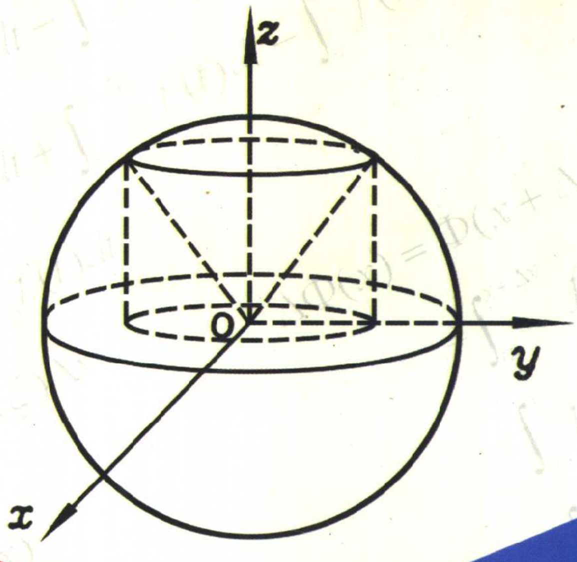
应用数学基础

上册

常天松 主编



航空工业出版社

应用数学基础

上　册

主　编　常天松

副主编　（按姓氏笔划排序）

王秀梅　刘　钢　杨旭岩

邵明仓　秦体恒　贾积身

参　编　王东升　李新芳　段振辉

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部高职高专工科数学课程教学指导委员会有关会议精神，并参照教育部《高职高专数学课程基本要求》编写的。

本书力求贯彻“以必须够用为度”的教学原则，以“掌握概念，强化应用”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本书结合高职高专学校特点，对数学课程内容与课程体系进行了整合，将《高等数学》、《工程数学》等课程整合为《应用数学基础》(上、下两册)；本书打破了先讲一元函数微积分，再讲多元函数微分、积分的传统教学模式，而将一元函数微分、多元函数微分整合为一个模块，一元函数积分、多元函数积分整合为另一模块。线性代数部分以线性方程组求解为中心，以行列式、矩阵、向量为工具，以初等变换为主要方法展开，并由此引出矩阵的对角化、二次型等内容。

本书可作为高职高专及成人教育的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/常天松主编．

－北京：航空工业出版社，2001.10

ISBN7—80134—930—X

Ⅰ 应 Ⅱ 常· Ⅲ 应用数学—高等学校：技术学校—教材

Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066328 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

北京云浩印刷厂印刷 全国各地新华书店经售

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

开本 850/1168 1/32 印张·26 25 字数.692 千字

印数 1 8000 上下两册定价·41 20 元

前 言

本书是根据教育部高职高专工科数学课程教学指导委员会有关会议精神，并参照教育部《高职高专数学课程基本要求》编写的。

本书力求贯彻“以必须够用为度”的教学原则，以“掌握概念，强化应用”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本书结合高工专学校特点，对数学课程内容与课程体系进行了整合，将《高等数学》、《工程数学》等课程整合为《应用数学基础》（上、下两册）；本书打破了先讲一元函数微分、积分，再讲多元函数微分、积分的传统教学模式，而将一元函数微分、多元函数微分整合为一个模块，一元函数积分、多元函数积分整合为另一模块。线性代数部分以线性方程组求解为中心，以行列式、矩阵、向量为工具，以初等变换为主要方法展开，并由此引出矩阵的对角化、二次型等内容。

本书内容曾作为讲义，在河南机电高等专科学校部分专业进行了教改试验，效果良好，现经整理后公开出版；可作为高职高专及成人教育的教学用书。

本书由常天松同志任主编，第一、八、二十二章由王秀梅编写；第二、五、七章由秦体恒编写；第三、四章由常天松编写；第六、二十、二十一章由贾积身编写；第九章由邵明仓（河南省新乡市高级技工学校）编写；第十、十一、十二、十八、十九章由杨旭岩编写；第十三、十四章由段振辉编写；第十五章由王东升编写；第十六、十七章由刘钢编写；第二十三章由李新芳编写；本书插图由赵敬云、谌湘倩绘制。

本书由洛阳工学院应用数学系主任杨万才教授主审。

本书的出版受到了河南机电高等专科学校校领导、基础部领导及教务处全体同志的大力支持和帮助，在此一并表示感谢！

由于水平有限，书中难免存在缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

2001.6

目　录

第一章　向量代数与空间解析几何 …… 1

第一节　空间直角坐标系与向量的概念 …… 1
第二节　向量的数量积与向量积 …… 9
第三节　平面与直线 …… 19
第四节　二次曲面与空间曲线 …… 30
习题一 …… 41

第二章　函数、极限与连续 …… 49

第一节　函　数 …… 49
第二节　函数的极限 …… 56
第三节　无穷小量与无穷大量 …… 61
第四节　极限的运算法则 …… 64
第五节　两个重要极限 …… 67
第六节　无穷小的比较 …… 74
第七节　函数的连续性 …… 76
习题二 …… 85

第三章　导数与微分 …… 92

第一节　导数概念 …… 92
第二节　函数的求导法则 …… 97
第三节　高阶导数 …… 110
第四节　偏导数 …… 112
第五节　微分及其应用 …… 117

第六节　多元复合函数的求导法则与隐函数的求导公式 129
*第七节　方向导数与梯度 135
习题三 139

第四章　中值定理及导数的应用 150

第一节　微分中值定理 150
第二节　罗必达（L'HOSPITAL）法则 153
第三节　函数的单调性及其极值 158
第四节　曲线的凹性及拐点 168
第五节　函数作图 171
*第六节　曲 率 176
第七节　偏导数的应用 182
习题四 193

第五章　不定积分 200

第一节　不定积分的概念与性质 200
第二节　换元积分法 205
第三节　分部积分法 214
第四节　简单有理函数的积分 217
习题五 221

第六章　定积分及其应用 226

第一节　定积分的概念 226
第二节　微积分基本公式 233
第三节　定积分的换元积分法与分部积分法 237
第四节　定积分在几何中的应用 242
*第五节　定积分在物理上的应用 254
第六节　广义积分 257
习题六 261

第七章　多元函数的积分学……269
第一节　二重积分的概念与性质……269
第二节　二重积分的计算……274
第三节　二重积分的应用……282
*第四节　对坐标的曲线积分……288
*第五节　格林公式及其应用……294
习题七……301
第八章　常微分方程……306
第一节　微分方程的基本概念……306
第二节　一阶微分方程……310
第三节　可降阶的高阶微分方程……321
第四节　二阶常系数线性微分方程……326
第五节　常微分方程在数学建模中的应用……337
习题八……343
第九章　级 数……352
第一节　数项级数的概念和性质……352
第二节　数项级数的审敛法……359
第三节　幂级数……368
第四节　函数的幂级数展开式……376
第五节　幂级数在近似计算中的应用……384
习题九……388
附录一　积分表……396
附录二　习题参考答案……407
习题一……407
习题二……410

习题三……………………………………………………………………………… 413
习题四……………………………………………………………………………… 420
习题五……………………………………………………………………………… 423
习题六……………………………………………………………………………… 427
习题七……………………………………………………………………………… 429
习题八……………………………………………………………………………… 431
习题九……………………………………………………………………………… 435

第一章　向量代数与空间解析几何

向量是解决工程技术问题的重要工具，空间直角坐标系是研究向量和多元函数的基础。本章在建立了空间直角坐标系的基础上研究向量的概念、运算和它的一些应用，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲线及几种特殊的二次曲面。

第一节　空间直角坐标系与向量的概念

一、空间直角坐标系

为了用二元数组来刻化平面上的点，我们曾引入了平面直角坐标系。本节引入空间直角坐标系，目的在于把空间点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 建立起一一对应关系，从而使得我们可以用代数方法研究三维空间的向量和几何问题。

过空间定点 O 作三条互相垂直的数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们都以 O 为原点，并且取相同的长度单位，这样就组成了一个空间直角坐标系，如果坐标系满足：以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向，这时拇指所指的方向是 z 轴的正向，则称该直角坐标系为右手系（如图 1-1（a））。如不作特殊说明，本书所指的空间直角坐标系均为右手系，并称 O 为坐标原点；x 轴、y 轴、z 轴、分别称为横轴、纵轴、竖轴，通称为坐标轴；两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xoy 坐标面，类似地有 yoz 坐标面、zox 坐标面。

设 M 为空间的一点，过 M 点分别作垂直于三个坐标轴的平面，与坐标轴分别相交于 P、Q、R 三点，且这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，则点 M 惟一地确定了一组有序数组 x、y、z。反之，设给定一组有序数组 x、y、z，且它们分别在 x 轴、y 轴、z 轴上依次对应 P、Q、R 点，若过 P、Q、R 点分别作平面垂直于所在坐标轴，则这三个平面确定了惟一的交点 M。这样，空间的点就与一组有序数组 x、y、z 之间建立了一一对应关系（如图 1-1（b））。有序数组 x、y、z 称为点 M 的坐标，并依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x, y, z)$。

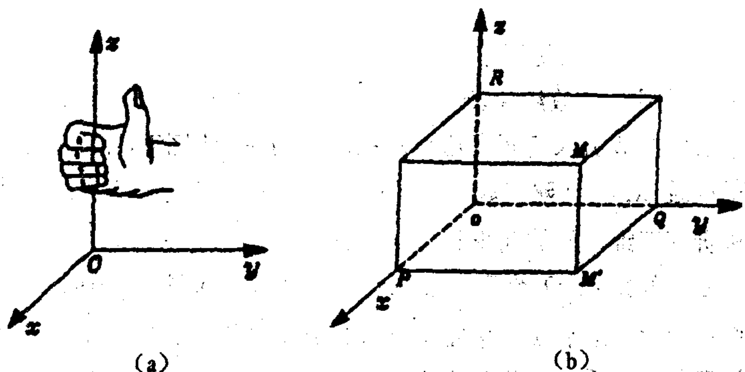


图 1-1

由坐标 (x, y, z) 找空间点 $M(x, y, z)$，还可以采用如下的简便方法：即分别在 x 轴、y 轴上找到坐标 x、y 的点 P、Q，过点 P、Q 分别作 y 轴、x 轴的平行线交于点 M'，自点 M' 引 z 轴的平行线 $M'M$，使 $M'M = z$（当 $z>0$ 时，M 在 M' 的上方；当 $z<0$ 时，M 在 M' 的下方；当 $z=0$ 时，M 与 M' 重合），则 M 为以 (x, y, z) 为坐标的点。

显然，原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$，坐标轴上的点至少有

两个坐标为 0，坐标面上的点至少有一个坐标为 0。例如，在 x 轴上的点均有 $y=z=0$；在 xoy 坐标面上的点均有 $z=0$。三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，在 xoy 坐标面上方，有四个卦限，下方有四个卦限，含 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的卦限叫做第 I 卦限，从第 I 卦限开始，逆着 z 轴正向向下看，按逆时针方向，先后出现的卦限依次称为第 II、III、IV 卦限，位于 I、II、III、IV 卦限下面的四个卦限，依次称为第 V、VI、VII、VIII 卦限（如图 1-2）。

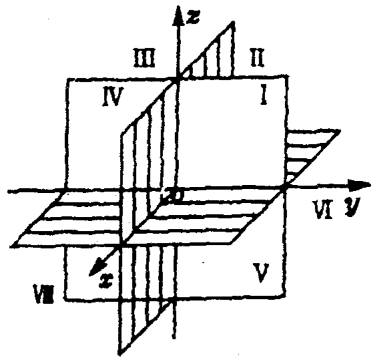


图 1-2

八个卦限中，不在坐标面上的点的坐标符号如下：

I（+，+，+），II（−，+，+），III（−，−，+），IV（+，−，+）

V（+，+，−），VI（−，+，−），VII（−，−，−），VIII（+，−，−）

二、向量的概念及线性运算

（一）向量的概念

在力学、物理学中，通常会遇到既有大小，又有方向的量，如力、位移、速度、加速度等，这类量称为向量（或矢量）。

通常用有向线段来表示向量，以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$。也可用一个黑体字母或加箭头的字母来表示向量。如向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{F}$ 等。

向量 $\vec{a}$ 的大小称为该向量的模，记作 $|\vec{a}|$。模等于 1 的向量称为单位向量，与 $\vec{a}$ 同向的单位向量记为 $\vec{a}^0$。模等于 0 的向量称为零向量，记为 $\vec{0}$，其方向不定。

在数学研究中，只关心向量的大小和方向，不关心其位置，

因此，把大小相等、方向相同的向量视为同一个向量。

定义 1.1 如果向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模相等且方向相同，则称向量$\vec{a}$和$\vec{b}$相等，记为$\vec{a}=\vec{b}$。

满足定义 1.1 的向量在空间平行移动后，两向量完全重合。允许平行移动的向量称为自由向量。本书所讨论的向量均为自由向量。

（二）向量的线性运算

1. 加法

定义 1.2 设有两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，将向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的起点放在一起，并以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的和向量，记为$\vec{a}+\vec{b}$（如图 1-3）。

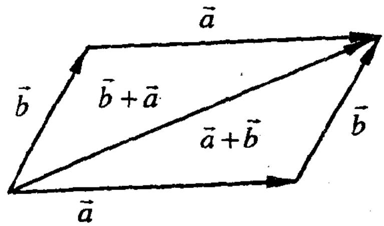


图 1-3

这种求向量的方法称为向量加法的平行四边形法则。由于向量可以平移，所以，若以$\vec{a}$的终点作为向量$\vec{b}$的起点，则自$\vec{a}$的起点到向量$\vec{b}$的终点的向量也是$\vec{a}$与$\vec{b}$的和向量（如图 1-4）。这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则。这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形（如图 1-5）。

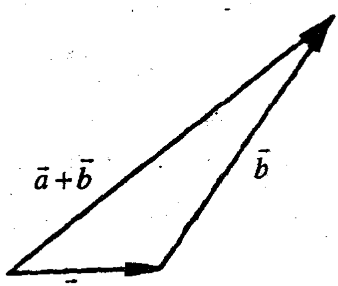


图 1-4

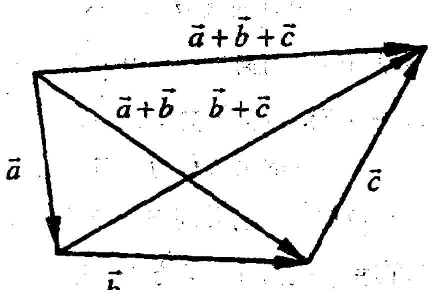


图 1-5

由向量加法的定义可知，向量的加法满足下列运算规律：

（1）交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

（2）结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

2．数乘向量

定义 1.3　设 $\vec{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\vec{a}$ 与 λ 的乘积仍是一个向量，且

（1）$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$;

（2）$\lambda\vec{a}$ 的方向 $\begin{cases} 与\vec{a}同向, & 当\lambda>0; \\ 与\vec{a}反向, & 当\lambda<0. \end{cases}$

如果 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，规定 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$。

数乘向量满足下列运算规律：

（1）交换律　$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$

（2）结合律　$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$

（3）分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=(\lambda\vec{a})+(\mu\vec{a})$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

其中 λ、μ 都是实数。

向量的加法及数乘向量统称为向量的线性运算。

设 $\vec{a}$ 是非零向量，由数乘向量的定义可知，向量 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 的模等于 1，且与 $\vec{a}$ 同向，所以有

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

这是求与非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量的方法，而且 $\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 均是与 $\vec{a}$ 平行的单位向量，任一非零向量 $\vec{a}$ 都可表示为 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$。

定义 1.4　当 $\lambda=-1$ 时，记 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$，则 $-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相

反，模相等，称$-\vec{a}$为$\vec{a}$的负向量（也称$\vec{a}$的逆向量）。

引入负向量后，可以规定两向量的减法，即$\vec{a}$与$\vec{b}$的差规定为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

向量的减法也可按三角形法则进行，只要把$\vec{a}$与$\vec{b}$的起点放在一起，$\vec{a}-\vec{b}$即是以$\vec{b}$的终点为起点，以$\vec{a}$的终点为终点的向量（如图 1-6）。

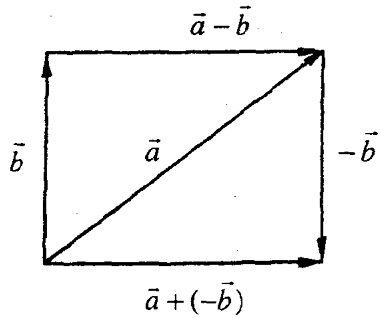


图 1-6

为将向量的运算代数化，下面介绍向量的坐标表示法。

三、向量的坐标表示

1．向径及其坐标表示

在空间直角坐标系中，分别与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量，分别用$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$表示，起点在坐标原点O、终点为M的向量$\overrightarrow{OM}$称为点M的向径（也称为点M的位置向量），记为$\vec{r}(M)=\overrightarrow{OM}$（如图 1-7）。若点$M$的坐标为$(x,\ y,\ z)$，则向量

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}\ ,\quad \overrightarrow{OB}=y\vec{i}\ ,\quad \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

由向量加法得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}\\&=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\end{aligned}$$

即点$M(x,\ y,\ z)$的向径$\overrightarrow{OM}$的坐标表示为

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

简记为 $$\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\}$$

2．向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式

设 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$, 则以 M_1 为起点，以 M_2 为终点的向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

如图 1-8 所示。又因为 $\overrightarrow{OM_1}$ 、$\overrightarrow{OM_2}$ 均为向径，所以

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\end{aligned}$$

即以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，以 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

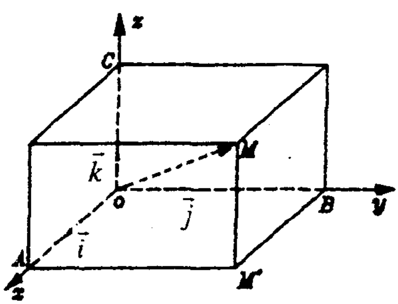


图 1-7

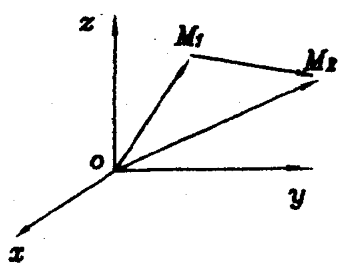


图 1-8

3．向量 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 的模

任给一向量

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

都可将其视为以点$M(x,y,z)$为终点的向径$\overrightarrow{OM}$，由图 1-7 不难看出

$$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2$$

即
$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

4. 空间两点间的距离公式

点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离记为$d(M_1M_2)$，则

$$d(M_1M_2)=|\overrightarrow{M_1M_2}|$$

而
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

所以

$$d(M_1M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

该公式显然是平面上两点间距离公式的推广。

例 1 （1）写出点 A（1，2，3）的向径；

（2）写出起点为 A（1，2，3），终点为 B（3，3，2）的向量的坐标表示式；

（3）计算 A、B 两点间的距离。

解 $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB}=(3-1)\vec{i}+(3-2)\vec{j}+(2-3)\vec{k}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

$$d(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

例 2 求证以 A（1，-1，2），B（0，2，1），C（-2，0，1）为顶点的三角形为等腰三角形。

证明 由于

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(0-1)^2+(2-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2-1)^2+(0-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{11}$$

所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，即$\Delta ABC$为等腰三角形。

5. 坐标表示下的向量运算

利用向量的坐标表示，可将向量的线性运算转化为普通的代数运算。

设$\vec{a}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$，$\vec{b}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$，则有

（1）$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$

（2）$\lambda\vec{a}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}$

（3）$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}$

（4）$\vec{a}=\vec{b}$的充要条件为$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$

（5）$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$的充要条件为$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

第二节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

1. 数量积的定义及其性质

若有一质点在常力（大小与方向均不变）$\vec{F}$的作用下，由点A沿直线移动到点B，则位移$\vec{s}=\overrightarrow{AB}$，由物理学知识可知，力所作的功为$W=|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$其中$\theta$为$\vec{F}$与$\vec{s}$的夹角（如图1-9）。

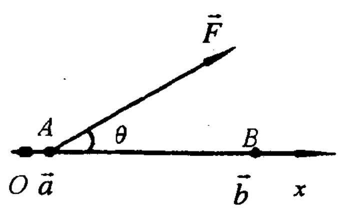


图1-9

像这样由两向量模及其夹角余弦的乘积构成的算式，在其它问题中还会遇到。为此，我们引入两向量数量积的概念。