初中學生文庫

算術表解

編者　臧渭英

中華書局編印

算術表解

目錄

算術表解

第一　總則

(一)　定義

I. 數
- 意義…………計算事物多少的數目。
- 種類(算術上的)
  - 1. 整數…1的若干倍,沒有奇零的。
  - 2. 分數…由一數為分母，他數為分子所成。
  - 3. 小數…分數的一種,由10,100,…等數為分母所成。

II. 量………事物可以增減,測度或計算的。

III 單位……某種類的標準量。

[註]譬如說:這疋布長100尺,這疋布就是量,100就是數,尺就是單位。

IV.四法
- 加法……被加數+加數=和
- 減法……被減數－減數=差
- 乘法……被乘數×乘數=積
- 除法……被除數÷除數=商

(二)　定律

1. 加法　若干個數相加,和牠們的先後次序沒有關係,這叫做加法的交換定律。

I. 交換律

例如　$3+5+4=3+4+5=5+3+4$。

2. 減法　從一個數內減去若干個數，其差和減數先後的次序沒有關係，這叫做減法的交換定律。

例如　$24-8-3=24-3-8=13$。

3. 乘法　若干個數相乘，其積和牠們的先後次序沒有關係，這叫做乘法的交換定律。

例如　$2\times3\times5=2\times5\times3=3\times2\times5$。

4. 除法　某數被若干個數除，其商和除數的先後次序沒有關係，這叫作除法的交換定律。

例如　$72\div2\div3=72\div3\div2=12$。

II. 結合律

1. 加法　若干個數相加，隨便把那幾個數先加，再加上其他的數，所得的結果是一樣的，這叫做加法的結合定律。

例如　$6+4+3=6+(4+3)=13$。

2. 減法　從一個數順次減去若干個數，其差等於從此數內減去若干個數的和，這叫做減法的結合定律。

例如　$18-5-2-3=18-(5+2+3)=18-10=8$。

3. 乘法　若干個數相乘，隨便把其中那幾個數先乘，再乘其他的數，所得的結果是一樣的，這叫做乘法的結合定律。

例如　$3\times7\times9=3\times(7\times9)=189$

4. 除法　用若干個數順次除某數所得的商，等於用這若干個數的相乘積去除某數所得的商，這叫做除法的結合

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

定律．

例如 $150 \div 5 \div 2 = 150 \div (5\times 2) = 15$．

III·分配律

1. 乘法　兩個數的和或差的若干倍等於各數若干倍的和或差，這叫做乘法的分配定律．

例如 $(3\pm 2)\times 5 = 3\times 5 \pm 2\times 5 = 15\pm 10$．

2. 除法　以某數除兩數的和或差所得的商，等於用某數分別除這兩個數所得的商的和或差，這叫做除法的分配定律．

例如 $(18\pm 12)\div 3 = 18\div 3 \pm 12\div 3 = 6\pm 4$．

第二 整數性質

(一) 因數

I. 質數 因數 質因數

除了本數和1以外，不能用他數除盡的數，如2,3 5, 7……等，叫質數。幾個數相乘，各數都是乘積的因數；因數是質數的，叫質因數。

II. 質因數檢驗法

1. 特法

(1) 2,5 某數的末位數字是2或5的倍數，某數必含質因數2或5.

因十位及十位以上的數，都是2和5的倍數，故只須看末位數是否爲2, 5的倍數，就可決定全數是否爲2, 5的倍數.

(2) 4,25 某數的末二位數爲4或25的倍數，某數必含質因數4或25。

因百位及百位以上的數，都是4和25的倍數，故只須看末二位數是否爲4或25的倍數，就可決定全數是否爲4或25的倍數.

(3) 3,9 某數數字的和爲3或9的倍數，某數必含質因數3或因數9.

例如 $274=200+70+4$

$=2\times(99+1)+7\times(9+1)+4$

$=2\times99+2+7\times9+7+4$

$=2\times99+7\times9+2+7+4$

$=9$的倍數$+2+7+4$

凡是9的倍數，一定亦是3的倍數，故決定274是否爲3或9的倍數，只須看$2+7+4$是否爲3或9的倍數.

(1) 7. 要曉得某數是否爲7的倍數，只須把某數的末位數截去，再減去末位數的兩倍，如是繼續作下去，到了發現其餘數是否爲7的倍數而止，就可決定原數是否爲7的倍數.

例如檢驗4173是否爲7的倍數.

$$\begin{array}{r l}
4173 & \\
\underline{6} & 3\times2 \\
411 & \\
\underline{2} & 1\times2 \\
39 &
\end{array}$$

因39不是7的倍數，故4173亦不是7的倍數.

說明： 把某數的末位數字抹去，又從十位數內減去末位數的兩倍，這恰等於從原數內減去末位數的21倍，即減去7的倍數，且使末位變爲0，同樣繼續作下去，即可得末若干位爲0的數.然此數乃由原數內減去7的倍數而得，故判定原數是否爲7的倍數，只須視此數而定，又因十乘方的數決不是7的倍數，故末若干位0可以捨去.

2. 通法

(2) 11,13,17,……照前面的原理，致查某數是否爲11的

倍數，只須把牠的末位數截去，再減去末位數的一倍，又在所得餘數內同樣繼續作下去，到了最後的餘數，看牠是否爲11的倍數，即可決定原數是否爲11的倍數．欲查某數是否爲13的倍數，只須把牠的末位數截去，再加上末位數的4倍，在所得的結果內，同樣作下去，到了最後的結果，看牠是否爲13的倍數，即可決定原數是否爲13的倍數．因爲截去末位數，又加上末位數的4倍，這恰等於在原數內加上末位的39倍，即加上13的倍數．現在把從7到101質數的倍數檢驗方法，列成一表，附於本篇的末了，以備讀者查考．

(二)　公約數

I.　公約數　最大公約數

諸數都被某數除盡，則某數稱諸數的公約數．諸數的公約數往往不止一個，其中最大的稱最大公約數，可省稱做 G. C. M.

例如　24, 36, 48, 的公約數爲 2,3,4,6,12；在這五個公約數中，以12爲最大，故12稱最大公約數．

II. 最大公約數求法

(1) 分解因數法：　例如求84,216,210的 G. C. M.

$84=2^2\times3\times7$

1. 因數法

$126=2\times3^2\times7$

$210=2\times3\times5\times7$

$\therefore$ G. C. M. $=2\times3\times7=42$

(2) 檢驗公約法：例如求84, 126, 210 的 G. C. M.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 84, & 126, & 210 \\ \hline 3 & 42 & 63 & 105 \\ \hline 7 & 14 & 21 & 35 \\ \hline & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

這裏的2, 3, 7都是84, 126, 210 的公約數，$\therefore$ G. C. M. $=2\times3\times7=42$.

2. 除法

輾轉相除法：　求兩數的最大公約數，先以小數除大數，得餘數，再以餘數除小數，又得餘數，這樣輾轉以餘數除餘數，到除盡爲止，那最後的除數，就是最大公約數。

用輾轉相除法求三個或三個以上的數的最大公約數只須先求任意兩個數的最大公約數，把這最大公約數和其他的數再求其最大公約數；這樣繼續求下去，那最後所得的最大公約數，就是諸數的最大公約數。

(三)　公倍數

I.　公倍數　最小公倍數

某數爲諸數的倍數時，則某數稱作諸數的公倍數。諸數的公倍數不止

一個，其中最小的稱最小公倍數，可省稱做 L. C. M.

例如 12, 24, 36等皆爲2, 3, 4的公倍數，而以12爲最小公倍數。

II. 最小公倍數求法

1. 因數法

(1) 分解因數法： 例如求60，75，80的 L. C. M.

$60=2^2\times3\times5$

$75=3\times5^2$

$80=2^4\times5$

$\therefore$ L.C.M. $=3\times5^2\times2^4=1200$

(2) 檢驗公約法： 例如求15, 20, 36, 84的L.C.M.

2)	15	20	36	84
2)	15	10	18	42
3)	15	5	9	21
5)	5	5	3	7
	1	1	3	7

$\therefore$ L.C.M. $=2^2\times3\times5\times1\times1\times3\times7=1260$.

2. 除法

先求最大公約數法： 求兩數的最小公倍數，可先求兩數的最大公約數，用這最大公約數來除兩數中任一數，把所得的商和另一數相乘，卽得最小公倍數。

因假設A, B兩數的最大公約數爲D，又設以D除A所得的商爲a，以D除B所得的商爲b，則有

$A=D\cdot a$; $B=D\cdot b$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

由上面分解因數法，知道

A, B 的 L. C. M. $=D.a.b=A.\frac{B}{D}=B\frac{A}{D}$

質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數	質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數	質因數	截去末位數字後再應加或減的末位倍數
7	−2	37	−11	71	−7
11	−1	41	−4	73	+22
13	+4	43	+13	79	+8
17	−5	47	−14	83	+25
19	+2	53	+16	89	+9
23	+7	59	+6	97	−29
29	+3	61	−6	101	−10
31	−3	67	−20		

第三 分數

(一) 分數

I. 約分通分

一分數的分子,分母,以同一數來除牠,其值不變.這叫做約分.同樣用同一數來乘牠,其值也不變.故分母不同的諸分數,可用各分母的最小公倍數來做公分母,再把各分數的分母來除這公分母,以所得的商來乘牠們自己的分子做新分子.這個方法叫做通分.

II. 分數的四則

1. 加減 同分母的分數加減,只須加減其分子,異分母的分數加減,須先行通分使變爲同分母的分數再行加減其分子.

2. 乘除

(1) 乘 兩分數的乘,以各分子的積作新分子,以各分母的積作新分母.

例如 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=(3\div4)\times(5\div7)=3\div4\times5\div7$

$=3\times5\div(4\times7)=\frac{3\times5}{4\times7}$

(2) 除 兩分數的除,須顚倒除數的分子,分母;并且變除號爲乘號.

例如 $\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}=(3\div4)\div(5\div7)$

$=3\div4\underline{\div5\times7}$

$=3\div4\times7\div5$

$$=(3\div4)\times(7\div5)$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$$

III. 分數的最大公約數和最小公倍數

1. 最大公約數

某分數能除盡諸分數而得整商，則此某分數叫作諸分數的 G. C. M.

例如 $\frac{H}{G}$ 爲 $\frac{A}{B}$，$\frac{C}{D}$，$\frac{E}{F}$ 的 G. C. M，則應有

$$\frac{A}{B}\div\frac{H}{G}=\frac{A}{B}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$
$$\frac{C}{D}\div\frac{H}{G}=\frac{C}{D}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$
$$\frac{E}{F}\div\frac{H}{G}=\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}=\text{整數}$$

要 $\frac{A}{B}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須 H 能除盡 A，B 能除盡 G. 要 $\frac{C}{D}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須H能除盡C，D能除盡G，要 $\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$ 爲整數，必須H能除盡E，F能除盡G，卽H當爲A，C，E 的 G. C. M.，G當爲B，D，F 的 L. C. M 故得下列公式：

$$\text{諸分數的 G.C.M.}=\frac{\text{各分子的G.C.M.}}{\text{各分母的L.C.M.}}$$

某分數能被諸分數除盡而得整商，則此某分數叫作諸分數的 L. C. M.

例如 $\frac{Q}{P}$ 爲 $\frac{A}{B}$，$\frac{C}{D}$，$\frac{E}{F}$ 的L. C. M. 則應有

2. 最小公倍數

$$\frac{Q}{P}\div\frac{A}{B}=\frac{Q}{P}\times\frac{B}{A}=\text{整數}$$

$$\frac{Q}{P}\div\frac{C}{D}=\frac{Q}{P}\times\frac{D}{C}=\text{整數}$$

$$\frac{Q}{P}\div\frac{E}{F}=\frac{Q}{P}\times\frac{F}{E}=\text{整數}$$

要 $\frac{Q}{P}\times\frac{B}{A}$ 爲整數，必須A能除盡Q，P能除盡B，要 $\frac{Q}{P}\times\frac{D}{C}$ 爲整數，必須C能除盡Q，P能除盡D，要 $\frac{Q}{P}\times\frac{F}{E}$ 爲整數，必須E能除盡Q，P能除盡F；即Q當爲A，C，E的L. C. M.，P當爲B，D，F的G. C. M.故得下列公式：

$$\text{諸分數的L.C.M.}=\frac{\text{各分子的L.C.M.}}{\text{各分母的G.C.M.}}$$

(二) 比和比例

I. 總說

比的前項，相當分數的分子；比的後項，相當分數的分母。

兩個比相等而成爲比例式，例如3:5=6:10是一個比例式；比例式內第一項同第四項叫做比例的外項，第二項同第三項叫做比例的內項。比例式中兩外項之積等於兩內項之積，這是比例式中一個很重要的性質。應用這個性質，如果一個比例式中有三項已知，則其餘一項可以求得。這所求的一項叫做比例的未知項，常用x來代表，求這未知項叫做解比例式。

II. 各種的比

1. 單 比 { 正比,反比。 如甲數對於乙數的比叫正比，則乙數對於甲數的比叫反比。
例如3:5爲正比,則5:3爲反比。

2. 複 比 { 把若干個比的前項相乘起來作前項，後項相乘起來作後項所成的比,叫做牠們的複比。
例如3;5，2:3,4:7的複比是(3×2×4):(5×3×7)即24:105.

3. 連 比 { 三個或三個以上的數相連而成的比叫做連比.
例如甲乙的比爲2:3,乙丙的比爲3:5 則甲乙丙的連比爲2:3:5。

III. 各種比例

1. 單比例 { (1) 正比例. 凡二種有相互關係的量,其變化是同時增進或同時減退的成正比例.
例如布 5 尺價 8 角 5 分，布 2 丈4尺價多少? 這裏布的長短同布的價錢成正比例.今設布 2 丈 4 尺的價爲 x 角，那麼前後價錢的比爲 8.5: X，前後長短的比爲 5:24，故應有

$$5 : 24 = 8.5 : x$$

$$\therefore X = \frac{24\times 8.5}{5} = 40.8\text{角}$$

(2) 反比例. 凡二種有相互關係的量,其變化是一種增進他一種減退的,成反比例.

例如有一件事,8人合作,3日成功, 12人合作,幾日成功?

這裏人數的多少和成功的日數成反比例. 今設12人合作所需的日數爲X日,那麼前後人數的比爲 8 ;12, 前後日數的比爲 3 : x

故應有 $12:8=3:x$

$$\therefore x=\frac{8\times 3}{12}=2\text{ 日}$$

2. 複比例

凡含有複比的比例式,叫複比例.

例如牛6頭5日內耕田30畝,問牛16頭,耕田80畝要幾天?

今設牛 16 頭X日內能耕田80畝,那麼前後日數的比是 5 : X,前後畝數的比是30:80,前後牛數的比是6:16. 吾們知道完成的日數和牛數成反比例, 和田的畝數成正比例. 故有

$$\left.\begin{matrix}16 : 6\\ 30 : 80\end{matrix}\right\}=5:x$$

$$\therefore x=\frac{6\times 80\times 5}{16\times 30}=5\text{ 日}$$

IV. 比例的變形

已經知道第一量同第二量的關係, 第二量同第三量的關係,第三量同第四量的關係等,求最後一量與第一量的關係的方法,叫做連鎖比例.

例如上茶 2 斤的價等於中茶 3 斤的價, 中茶 4 斤的價等於下茶 5 斤的價.今上茶 7 斤的價爲10元 5 角,問下茶18

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com