中学数学解题方法

复数法

谢晋超

四川教育出版社

中学数学解题方法

复 数 法

谢 晋 超

四 川 教 育 出 版 社

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　　复数法

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　峨影印刷厂印刷
开本787×960毫米1/32　印张　3.25　字数47千
1989年11月第一版1991年8月第二次印刷
印数：　5201—12200册

ISBN7—5408—1106—4/G·1076定价：0.97元

前　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的"钥匙"。

这套丛书将系统介绍中学数学基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以方法为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1. 以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种

方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2.方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3.例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

1988.10.

目 录

虚 数 不 虚

虚数的概念是从人类实践中产生和发展起来的。

虚数的引入才使数系从实数系扩大到复数系。

虚数的概念隐伏在负数开平方的运算中。由于数的开平方运算人们早就接触到了，所以人们与虚数的接触可以追溯到较早的时代。

第一个正视虚数的是意大利数学家卡尔丹(Cardano)。有一次卡尔丹在讨论"怎样将10分成两部分，使两者的乘积是40"时发现：如果把10分成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，那么不管这两个数学式子代表的数是什么，结果却是对的。这类情况也发生在用他的求根公式解三次方程中。这种由负数开平方所产生的新数，与实数按相同的方法进行运算，并没有发生什么矛盾，而且这种运算会产生与实数运算类似的结果，因此，可以利用它来解决实际问题。但是由于不能用它来表示长度、面积、时间等类的量，因而人们称它为"虚的"、"想象的"数。在相当长的时期内，虚数被人们看作是神秘的、虚幻而不存在的数。人们还把实数和虚数都

称为复数.

在整个18世纪中，复数的卓有成效的应用，使得数学家们对它刮目相见.

首先，由于一个积分问题引出了复数的应用，并且涉及到复数的对数.

1722年法国数学家棣莫佛（Abraham de Moiver）又给出棣莫佛定理：

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx \quad (n\in N).$$

1748年瑞士籍的彼得堡科学院院士欧拉（Euler）发现了后来著名的关系式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

随着复变函数理论的建立，特别是在流体力学中的有效应用，更极大地充实了人们对复数的认识。虽然当时人们对这一切还感到不那么自然，但事实是：不管什么地方，只要在数学推理中用到了复数，结果都被证明是正确的. 这不能不在数学家的头脑中产生有力的影响.

1799年德国数学家高斯（Gauss）对代数基本定理的证明，是复数地位得到彻底巩固的条件. 因为证明必须依赖于对复数的承认，而高斯在证明中又巧妙地给出了复数的直观表示，这更使人们深信

复数与实数一样具有数的特点——可与几何点建立联系．从而消除了人们对虚数的疑虑，承认“虚数不虚”．

复数的研究发展至今，不仅在高等数学中有广泛的应用，就是在初等数学的范围内，也到处可见它大显身手．我们看一个简单定理的证明．

定理 如果两个数中，每一个都是两个整数的平方和，则它们的积仍是两个整数的平方和．

证明：设$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，a，b，c，d都是整数．

$$\because\quad m=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi),$$

$$n=c^2+d^2=(c+di)(c-di),$$

于是

$$\begin{aligned} mn &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \\ &= [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] \\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i] \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2. \end{aligned}$$

因为a，b，c，d是整数，所以$ac-bd$，$ad+bc$也是整数．这个定理就证明了．

这个问题看来与复数毫不相干，但运用复数却

收到了意想不到的效果。

通过复数发展的历史可以帮助我们认识到：只有在运用复数的过程中才能更深刻地理解复数理论；反过来，也才会更好地运用复数理论去解决有关问题。希望通过这本小册子，帮助读者掌握用复数解有关初等数学问题的一些方法，对“虚数不虚”有更实在的结会。

·临阵磨刀·

我们先把中学学过的复数知识作一个简要的复习和必要的扩充，为运用复数解题作好准备. 凡是在中学教材中已出现过的内容，一般不再作详细的说明.

形如$z=a+bi$（a，$b\in R$，i适合$i^2=-1$）的数叫做复数，而把复数$\overline{z}=a-bi$叫做复数z的共轭复数. 显然有：

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2}\ ,\qquad b=\frac{z-\overline{z}}{2i},$$

它们分别叫做z的实部和虚部，分别记为$\mathrm{Re}(z)$和$\mathrm{I_m}(z)$。

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时，这两个复数相等.

容易知道：$z=\overline{z}$是z为实数的充要条件；若$z\neq0$，则$z=-\overline{z}$是z为纯虚数的充要条件.

在一个平面直角坐标系中，用点$(\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{I_m}(z))$表示复数$z$；反过来，给出平面上的一点（$a$，$b$），我们使之与复数$a+bi$对应（如图1）. 这样，全体复

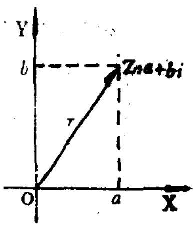

图1

数与平面上所有点之间就建立了一一对应，这种平面就叫做复平面。通常，我们用小写字母z表示复数，而用相应的大写字母Z表示z所对应的点 有时我们简单地把复数z直接称为点Z.

从原点O起，到点Z为止的有向线段$\overrightarrow{OZ}$，是一个向量，它是点Z的定位向量. 可以用它来表示复数$z=a+bi$，我们也常把复数$z=a+bi$说成向量$\overrightarrow{OZ}$。

向量$\overrightarrow{OZ}$的模（即有向线段$\overrightarrow{OZ}$的长度）r叫做复数$z=a+bi$的模（或绝对值），记为$|z|$或$|a+bi|$. 显然有：

（1） $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

（2） $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$.

以x轴的正半轴为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在的射线为终边的角θ，叫做复数$z=a+bi$的幅角. 非零复数的幅角有无限多个值，这些值相差2π的整数倍；复数0的幅角是任意的. 适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角θ的值，叫做幅角的主值，记为$\arg Z$.

显然，两个非零复数相等的充要条件是它们的模与幅角的主值分别相等.

样，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，称它为复数$z$的三角形式.

关于共轭复数有下列运算性质：

（1） $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

（2） $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

（3） $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

（4） $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ （$z_2\neq0$）.

（5） $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ （其中 $z=0$，$n\in N$；$z\neq0$，$n\in Z$）.

性质（1）和（3）可以推广到加数或乘数是任意n个自然数的情形，即

$\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}$；

$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\cdots\cdot\overline{z_n}$. （$n\in N$）

对于复数的模也有下列的运算性质：

（1） $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

（2） $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$（$z_2\neq0$）.

（3） $|z^n|=|z|^n$ （其中$z=0$，$n\in N$；

$z\neq 0$, $n\in Z$）.

（4）z的几次方根的模等于$\sqrt[n]{|z|}$，即z的n次方根的模等于z的模的n次算术根.

性质（1）还可以推广到乘数是任意自然数n的情形.

复数的向量表示是运用复数解题的重要依据. 下面我们对复数运算的几何意义,作一些较为细致的分析.

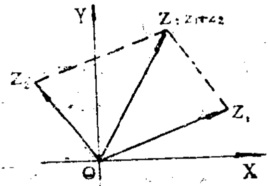

图 2

由复数加法的定义可知，表示复数z_1+z_2的点Z的定位向量$\overrightarrow{OZ}$，正好是以点Z_1、Z_2的定位向量$\overrightarrow{OZ_1}$和$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边作成的平行四边形的对角线向量（如图2）. 这就是说,复数的加法规则与平面向量加法的平行四边形法则是一致的. 也就是说，复数的加法运算就是平面向量的加法运算.

对照图2，关于复数的绝对值不等式

$$\left||z_1|-|z_2|\right|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \quad ①$$

就有了明确的几何意义，它表明：三角形的两边之

和不会小于第三边，而两边之差的绝对值不会大于第三边．为此我们也称不等式①为三角形不等式．

这个不等式还可以推广：

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|\quad(n\in N)$$

因为$z_2-z_1=z_2+(-z_1)$，由图3可见，z_2-z_1的定位向量$\overrightarrow{OZ}$与向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$有相同的方向和长度，它们是相等的向量（从自由向量的观点来看），这就是说，两个复数的差z_2-z_1（即$\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}$）与连结两个向量终点并指向被减数的向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$对应．这就是复数减法的几何意义。

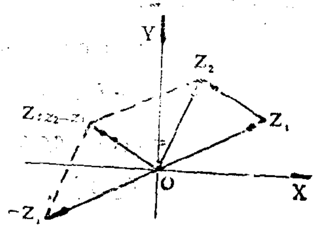

图 3

由于复平面上两点Z_1与Z_2之间的距离就是向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$的长度，所以我们可以得到应用非常广泛的计算复平面上两点间的距离公式：

$$|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=|z_2-z_1|.$$

如果把复数z_1，z_2分别写成三角形式：

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

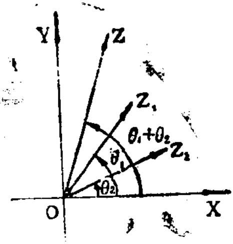

图4

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

就有

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 \\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 \\ &\quad + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+ \\ &\quad \theta_2)]. \end{aligned}$$

据此，我们可以得到两个复数相乘的几何意义：

把表示z_1的向量$\overrightarrow{OZ_1}$按逆时针方向旋转角θ_2（如果$\theta_2<0$，就要把$\overrightarrow{OZ_1}$按顺时针方向旋转角$|\theta_2|$），再把它的模变为原来的r_2倍，所得的向量$\overrightarrow{OZ}$，就表示积z_1z_2（如图4）.

由于在讨论平面几何问题时，所涉及的角通常都认为是大于0而小于π的，所以如果用$\arg z_1$与$\arg z_2$表示图形中的两个角，而$z=z_1z_2$，那么我

们有

$$\arg z=\arg z_1+\arg z_2.$$

在一般的向量代数中，表示一个向量绕定点的转动，并没有简易办法. 但当用复数表示平面向量的时候，向量的旋转可以很简便地用复数的乘法来实现，这是复数解几何题的一大优点.

类似地，若$z_2\neq 0$，依据

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

可以得到复数相除的几何意义.

当$\arg z_1>\arg z_2$时，等式

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

成立。它表示向量$\overrightarrow{OZ_2}$按反时针方向旋转到向量$\overrightarrow{OZ_1}$的角，可以用$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$来计算.

复数$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$