高等学校交流講义

数学分析

SHUXUE FENXI

下册

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室 編

人民教育出版社

高等学校交流講义

数学分析

SHUXUE FENXI

下册

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室 編

人民教育出版社

“数学分析”是北京大学数学力学系数学分析与函数論教研室在他們教学所用讲义的基础上编成的。全书分上、下两册出版，上册內容包括預备知識及函数、极限、連續函数、微商与不定积分、微分与积分、微分方程初步、泰乐公式、极限的存在性等八章。下册包括多元函数、多元函数微分学、隐函数与极值問題、无穷数值級数、无穷函数級数、幂級数、广义积分、重积分、曲綫积分、曲面积分与場論、参变积分、福里哀級数等十一章。

本书可作为綜合大学及高等师范学校数学各专业“数学分析”課程的教材，也可供高等工业学校的相近专业使用。

簡装本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暂以787×1092毫米規格紙張印刷，定价相应減少20%。希鉴諒。

数 学 分 析

下 册

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室 編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部
北京宣武門內承恩寺7号

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

新 华 印 刷 厂 印 装

新华书店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·1024 开本 787×1092 1/32 印张 12 3/16

字数 311,000 印数 10,001—28,000 定价（6）¥0.95

1961年7月第1版 1961年8月北京第2次印刷

下 册 目 录*

第一章 多元函数

第二章 多元函数的微分学

第三章 隐函数与极值問題

第四章 无穷数値級数

---

* 本书上下两册是在不同的时間編写成的，虽然在出版前經过安排使主要內容互相銜接，但是編写的观点和方法不全相同，也有个别具体內容有一些重复，例如积分第二中値定理以及无穷級数收斂原理就是如此，希望讀者在使用本书时注意。

第五章　无穷函数級数

第六章　幂級数

第七章　广义积分

第八章　重积分

第九章　曲綫积分曲面积分与場論

第十章　参变积分

第十一章　福里哀級数

第一章 多元函数

§1. 多元函数概念

在一元函数的問題中，我們研究的对象是一个自变量与一个因变量之間的关系，然而，在大量的实际問題中，我們需要研究那些依賴于多个自变量的函数关系。

首先，我們来举几个这种依賴于多个自变量的函数的实际例子。

1. 設长方体的长，寬，高分别为 a, b, c，則长方体的体积 V 可表示为

$$V=abc.$$

当 a, b, c 有变化时，則 V 就相应地也有变化，卽 V 是依賴于三个自变量 a, b, c 的函数。我們称 V 是 a, b, c 的三元函数。順便指出：根据題意可知，这里自变量的可允許的变化区域是：$a>0,\ b>0,\ c>0$。

2. 在一密封而有活塞的容器內充滿着定质量的气体。設該气体的体积为 v，压强为 p，絕对溫度为 T，則根据气态方程得到

$$pv=RT \quad (R\text{是比例常数})。$$

这个方程告訴我們变量 p, v, T 之間的相互依賴关系。至于选那两个作自变量，完全可以根据我們研究的要求来确定。例如，欲研究压强 p 对于 v, T 的依賴关系，我們就把 v, T 看作自变量，这时 p 就是一个 v, T 的二元函数。这里自变量 v, T 的可允許的变化区域是

$$v>0,\quad T>T_0,$$

其中 T_0 是該气体最低的液化点。

3. 設自变量 x, y 与因变量 u 之間的变化关系为

$$u=\frac{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2},$$

則自变量 x, y 不能全为 0。如果我們不考虑复数的情况，那末就要限

制自变量 x, y 使得 $x^2+y^2\leqslant 1$。这样我們就得到了一个确定在带圓周的除掉中心 O (即坐标原点)的单位圓內的二元函数。

在上述三个具体的例子中，我們已采用了多元函数这个名称，其意义是比較明白的，現在則不难由此抽象出多元函数的一般定义。

为了簡明起見，我們把重点放在二元函数的研究上。因为以后我們会发現，从一元函数到二元函数，有些內容与概念是新的，但从二元函数到二元以上的函数，在原則上沒有新的內容与概念。因此讀者自己能够完成这个推广的工作。

定义 若对于每一对数值 x, y (在可允許的变化区域 D 內)都对应于一个确定的值 u，則称 u 是 x, y 的(二元)函数。記作

$$u=f(x, y), \quad \text{或} \quad u=\varphi(x, y), \quad \text{或} \quad u=z(x, y) \quad \text{等等。}$$

并称 x, y 为自变量，而称自变量的变化区域 D 为函数的定义域。

在一元函数中，讀者已知道函数的几何表示法是研究函数的有力工具。在二元函数的情况下亦是这样。为了对二元函数作几何解釋，我們在空間建立一笛卡儿坐标系 $Oxyu$。把函数的定义域 D 相应地画在 Oxy 坐标平面上，对于 D 內任一点 (x, y)，在空間可作一点

$$P:(x, y, f(x, y))$$

与之对应。当 (x, y) 在 D 內变动时，一般說来，P 的軌迹是一个曲面 Ω。称 Ω 为函数 $u=f(x, y)$ 的图形。例如，函数 $u=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的图形是球心在原点的单位球面的上半部分(图 1.1.)。函数 $u=x^2+y^2$ 的图形是一个旋轉拋物面(图 1.2)，而函数 $u=xy$ 的图形是一个馬鞍形的曲面(图 1.3.)。

有时我們把 xy 平面上的点 (x, y) 簡写为 M，而把函数 $u=f(x, y)$ 簡写为 $u=f(M)$。

在二元函数的定义中，与一元函数类似，有函数的定义域。一元函数的定义域大部分是区間(可能是开的或閉的或半开的区間，这些区間可能是有界的，也可能是无界的)，因此它們的結构比較单純。我們从

具体的例子可以发现，二元函数的定义域是多种多样的。

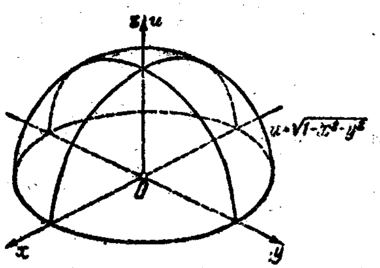

图 1.1

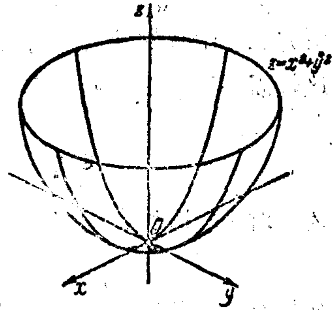

图 1.2

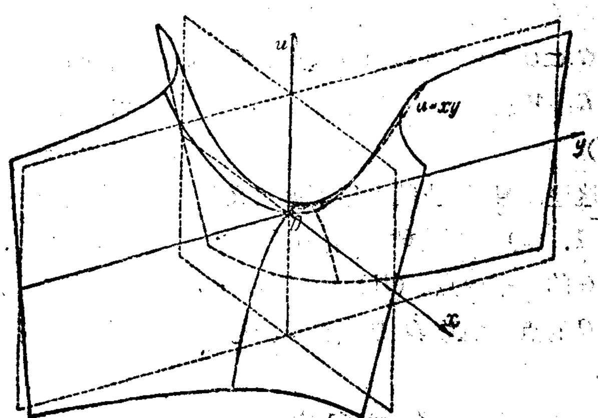

图 1.3

例如：i）函数 $u=xy$ 的定义域是整个 xy 平面。

ii）函数 $u=\arccos\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{3}$ 的定义域是长方形：$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-3\leqslant y\leqslant 3$。

iii）函数 $u=\dfrac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ 的定义域是没有中心的单位圆：$0<x^2+y^2<1$。

当然我們还可以毫无困难地举出許多例子来說明定义域是多种多样的。大家知道函数的定义域是函数概念的一个組成部分，因此有必要在研究二元函数的性质之前来一般地討論它的定义域——平面区域。这就需要我們簡要地研究一些有关平面点集的知識。

§2. 平面点集論初步

为了对平面区域有确切的理解，我們先引进若干术語，定义与記号。

如果有一个約定把平面上的某些点組成一个集体 G，那末我們称 G 为(平面)点集。

記号 $M\in G$ 表示点 M 属于点集 G.

記号 $G_1\subset G_2$(或 $G_2\supset G_1$)表示点集 G_2 包含点集 G_1.

記号 $K_r(M)$ 表示以 M 为中心，以 r 为半径所作的圓的內部(即不包括圓周)。

引进这些記号后，我們再作下述定义：

定义 1. (i)若 $M\in G$，且存在充分小的 r 使得 $K_r(M)\subset G$，則称 M 是点集 G 的一个內点。(ii)若对于任意 r 在 $K_r(M)$ 內旣有 G 的点又有不是 G 的点，則称 M 是点集 G 的边界点。(注意，这里不一定要求 $M\in G$)。

例 1. 設 G 由 $0<x^2+y^2<1$ 定义，則 G 的每一个点都是內点，而 O 点以及圓周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点都是 G 的边界点。

例 2. 設点集 G 是由有限个点組成的，則 G 內的每一点都是边界点。

定义 2. 若点集 G 是由內点組成的，則称 G 为开区域，又称开区域 G 的边界点組成的点集 Γ 为 G 的边界。称由 G 与 Γ 組成的点集为閉区域，記作 $\bar{G}$.

例如，点集 G：$0<x^2+y^2<1$ 是开区域，它的边界 Γ 是由圓心 O 与

单位圓周 $x^2+y^2=1$ 組成，而 $\overline{G}$ 为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

我們在实际問題中碰到的二元函数的定义域，大部分都是开区域与閉区域，也可能是开区域联同它的一部分边界（例如在 §1 中的例3)。我們統称为区域。

平行于区間套定理，在平面的情形也可建立类似的定理。为了方便起見，我們称四边平行于坐标軸的閉的矩形区域 R 为二維閉区間，以 $d(R)$ 表示它的对角綫长度。給定区域 G，若存在一个二維閉区間 R，使得 $R\supset G$，則称区域 G 是有界的，否則称 G 是无界的。例如，区域 $x^2+y^2<1$ 是有界的，而区域 $x^2+y^2>1$ 是无界的。

定理 1.（二維区間套定理）。若二維閉区間套 $R_n(n=1,2,\cdots)$ 满足：

i) $R_1\supset R_2\supset R_3\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$;

ii) $d(R_n)\to 0$ （当 $n\to\infty$）.

則存在唯一的一点 $Q\in R_n\,(n=1,2,\cdots)$.

証明 設 R_n 在 x 軸上的投影为 $I_n=[a_n, b_n]$，在 y 軸上的投影为 $J_n=[c_n, d_n]$（图 1.4），則我們得到二个一維的閉区間套

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$$

与

$$J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_n\supset\cdots.$$

因为

$$d(R_n)=\sqrt{(a_n-b_n)^2+(c_n-d_n)^2}\to 0,$$

（当 $n\to\infty$），所以 b_n-a_n 与 $d_n-c_n\to 0$。利用一維閉区間套的定理可知存在一个唯一的 α 属于所有的 I_n，以及一个唯一的 β 属于所有的 J_n。若令 Q 表示点 (α,β)，显然 $Q\in R_n(n=1,2,\cdots)$。

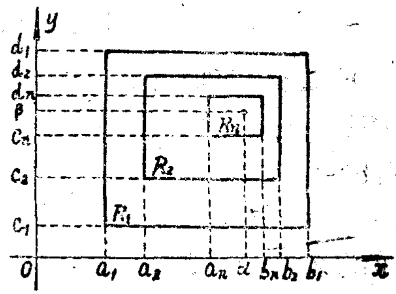

图 1.4

又設 $Q'\in R_n(n=1,2,\cdots)$,

而 Q' 的坐标为 (α', β')，則 α', β' 分别滿足：$a_n \leqslant \alpha' \leqslant b_n$，$c_n \leqslant \beta' \leqslant d_n$。根据一維区間套定理唯一性的結論可知 $\alpha' = \alpha$，$\beta' = \beta$，即 Q' 与 Q 相同。定理証毕。

定理 2.（外尔斯特拉斯-波尔查諾定理）。設 H 是一个由无穷多个点組成的有界点集，則至少存在一点 M_0，使得对于任意小的正数 r，$K_r(M_0)$ 包含无穷多个属于 H 的点。（注意，M_0 可能属于 H 也可能不屬于 H）。

証明. 因为 H 是有界的，所以存在一个二維閉区間 $R_1 \supset H$。現在通过中心把 R_1 等分为四个二維閉区間，显然在这四个二維閉区間中至少有一个二維閉区間 R_2 包含无穷多个屬于 H 的点。通过中心再把 R_2 四等分，显然在这四个二維閉区間中至少有一个二維閉区間 R_3 包含无穷多个屬于 H 的点。这样継續下去我們就得到一个二維閉区間套

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots,$$

其中 $d(R_n) = d(R_1)/2^{n-1} \to 0 \ (n \to \infty)$。而且每一个 R_n 都包含无穷多个屬于 H 的点。

根据定理 1 可知存在 $M_0 \in R_n \ (n = 1, 2, \cdots)$。任給 $r > 0$，存在 $N > 0$ 使得只要 $n \geqslant N$，就有 $d(R_n) < r$。由于 $M_0 \in R_n$，所以当 $n \geqslant N$ 时，有 $K_r(M_0) \supset R_n$，因此 $K_r(M_0)$ 包含无穷多个屬于 H 的点。

定理証毕。

§ 3. 二元函数的連續性

1. 二元函数的极限 类似于一元函数的极限，現在我們来研究二元函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的极限。讀者可能已經想到二元函数取极限的直观的說法：即，当点 (x, y) 不等于 (x_0, y_0) 而趋于 (x_0, y_0) 时，函数 $u = f(x, y)$ 趋于某个常数 l。下面我們用 ε-δ 的說法来叙述极限的定义，它确切地表达了‘点 (x, y) 趋于 (x_0, y_0)’的含义。

定义 1. 若任給 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ [(x,y)\neq(x_0,y_0)],$$

便有
$$|f(x,y)-l|<\varepsilon,$$

則称 l 为 $u=f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 的极限，且記作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l.$$

設以 M_0 与 M 分别表示点 (x_0,y_0) 与 (x,y)，且以 ρ 表示 M_0 与 M 之間的距离，即 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，讀者不难証明定义 1 等价于下述的定义 2。

定义 2. 若任給 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$0\neq\rho<\delta \quad (\rho=\sqrt{x^2+y^2})$$

就有
$$|f(M)-l|<\varepsilon,$$

則称 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的极限存在，且記作

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=l.$$

下面我們列举几个例子。

例 1. 証明：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

注意，这里函数在点 $(0,0)$ 无意义。

因为
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\cdot\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{|x|}{2},$$

所以对于任意給定的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$ 就能从不等式

$$|x|<\delta,\quad |y|<\delta$$

推出
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\frac{\delta}{2}<\varepsilon.$$

証毕。

例 2. 設函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{当 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{当 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

研究当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数 $f(x,y)$ 的性质。

注意，这里 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 有意义。

过原点作一与 x 軸成 α 角的射綫

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\sin\alpha,$$

其中 α 可任意固定，則

$$f(x,y)=\frac{\rho\cos\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\rho^2\sin^2\alpha}.$$

若 $\cos\alpha=0$，則 $f(x,y)=0$. 若 $\cos\alpha\neq0$，則

$$|f(x,y)|\leqslant\rho\cdot\left|\frac{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right|\leqslant\rho\cdot|\sec\alpha|.$$

故只要 $\rho\to0$，就有 $f(x,y)\to0$. 但是，我們要小心，因为我們对点 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 的方式作了限制，所以在这里我們还不能断定 $f(x,y)$ 的极限存在。当然，如果极限存在的話，那末它必定是 0。但是我們可以証明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的极限是不存在的。

因为，当 $x=y^2$ 时，得到

$$f(x,y)=\frac{1}{2},$$

所以此时当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)\to\frac{1}{2}$. 这表明，当 (x,y) 以不同方式趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的値。因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的极限不存在。

从这个例子我們特别要注意二点：(i)在取二元函数的极限时，不能限制 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 的方式。(ii)如果我們用限制 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 的方式来計算极限，那末必須同时証明极限的存在性。

关于二元函数的极限运算法則，完全可仿照一元的情形平行的建立起来。我們把这个工作留給讀者。

2. 二元函数的連續性概念。

定义 3. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的极限等于它在 (x_0,y_0) 点的函数値；亦即任給 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得可从不等式

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$$

推出
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

則称 $u=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点連續。

注意，这里 δ 除了依賴于 ε 外，一般說来也可能与 (x_0,y_0) 点有关。

定义 4. 若 $f(x,y)$ 在区域 D 內的每一点都是連續的，則称 $f(x,y)$ 在区域 D 內是連續的。

例 3. 考慮函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{当 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{当 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

則由例 1 可知这里 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是連續的。

例 4. 設函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{当 } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{当 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

則 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$ 不等于 $f(0,0)=1$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是不連續的。

又在例 2 中所举的函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是不連續的，因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沒有极限，当然談不上連續了。

仿照一元函数的情形，讀者不难証明下面連續函数的运算法則：

(1) 若 f 与 g 都是定义在同一区域上的 x,y 的二元連續函数，則函数

(i) $f+g$

(ii) fg

(iii) $\dfrac{f}{g}$ (当 $g\neq0$)

亦是 x,y 的連續函数；

(2) 若 $u=f(x,y)$ 是 x,y 的連續函数，而

$$x=\varphi(s,t),\ y=\psi(s,t)$$

又是 s,t 的二元連續函数，則复合函数

$$u=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$$

是 s,t 的連續函数。

有了上述两个法則，我們可以利用有关单元函数的連續性来判别許多常見的二元函数的連續性。注意，一元連續函数 $f(x)$ 与 $g(y)$ 可以作为二元連續函数 $f(x,y)$ 的特殊情况。

例如，設
$$u=\frac{x+y^2\sin x}{\sin(x^2+y^2)}.$$

因为 x 是 x,y 的連續函数，故 x^2 亦然。同理 y^2 亦是 x,y 的連續函数，故根据上述法則可知 x^2+y^2, $\sin(x^2+y^2)$, $x^2+y^2\sin x$ 都是 x,y 的連續函数，故当 $\sin(x^2+y^2)\neq 0$ 时，(即当 $x^2+y^2\neq n\pi$ 时 $(n=0,1,2,\cdots)$，z 是 x,y 的連續函数。

3. 連續函数的基本性质　完全类似于一元函数的情况可以証明下面的定理。

定理 1. 設 $u=f(M)$ 在 M_0 点連續，且 $f(M_0)\neq 0$，則存在一个正数 r 使得在圓 $K_r(M_0)$ 内 $f(M)$ 与 $f(M_0)$ 同号。

定理 2. 設 $u=f(M)$ 在有界閉区域 D 上連續，則在 D 上至少存在一点 M_0，使得 $f(M_0)$ 是 $f(M)$ 在 D 上的最大值，即

$$f(M)\leqslant f(M_0)\quad (M\in D).$$

同样也至少存在一点 M_1，使得 $f(M_1)$ 是 $f(M)$ 在 D 上的最小值，即

$$f(M)\geqslant f(M_1)\quad (M\in D).$$

最后我們研究二元函数的一致連續性。

定义 5. 設函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上确定。若任給 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得可从不等式

$$|x_1-x_2|<\delta,\quad |y_1-y_2|<\delta$$

推出
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

其中(x_1, y_1)与(x_2, y_2)是D上任意滿足$|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$的两点，而且δ是只与ε有关的常数，则称$f(x, y)$在D上一致連續。

从这个定义立刻可以推出一致連續的函数是連續函数。在一元函数的研究中，我們已經知道这个結論对一般的区間是不可逆的。但是可以証明下述定理。

定理 3. 若$u=f(x, y)$在有界的閉区域D上連續，則$u=f(x, y)$在D上一致連續。

証明. 用反証法来証明。

假設定理的結論不对。故存在某一个$\varepsilon_0>0$, 对于任意的δ_n(其中$\delta_n\to 0$, 当$n\to\infty$), 至少在D内可以找到相应的一对点P_n, Q_n使得

$$|f(P_n)-f(Q_n)|\geqslant\varepsilon_0,$$

其中P_n与Q_n之間的距离$\overline{P_nQ_n}<\delta_n$。

設所有由P_n, Q_n組成的点集为H. 显然，H是有界的，并且它包含无穷多点。由外尔斯特拉斯-波尔查諾定理可知存在M_0使得对于任意的δ, $K_\delta(M_0)$包含屬于H的无穷多个点。由于$\overline{P_nQ_n}<\delta_n\to 0$。所以$K_\delta(M_0)$包含无穷多对点$P_n, Q_n$。因此，若$M_0$不是$D$的內点，則$M_0$是$D$的边界点。但$D$是閉区域，故$M_0\in D$。由于$f(M)$在$M_0$点連續，所以对于$\varepsilon_0$存在$\delta>0$, 使得

$$|f(M)-f(M_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

只要$M\in K_\delta(M_0)$。若在$K_\delta(M_0)$内取一对屬于H的点P_n, Q_n, 則

$$|f(P_n)-f(Q_n)|\leqslant|f(P_n)-f(M_0)|+|f(Q_n)-f(M_0)|<$$

$$<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0,$$

此与P_n, Q_n原来的意义相矛盾。定理証毕。

第二章　多元函数的微分学

§1. 偏微商

1. 概念的引入　連續性是函数的重要分析性质，它刻划了自变量变化时函数的变化趋势。但是停留在函数連續性上的研究是不够的，大量实际問題还要求我們考虑函数的变化速度。

例如，我們知道一定质量的气体的体积 v、压强 p 和絕对溫度 T 之間有函数关系

$$pv=RT,$$

其中 R 是常数。或者写成

$$v=\frac{RT}{p}.$$

容易判定 v 关于 p 和 T 的变化是連續的。但是常常还需要进一步了解，当自变量 p 和 T 变化时，体积 v 的变化速度有多大？

我們先研究在溫度 T 不变的情况下，体积 v 对压强 p 的变化率。(它的物理意义是：在等溫过程中，压强变化所引起的体积变化的快慢程度。)

这时，体积 v 可簡单地看为压强 p 的一元函数，按照一元函数的微商定义和計算法則，体积 v 对压强的变化率就等于

$$\frac{dv}{dp}=-\frac{RT}{p^2},$$

这个变化率称为函数 v 对 p 的偏微商。

我們給这个新概念下一个精确而一般的定义。

2. 偏微商的定义　若对固定的 y_0，一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 的微商存在，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$