把$|x|>M$ 改为$x>M$,便得到 $x\to+\infty$时函数 $f(x)$的极限的定义,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$,以及把"$|x|>M$"改为 $x<-M$,便得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义.

注　把数列$\{x_n\}$看作整标函数即$x_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则数列极限的概念$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 便是$f(x)$在 $x\to+\infty$的极限的特殊情况:自变量 x 取正整数,即对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的极限,也称此数列收敛于 a.

2. 性质

1° 唯一性　在自变量的一个变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$),若函数的极限存在,则此极限唯一.

2° 有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$[或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$],则存在 x_0 的某去心邻域(或$|x|>M>0$), $f(x)$在此邻域(或$|x|>M>0$)内有界.

3° 保序性　设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=b$,若 $a<b$,则存在 x_0 的某去心邻域(或$|x|>M>0$),在此邻域(或$|x|>M>0$),恒有 $f(x)<g(x)$;若在 x_0 的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内恒有 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $a\leqslant b$.

3. 极限存在准则

夹逼准则:若在 x_0 的某去心邻域(或 $|x|>M>0$)内,恒有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=a$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=a$.

单调有界准则:单调有界数列必收敛.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的四则运算

设在自变量的同一个变化过程中 ($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$), $\lim f(x)=a$, $\lim g(x)=b$,则有

(1) 和差:$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$.

(2) 积:$\lim[f(x)g(x)]=[\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]=a\cdot b$,特别地 $\lim cf(x)=c\lim f(x)=ca$ (其中 c 为常数), $\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k=a^k$(其中 k 为常数).

(3) 商:若 $\lim g(x)=b\neq 0$,则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

6. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$,称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小,即极限为 0 的变量为无穷小. 常数 0 也是无穷小.

(2) 无穷小性质　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=a$ 的充分必要条件为 $f(x)=a\pm\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 的无穷小.

(3) 无穷小的运算

1° 加法:有限多个无穷小的和仍为无穷小;

2° 乘法:有限多个无穷小的积仍为无穷小;

3° 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小.

(4) 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小,且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也是在此变化过程中的极限:

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$(其中 c 为常数),称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小;

特别,若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

在求极限过程中,有时利用等价无穷小可以化简计算,所以应掌握几个常见的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim x\sim\tan x,$$

$$\ln(1+x)\sim x$$

$$\mathrm{e}^x-1\sim x,$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ 等等.}$$

(5) 无穷大的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，称 $f(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大，即绝对值无限增大的变量为无穷大.

(6) 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

(三) 连续

1. 函数的连续性

(1) 连续性的概念　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，对应的函数值增量 $\Delta y=f(x_0+x)-f(x_0)\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一处都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，也称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又在 a 点处右连续，b 点处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(2) 运算

1° 加法　有限多个在同一点处连续的函数之和，仍在该点处连续.

2° 乘法　有限多个在同一点处连续的函数之积，仍在该点处连续.

3° 除法　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，且 $g(x_0)\neq 0$，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(3) 复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2. 间断点的类型

(1) 间断点概念　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 因此，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义；或 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，此时 x_0 便为函数 $y=f(x)$ 的一个间断点.

(2) 间断点类型　设 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，其他均称为第二类间断点.

在第一类间断点中，左、右极限相等的称为可去间断点，不相等的称为跳跃间断点；无穷间断点与振荡间断点都是第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

1° 最大值和最小值定理　闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

2° 有界性定理　闭区间上的连续函数在该闭区间上一定有界.

3° 介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数 C，必在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=C$.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

4° 零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

·典 型 例 题·

[填空题]

例 1.1 设 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为__________.

答 应填 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

分析 求出 $\varphi(x)$ 的表达式后，其定义域就不难求了. 本题还涉及函数记号的运算，故也是一个小综合题.

解 因 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，故

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

从而要求

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$

即

$$0\leqslant x^2\leqslant 2,$$

解之得

$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

例 1.2 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

则 $g[f(x)]=$__________.

答 应填

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

解 事实上，

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 1.3 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$__________.

答 应填 $\frac{1}{2}$.

分析 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 及其变形.

解

$$\lim_{x\to 0}x\cot 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}.$$

例 1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{n-1}=$__________.

答 应填 e^3.

分析 利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 及其变形.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}\cdot(-2)}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1}}$$

$$=e/e^{-2}=e^3.$$

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{3}\cdot 3}\left(1+\dfrac{3}{n-2}\right)=e^{3}$.

例 1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2+2n}=$ ________.

答 应填 0.

分析 利用等价无穷小代替：$\sin\dfrac{1}{n^2+2n}\sim\dfrac{1}{n^2+2n}(n\to\infty)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{1}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{n^2+2n}=0$.

例 1.6 $\underset{x\to1}{\ln}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=$ ________.

答 应填$\dfrac{1}{2}$.

分析 通分后用洛必达法则求解.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.7 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

答 应填$\dfrac{1}{2}\ln a$.

解 因为 $\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\ln[a\cdot a^2\cdots a^n]=\dfrac{n(n+1)}{2}\ln a$,

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a.$$

例 1.8 已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

答 应填 $-\dfrac{3}{2}$.

分析 由等价无穷小的概念来确定 a.

解 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$,

由洛必达法则，

$$1=\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ax}{-\sin x}=-\frac{2}{3}a.$$

故 $a=-\dfrac{3}{2}$.

例 1.9 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

答 应填 $e^{-\frac{1}{2}}$.

分析 函数在一点处连续，必然在该点处的极限存在.有的题要分别求左、右极限，而本题只需求 $f(x)$ 在 $x\to0$ 时的极限.由于函数在 $x=0$ 处连续，因此 a 的值应等于此极限值.

解 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.10 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的第二类间断点为 $x=$ __________.

答 应填 -1.

分析 根据间断点分类的定义,若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在,则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.故只需逐个讨论各间断点处的左、右极限.

解 本题的函数 $f(x)$ 共有 3 个间断点:$x=-1,0,1$.对 $x=1$,因为

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

对 $x=0$,有 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-1,$$

和

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1.$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限都存在但不相等,故 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的第一类间断点.

对 $x=-1$,因为 $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=\infty$,

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

[选择题]

例 1.11 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$,$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$,$k=1,2,\cdots$,则当 $n>1$ 时,$f_n(x)$ 等于

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$.　　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$.

(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.　　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$.

答 应选(C).

分析 先直接计算 $f_2(x)$,再用数学归纳法得到一般表示式.

解 因 $f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}(k\geqslant 1)$,则

$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant 1$,$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,故选(C).

例 1.12 设 $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 上,$f(x)$ 为

(A) 有界函数.　　(B) 单调函数.

(C) 周期函数.　　　　　　　(D) 偶函数.

答　应选(D).

解　因为 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)\cdot e^{\cos(-x)}=x\sin x\cdot e^{\cos x}=f(x)$.

所以 $f(x)$是偶函数,故选(D).

同时,我们指出,由于 x 是无界的非周期函数,所以(A)、(C) 均错;而 $\sin x,\cos x$ 都是周期函数,所以(B) 错.

例 1.13　设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t,g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小.　　　　　(B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　　　　(D) 低阶无穷小.

答　应选(B).

分析　由无穷小比较的概念,只需计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,便可得到结论.

解　因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}$$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代替}}}\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2+4x^3}$$

$$\underline{\underline{\text{重要极限}}}\ \frac{1}{3}.$$

因此 $f(x)$与 $g(x)$是同阶但非等价无穷小.故选(B).

例 1.14　设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$是比 $x\sin(x^n)$高阶的无穷小,而 $x\sin(x^n)$是比$(e^{x\tan^2x}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

答　应选(C).

分析　利用无穷小的比较解此题.在比较的过程中,把每个无穷小都用其等价的无穷小代替便可得到正确的结论.

解　因为当 $x\to0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^3)\sim\dfrac{x^2}{2}\cdot x^3=\dfrac{x^5}{2}$,

$$x\sin(x^n)\sim x^{n+1},$$

$$e^{x\tan^2x}-1\sim x\tan^2x\sim x^3$$

因而正整数 $n+1=4$,即 $n=3$.故选(C).

例 1.15　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.

(D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

答　应选(D).

分析　这种类型的题,比较适宜于用举反例的方法排除不正确的结论.会举反例是考生应该掌握的方法,是加深对概念和理论理解的手段.

解　若取 $x_n=n,y_n\equiv0$,便否定了(A);

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n,y_n=n+(-1)^nn$,便否定了(B);

若取 $x_n\equiv0$,则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小,这也否定了(C).

于是剩下(D)是正确的.事实上,当$\frac{1}{x_n}(n\to\infty)$为无穷小时,$y_n=(x_ny_n)\cdot\frac{1}{x_n}$为无穷小$(x_ny_n)$与无穷小$\frac{1}{x_n}$的乘积,从而必为无穷小,故选(D).

例 1.16 设函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导,则

(A) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时,必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时,必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$时,必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时,必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

答 应选(B).

分析 仍用举反例来排除错误的结论.

解 (C)、(D)容易排除:设$y=\sin x$,则它满足题设条件,且$\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0$但$\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$,故(C)、(D)均错.又设$y=\frac{1}{x}\sin(x^2)$,它在$(0,+\infty)$内有界可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x^2)=0$;当$x>0$时,$y'=-\frac{\sin(x^2)}{x^2}+2\cos(x^2)$,由于当$x\to+\infty$时$y'$不存在,所以(A)错.故只有(B)正确.事实上,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在但不等于0,则$f(x)$必无界(请读者思考).

例 1.17 把$x\to0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ. (B) α,γ,β. (C) β,α,γ. (D) β,γ,α.

答 应选(B).

分析 本题考查无穷小的比较,分别求$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}$,$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}$等即可.

解 因为$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\tan x}=\infty$,

所以,α是比β低阶的无穷小;又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

即β是比γ高阶的无穷小;而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=\infty,$$

即α是比γ低阶的无穷小.因而正确的排列次序是α,γ,β.

注 分别求出α,β,γ的导数,对仍是无穷小的变量用其等价无穷小代替,再进行比较便可得出结论:当$x\to0^+$时,

$$\alpha'=\cos x^2\to1,$$
$$\beta'=2x\tan x\sim2x^2,$$
$$\gamma'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}\sim\frac{x}{2},$$

由此可知,正确的排列次序是α,γ,β.

例 1.18 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$等于

(A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞.

答 应选(C).

分析　一个解法是在已知的极限中凑出欲求极限的形式：$\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \dfrac{6+f(x)}{x^2} + \dfrac{\sin 6x - 6x}{x^3}$，问题就化为计算第2项的极限了. 另一个解法是将 $\sin 6x$ 展成带皮亚诺余项的3阶泰勒公式

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3)$$

代入运算. 显然第二种解法要方便一些. 利用展成泰勒多项式求极限是一种重要的求极限的方法.

解法1　由上述分析得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2} + \frac{\sin 6x - 6x}{x^3}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x - 6}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2} - 36\right] = 0.\end{aligned}$$

故选(C).

解法2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2} - 36\right] = 0.\end{aligned}$$

亦为(C)正确.

注　本题选(A)的大有人在：

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left[\dfrac{\sin 6x}{x} + f(x)\right]}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 6x}{x} + f(x)}{x^2} = 0.$

再把 $\dfrac{\sin 6x}{x}$ 用6代替，便得此极限为0. 错就错在用6代替 $\dfrac{\sin 6x}{x}$.

此外，不看 $f(x)$ 是否满足条件就用洛比达法则去求也是错误的！

例 1.19　"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非必要条件又非充分条件.

答　应填(C).

分析　将题目中所述与数列极限的定义加以对照，不难看出它首先是必要条件，即由数列极限的定义："对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $N_1 > 0$，使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$"可以推出题中所述的. 这就否定了选项(A)与(D). 但它还是一个充分条件. 这就要求考生对数列 x_n 收敛于 a 的定义有深入的理解.

解　下面来推导它也是充分条件.

对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，取 $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\varepsilon_1}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$，这时 $\varepsilon \in (0,1)$，由已知，对于此 ε 存在 $N > 0$，使得当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$，现取 $N_1 = N - 1$，于是有当 $n \geqslant N > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant \dfrac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$. 这证明了数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 总之(C)是正确的.

例 1.20　$x = \dfrac{1}{n}(n = 2,3,\cdots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]$ 的（$[\cdot]$ 为取整函数）

(A) 无穷间断点.　　(B) 跳跃间断点.

(C) 可去间断点.　　(D) 连续点.

答 应选(B).

分析 分别考查函数 $f(x)$在 $x=\frac{1}{n}$处的左、右极限.

解 当 $x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-$ 时,$n+1>\frac{1}{x}>n$,故$\left[\frac{1}{x}\right]=n$,

即

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1;$$

当 $x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+$ 时,$n-1<\frac{1}{x}<n$,故$\left[\frac{1}{x}\right]=n-1$,

即

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{n-1}{n}<1,$$

由此可知 $x=\frac{1}{n}(n=2,3,\cdots)$是 $f(x)$的跳跃间断点,故选(B).

例 1.21 设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足

(A) $a<0,b<0$.　　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

答 应选(D).

分析 由函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 两个条件分别确定系数 a 与 b 的符号.

解 因为函数 $f(x)$在整个数轴上连续,故 $a+e^{bx}>0$,而 $e^{bx}>0$,所以 $a\geqslant 0$;

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{a+e^{bx}}=0$,故需当 $x\to-\infty$时,$e^{bx}\to+\infty$,即 $b<0$. 故选(D).

例 1.22 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有

(A) 1 条.　　(B) 2 条.　　(C) 3 条.　　(D) 4 条.

答 应选(B)

分析 由渐近线的定义:若 $\lim\limits_{x\to x_0}y=\infty$,则 $x=x_0$ 为曲线的一条铅直渐近线;若 $\lim\limits_{x\to\infty}y=c$(常数),则 $y=c$ 为曲线的一条水平渐近线,不难看出此曲线至少有两条渐近线.问题是它还有没有其他的渐近线.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty.$$

所以 $x=0$ 是该曲线的一条铅直渐近线.

又因为

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

所以 $y=\frac{\pi}{4}$为该曲线的一条水平渐近线.

由于

$$\lim_{x\to 1^-}y=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{\pi}{2}e,$$

$$\lim_{x\to 1^+}y=\frac{\pi}{2}e,$$

所以 $x=1$ 是函数的一个第一类间断点；类似，$x=-2$ 也是函数的第一类间断点．由此可知该曲线只有上述两条渐近线．故选(B)．

例 1.23 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立． (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立．

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在． (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在．

答 应选(D)．

分析 用举反例的方法排除错误结论．

解 设 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，它们满足题目的条件，但 $1=a_2>b_2=\dfrac{1}{2}$，故选项(A)错；若取 $b_n=\dfrac{n+1}{n}$，$c_n=\ln n$，便否定了选项(B)；若取 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$c_n=n$ 也否定了选项(C)．故只有选项(D)正确．

事实上，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，所以当 n 充分大时必有 $b_n>0$，且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=1$．若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在，设为 A，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}c_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot b_nc_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}b_nc_n=A,\end{aligned}$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在．

注 选项(A)、(B)被否定，在于“对任意 n 成立”这个条件．事实上，由于这三个数列都是非负的，所以由极限的“保号性”，当 n 充分大后，必有 $a_n<b_n$．而当 n 充分大后 $b_n<c_n$ 也是成立的．换言之，若把选项(A)、(B)中的“对任意 n 成立”改成“对充分大的 n 成立”，则此题就不是单选题了．

[计算题]

例 1.24 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$的定义域．

分析 由取极限定义的函数，其定义域便是使极限存在的那些 x．

解 1° 当 $x\leqslant-1$ 且 n 为奇数时，$e^x+x^n<0$，故 $f(x)$无定义；

2° 当 $-1<x\leqslant1$ 时，则对充分大的 n，$0<e^x+x^n\leqslant e^x+1$，故 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}=0$，即 $f(x)$在区间$(-1,1]$有定义；

3° 当 $x>1$ 时，$\ln(e^x+x^n)>n\ln x$，因而 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$不存在，即 $f(x)$也无定义．

综上讨论，函数 $f(x)$的定义域为$(-1,1]$．

例 1.25 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1^x+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$．

分析 本题解法甚多，这里介绍两个：一是把原题化为可用洛必达法则的形式；二是利用夹逼原理．

解法 1

$$\lim_{x\to+\infty}(1^x+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(1^x+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1^x+2^x+3^x)}{x}},$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1^x+2^x+3^x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1^x+2^x+3^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln3+\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\ln3.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}(1^x+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln3}=3.$$