线性代数

学习指导与习题精解

杨　刚　吴惠彬　魏　丰
闫桂峰　孙华飞　史富贵
杨骅飞　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数学习指导与习题精解

杨　刚　吴惠彬　魏　丰　闫桂峰
孙华飞　史富贵　杨骅飞　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题精解/杨刚等编．—北京:北京理工大学出版社,2004.6

ISBN 7-5640-0256-5

Ⅰ．线… Ⅱ．杨… Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 023057 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张 / 13.375
字　　数 / 342 千字
版　　次 / 2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～6000 册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 19.00 元　　责任印制 / 刘京凤

前　言

线性代数是大学数学的一个重要组成部分，相对于微积分而言，许多初学者都会感到似乎线性代数更加难学。究其原因主要有两点，一是线性代数的研究对象和处理方法同中学阶段的内容大多没有明显的联系，因而不能像微积分那样有自然的延续性，而且线性代数中许多概念的产生不像微积分那样直观；二是线性代数的结构框架有一定的可变性，各部分内容有一定的独立性。已公开出版发行的许多线性代数教材在结构上不完全相同，而微积分教材则结构相对固定，这给读者在参阅不同教材时带来一定的困难，当然对善于思考的人来讲，这未必是件坏事。

为了帮助初学者理顺思路、抓住重点，系统地掌握线性代数的主要内容，我们编写了这本线性代数学习指导。书中不仅有各部分内容的重点难点分析，而且整理出了主要概念和结论。同时，各部分内容都列举了一些典型例题，并配有自测练习题，因此可帮助初学者同步检查学习效果。书中主要篇幅用于列举了近300道习题并都给出了详细解答，这些练习题难度深浅各异，理论计算均有，覆盖内容全面，有很好的参考价值。

本书既可作为北京理工大学出版社出版的《线性代数》（杨刚等编）的配套教材，也可独立地作为线性代数课的辅导用书。

本书的出版得到了北京理工大学教材科和北京理工大学出版社的大力支持，在此作者表示衷心的感谢。由于作者水平有限，错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004年1月

目　　录

第一章 矩 阵

一、重点难点分析

矩阵是线性代数中一个最基本也是最重要的概念，真正理解并熟练掌握它，对学好线性代数是至关重要的。

学习本章内容应以如下两个方面为重点，一是矩阵的运算，二是矩阵的性质。

首先，必须熟练掌握矩阵的基本运算，包括加法、减法、数量乘法、乘法、幂、转置等；熟练掌握用初等行变换化矩阵为阶梯形矩阵的方法，并能利用其求矩阵的秩；熟练掌握求可逆矩阵的逆矩阵的方法；熟练掌握利用 Gauss 消元法对线性方程组的解进行判别并求解；会用矩阵分块的方法对矩阵进行讨论。

其次，必须充分理解矩阵的基本概念，掌握它们的基本性质，包括方阵、单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵等；理解矩阵的秩与初等变换的关系；了解初等变换与初等矩阵的关系；理解矩阵的相抵关系；理解可逆矩阵的概念，掌握相关结论；能利用已有的命题和定理推证一些简单的结论。

本章难点一是利用矩阵分块实现矩阵的计算，并推证矩阵的某些性质；二是理解与掌握矩阵的秩与初等变换、矩阵运算以及可逆性之间的关系。

二、知识总结

矩阵的相关概念

(1) $m\times n$ 矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 m 行 n 列的矩形数阵，记为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad [a_{ij}]_{m\times n}$$

其中,a_{ij}位于矩阵的第 i 行第 j 列,称为(i,j)-元。

(2) **n** 阶方阵:$n\times n$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为主对角元。

(3) 单位矩阵:主对角元全为 1、其他元素全为零的方阵,记为 $\boldsymbol{I}$。

(4) 零矩阵:元素全为零的矩阵,记为 $\mathbf{0}$。

(5) 负矩阵:$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$的负矩阵$-\boldsymbol{A}=[-a_{ij}]_{m\times n}$。

(6) 同型矩阵:$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{p\times q},m=p$ 且 $n=q$。

(7) 阶梯形矩阵:同时满足下述条件的矩阵。

① 零行(元素全为零的行)在所有非零行(含非零元的行)的下面;

② 随着行标的增大,每个非零行的首非零元(行中列标最小的非零元)的列标严格增大。

首非零元也称为主元。

主元全为 1 且主元所在列的其他元素全为零的阶梯形矩阵称为行简化阶梯形矩阵。

(8) 三角矩阵:上三角矩阵与下三角矩阵的总称。

上三角矩阵　$[a_{ij}]_{n\times n},a_{ij}=0,i>j,\forall\ i,j$

下三角矩阵　$[a_{ij}]_{n\times n},a_{ij}=0,i<j,\forall\ i,j$

(9) 对角矩阵:$[a_{ij}]_{n\times n},a_{ij}=0,i\neq j,\forall\ i,j$

(10) 数量矩阵:主对角元相同的对角矩阵。

矩阵的基本运算

(1) 定义：

加法：$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

数量乘法：$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$k$ 为数，$k\boldsymbol{A}=[ka_{ij}]_{m\times n}$

减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

乘法：$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{p\times n}$，$\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$

幂：$\boldsymbol{A}$ 为方阵，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$

转置：$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(2) 运算律：

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，　$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$，　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

② $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，　$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

③ $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，　$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$

④ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

定义 1　对矩阵行(列)的下述处理称为矩阵的初等行(列)变换。

(1) 互换两行(列)的位置；

(2) 用一个非零常数乘一行(列)的全部元素；

(3) 一行(列)的倍数加到另一行(列)上。

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换。

定义 2 单位矩阵用一次初等变换化成的矩阵称为初等矩阵。

定理 1 对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换，等同于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上一个对应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换，等同于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上一个对应的 n 阶初等矩阵。

定义 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

定理 2

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(3) 若同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 k 非零，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$。

定义 4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化成的阶梯形矩阵中，主元的个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为秩$(\boldsymbol{A})$或 $r(\boldsymbol{A})$。

秩等于阶数的方阵称为满秩矩阵。

定理 3 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 满秩。

定理 4 可逆矩阵只用初等行变换即可化为单位矩阵。

定理 5 可逆矩阵可表示成若干个初等矩阵的乘积。

结论 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则在初等行变换下，矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{I}_n]$ 的行简化阶梯形必为 $[\boldsymbol{I}_n\quad \boldsymbol{A}^{-1}]$。

定义 5 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 可通过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$。

定理 6 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵，则有

(1) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$。

(2) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$。

定理 7 设矩阵 A 的秩为 r,则 A 相抵于矩阵

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

称之为 A 的相抵标准形。

定理 8 若齐次线性方程组中方程的个数少于未知数的个数,则其必有非零解。

定理 9 设 A 是 n 阶方阵,则齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是 A 不可逆。

三、典型例题

例 1 已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $AB-BA$,$(AB)^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$。

解

$$AB-BA=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&0\\-4&-2&-2\\-4&4&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&-4&-4\\2&-2&4\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

上面两个例子说明，在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。因此，在矩阵运算中特别应注意乘法的不可交换性。

例 2 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}$$

求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有 2 阶方阵。

解 若 2 阶方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，则称 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换。

设 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$$

则由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}$$

此即

$$\begin{bmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\-x_1-x_3&-x_2-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2&2x_1-x_2\\x_3-x_4&2x_3-x_4\end{bmatrix}$$

因等号两端矩阵的对应元素相等，故得下述齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_2+2x_3=0\\2x_1-2x_2-2x_4=0\\x_1+2x_3-x_4=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$$

解之得 $x_1=-2x_3+x_4$，$x_2=-2x_3$。

于是

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-2x_3+x_4&-2x_3\\x_3&x_4\end{bmatrix}$$

其中 x_3,x_4 是任意数。

此类问题的求解通常都是把所求矩阵设为一般形式，代入已知条件后利用方程组来讨论。此外，所求矩阵通常都不是惟一的，所以其元素可能包含任意常数。

例 3 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$ 满足 $A^2-4A+3I=0$，求 A^3,A^4,A^5。

解 由 $A^2-4A+3I=0$ 得 $A^2=4A-3I$，于是

$$\begin{aligned}A^3 &=A(4A-3I)=4A^2-3A\\&=4(4A-3I)-3A=13A-12I\\&=13\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}-12\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 26\\0 & 27\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^4 &=A(13A-12I)=13A^2-12A\\&=13(4A-3I)-12A=40A-39I\\&=40\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}-39\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 80\\0 & 81\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^5 &=A(40A-39I)=40A^2-39A\\&=40(4A-3I)-39A=121A-120I\\&=121\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}-120\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 242\\0 & 243\end{bmatrix}\end{aligned}$$

反复利用上述方法，可求出 A 的任一次幂。求方阵的幂，还有其他几种常用方法：试乘法，即先计算方阵的二次幂、三次幂、甚至四次幂，找出规律后再用归纳法证明；展开法，即当所给矩阵是若干矩阵的乘积时，可通过展开连乘使中间许多矩阵的乘积被消去

或提出，从而达到化简的目的；二项式公式法，即把所给矩阵分解为两个可交换矩阵的和，再利用矩阵二项式定理计算。

例 4 讨论常数 a_1,a_2,a_3,a_4 的取值与下列线性方程组解的存在性之间的关系

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -a_1 \\ x_2+x_3 = a_2 \\ x_3+x_4 = -a_3 \\ x_1+x_4 = a_4 \end{cases}$$

解

用初等行变换把增广矩阵化为阶梯形

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4+(-1)R_3]{\substack{R_4+R_2 \\ R_4+(-1)R_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -a_1 \\ x_2+x_3 = a_2 \\ x_3+x_4 = -a_3 \\ 0 = a_1+a_2+a_3+a_4 \end{cases}$$

当 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ 时，上述方程组无矛盾方程，因而有解，并且有无穷多个解。否则，上述方程组无解。

对带参数的线性方程组讨论时，也是利用 Gauss 消元法。但有一点必须注意，即在消元过程中，不能使参数出现在分母中。例如，下述初等行变换是不正确的

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+\left(-\frac{4}{a}\right)R_1} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1-\dfrac{4}{a} & 1-\dfrac{4}{a} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\lambda-1}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 5 讨论 a,b 的取值与下列线性方程组的解之间的关系，且在有解时求解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3 \\ -3ax_2 + (a+2b)x_3 = -3 \end{cases}$$

解 把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -(b+2) & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+(-2)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ ax_2 - bx_3 = 1 \\ (a-b)x_3 = 0 \end{cases}$$

情况 1：当 $a-b\neq 0$ 且 $a\neq 0$ 时，上述方程组无矛盾方程且方程个数与未知数个数相等，故方程组有惟一解，其解为

$$x_1 = 1 - \frac{1}{a},\ x_2 = \frac{1}{a},\ x_3 = 0$$

情况 2：当 $a-b=0$ 且 $a\neq 0$ 时，上述方程组无矛盾方程且方程个数小于未知数个数，故方程组有无穷多个解，其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{1}{a} + \left(1 - \dfrac{b}{a}\right)x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{a}x_3 \end{cases} \quad (x_3\text{ 是自由未知数})$$

情况 3：当 $a=0$，b 取任意值时，上述方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\quad - bx_3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

因其有矛盾方程，故方程组无解。

例 6 求下列方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

解 把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + (-2)R_1]{R_2 + (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + (-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

确定自由未知数

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 - x_4 \\ \quad\ \ 2x_2 = 2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

由此得一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \quad -\dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 是自由未知数})$$

对有无穷多个解的线性方程组而言，其对应的阶梯形方程组一定是方程少而未知数多，此时需确定自由未知数。自由未知数的个数等于未知数个数与阶梯形方程组中方程个数的差，通常人们取阶梯形方程组中各方程系数不为零的第一个未知数为非自由未知数，则剩余未知数即为自由未知数，就像例 6 中所做的一样。

当然，自由未知数的选取不是惟一的。在例 6 中，也可取 x_2、x_3 或 x_2、x_4 或 x_1、x_3 或 x_1、x_4 为自由未知数，但 x_1、x_2 不能同时作为自由未知数，因为由 x_3、x_4 构成的方程组

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 = 2 - 2x_2 \end{cases}$$

对 x_1、x_2 的某些取值无解，而其他的自由未知数总使由阶梯形方程组中由非自由未知数构成的方程组有惟一解。这一点正是自由未知数选取的原则所在。

例 7　设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元全为零

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad (k > 0, l > 0)$$

指出 $\boldsymbol{A}$ 中元素满足什么条件时，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB}$ 为可逆矩阵，这里 $\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位矩阵。

解　根据已知条件，可设