

面向21世纪信息管理与信息系统专业
东南大学出版社 核心课程系列教材



运筹学

吴清烈 尤海燕 主编
徐士钰 陈莉莎

运筹学

吴清烈 尤海燕

主编

徐士钰 陈莉莎



东南大学出版社

• 南京 •

内 容 提 要

全书共分 12 章, 比较系统全面地介绍了线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、网络计划、存储论、排队论、对策论与决策论等运筹学主要分支的基本原理和方法, 力求理论联系实际, 深入浅出地讲清概念和算法思路, 并辅以相当数量的应用举例和习题, 既包含部分历年考研试题, 也包含一些实际背景很强的应用题。

本书可作为高等院校管理科学、工程管理、系统工程、工业工程、信息管理与信息系统、电子商务以及经济管理类与理工类其他相关专业本科生教材, 也可作为管理科学与工程、系统工程以及其他相关专业研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/吴清烈等主编. —南京: 东南大学出版社,
2004.1

ISBN 7—81089—407—2

I. 运… II. 吴… III. 运筹学—高等学校—教材
IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 056358 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人: 宋增民

江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷

开本: B5 印张: 25 字数: 532 千字

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 定价: 32.00 元

(凡因印装质量问题, 可直接向发行科调换。电话: 025-3795801)

面向 21 世纪信息管理与信息系统专业

核心课程教材建设委员会

孙建军（南京大学信息管理系教授、博导）

吴清烈（东南大学经济管理学院副教授、博士）

武 忠（东南大学经济管理学院副教授、博士）

史田华（南京理工大学信息管理系教授）

王曰芬（南京理工大学信息管理系副教授、博士）

郑会颂（南京邮电学院管理工程系教授）

何有世（江苏大学工商管理学院教授、博士）

刘秋生（江苏大学工商管理学院副教授、博士）

周建屏（苏州大学图书馆副研究馆员）

成 颖（南京大学信息管理系）

前言

运筹学是一门研究如何运用科学分析方法辅助决策或者确定最佳方案的应用科学，它的出发点在于用更有效的方式，组织、管理和筹划现有人力、物力和财力资源，以期获得最佳效果。运筹学强调运用系统优化思想解决实际问题，从提出问题、分析建模、求解到方案实施有一整套严密科学的方法。因此，运筹学可以为管理人员制定最优决策，提供定量的科学依据，它是实现管理现代化的有力手段。运筹学的应用范围很广，在军事、工业、农业、交通运输、商业、城市建设、医疗卫生、行政管理等许多方面都有广泛应用。运筹学已成为经济管理类以及部分工科专业普遍开设的一门重要专业基础课。目前国内外大多数高等院校的经济、管理、系统工程以及许多工科专业，已普遍把运筹学列为必修课程。

东南大学经济管理学院一直十分重视运筹学的教学、研究和教材建设。1982年，盛昭翰、徐士钰、程明熙等五人合编了《运筹学》教材，并由江苏省管理现代化协会内部发行；1986年，徐士钰对该教材进行修改，编写了运筹学讲义；1990年，根据多年来给系统工程、工业企业管理及建筑管理等专业的硕士生、本科生讲授运筹学的教学实践，徐士钰又对讲义作了进一步补充、删节等，并由东南大学出版社正式出版发行。随着国内运筹学教学形势的发展，对教学内容的要求也在不断提高。为满足21世纪经济管理、信息管理以及管理科学与系统工程等学科专业运筹学教学的需要，我们认为，有必要根据我国经济发展的需要，将运筹学的最新理论和应用成果及时充实到教材中去，并根据我们多年的运筹学教学经验，更合理地组织运筹学的教学内容。为了适应新形势下相关专业运筹学教学的迫切需要，特向广大读者献上新版的《运筹学》教材。

本教材共分12章，比较系统全面地介绍了线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、网络计划、存储论、排队论、对策论与决策论等运筹学主要分支的基本原理和方法，力求理论联系实际，深入浅出，讲清概念和算法思路，并辅以相当数量的应用举例和大量习题。本教材在内容的安排上，既考虑到管理科学、工程管理、系统工程、工业工程、信息管理与信息系统、电子商务和经济管理类与理工类其他专业本科生的教学需要，同时也兼顾相关专业硕士研究生进一步学习以及不同层次人员自学的需要。书中习题根据教材的知识点，并根据不同层次人员的需要安排，既包含了部分历年考研试题，也包含一些实际背景很强的应用题。

本教材首先由吴清烈确定教材体系框架，然后由吴清烈、尤海燕、徐士钰、陈莉莎分工编写各章内容。本教材的编写工作具体分工如下：吴清烈负责编写绪论和第1~3章和第5、12章；尤海燕负责编写第6~9章；徐士钰负责编写第10~

11 章;陈莉莎负责编写第 4 章并负责第 10~11 章的文字录入和图表绘制等工作。吴清烈十分感谢徐士钰教授继续参加了本教材的编写工作,并对教材的组织编写提出许多宝贵意见。本书虽是教材,但在体系结构内容组织和知识表述等方面,具有一定的创新性,并包含了作者多年来丰富的教学体会和一些原创成果。

本教材在编写过程中,得到东南大学经济管理部学院和东南大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。另外,在编写过程中参考了部分文献,在此对所引用文献的作者一并表示诚挚的感谢。鉴于编者水平有限,本教材存在的缺点和错误在所难免,殷切期望有关专家和广大读者批评指正。

吴清烈

2003 年 9 月

目 录

0 绪论	(1)
0.1 运筹与运筹学	(1)
0.2 运筹学的思想与理论	(2)
0.3 运筹学的战后发展	(3)
0.4 我国运筹学的发展	(4)
0.5 运筹学的应用	(4)
0.6 运筹学的研究步骤	(5)
0.7 运筹学的主要分支	(5)
0.8 运筹学与其他学科的关系	(6)
1 线性规划及其基本理论	(7)
1.1 线性规划及其数学模型	(7)
1.2 线性规划的解	(16)
1.3 线性规划的基本定理(性质)	(17)
习题1	(21)
2 线性规划的图解法与单纯形解法	(26)
2.1 线性规划问题的图解法	(26)
2.2 线性规划单纯形解法的原理与计算步骤	(28)
2.3 线性规划单纯形解法的进一步讨论	(38)
2.4 线性规划单纯形解法的改进	(44)
2.5 运输问题及其解法	(47)
习题2	(59)
3 线性规划的对偶理论与灵敏度分析	(65)
3.1 线性规划的对偶问题	(65)
3.2 线性规划对偶问题的基本性质	(70)
3.3 线性规划对偶问题的经济解释——影子价格	(76)
*3.4 线性规划的对偶单纯形解法	(77)
*3.5 线性规划的灵敏度分析	(80)
习题3	(88)
4 目标规划	(94)
4.1 目标规划及其数学模型	(94)
4.2 目标规划的图解法	(98)
4.3 目标规划的单纯形法	(99)
习题4	(102)

5	整数规划	(105)
5.1	整数规划及其数学模型	(105)
5.2	整数规划的分支定界解法	(107)
5.3	整数规划的割平面解法	(111)
5.4	0-1 整数规划及其解法	(115)
5.5	指派问题及其解法	(118)
	习题 5	(122)
6	非线性规划	(128)
6.1	非线性规划的基本概念	(128)
6.2	无约束问题的一维搜索	(136)
6.3	无约束极值问题的解法	(144)
6.4	约束极值问题的最优性条件	(153)
6.5	约束极值问题的可行方向解法	(156)
6.6	约束极值问题的制约函数解法	(159)
	习题 6	(163)
7	动态规划	(166)
7.1	动态规划的基本概念和基本原理	(166)
7.2	离散确定型多阶段决策问题	(176)
7.3	不定期多阶段决策问题	(191)
7.4	随机型决策问题	(193)
	习题 7	(201)
8	图与网络分析	(204)
8.1	图与网络的基本概念	(204)
8.2	树与最小树问题	(209)
8.3	最短路与最短链问题	(214)
8.4	网络最大流问题	(223)
*8.5	最小费用网络最大流问题	(231)
*8.6	欧拉图与中国邮路问题	(235)
	习题 8	(240)
9	网络计划与图解评审法	(243)
9.1	网络图的绘制与计算	(243)
9.2	网络计划的优化与控制	(252)
9.3	图解评审法	(258)
	习题 9	(264)
10	存贮论	(267)
10.1	存贮论的基本概念	(267)
10.2	确定性存贮模型	(271)
10.3	随机性存贮模型	(282)

习题 10	(296)
11 排队论.....	(300)
11.1 服务系统的基本概念.....	(300)
11.2 典型服务系统的分析.....	(307)
11.3 随机服务系统的优化问题.....	(329)
11.4 服务系统的随机模拟.....	(334)
习题 11	(340)
12 对策论与决策论.....	(343)
12.1 对策的概念与分类.....	(343)
12.2 矩阵对策及其解法.....	(345)
12.3 决策、决策过程与决策分类	(357)
12.4 不确定型决策与风险型决策.....	(359)
12.5 多目标决策方法.....	(369)
习题 12	(384)
参考文献.....	(389)

0 绪论

我们所学的这门课程叫做“运筹学”。在系统学习“运筹学”课程之前，首先从运筹学的起源、思想、发展、应用以及一般研究步骤和主要分支等对运筹学作一个总体、大概的介绍。

0.1 运筹与运筹学

由“运筹学”三个字，我们很容易想到中国的成语“运筹帷幄”。这里的“运筹”有着通过筹划、制定策略、以策略取胜的涵义。那么，运筹学能否理解为是研究“如何运筹”的学问？“运筹学”是否是我们中国人所创立？尽管“运筹”一词出于中国的成语“运筹帷幄”，但“运筹学”作为一门学科，却源于第二次世界大战期间英国人罗伊(A. P. Rowe)等所做的研究工作。

1938年7月，英国波得塞(Bawdsey)雷达站负责人罗伊，在研究英美军队如何有效对付德国空袭时，提出了一份名为“关于整个防空作战系统的运行研究”的报告。在这份报告中首次用了“Operational Research”这个词，以后人们把类似这方面的学术研究及应用也用“Operational Research”这个词来概括。现在，我们将其译为“运筹学”。1940年9月，英国成立了由物理学家布莱克特(P. M. S. Blackett)领导的第一个运筹学小组，后来发展到每一个英军指挥部都成立运筹学小组。1942年，美国和加拿大也都相继成立运筹学小组。

在第二次世界大战期间，一些著名的运筹学研究为军队作战以及“运筹学”学科的产生与发展做出了贡献，如：护航舰队保护商船队的编队问题，当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最小的问题；反潜深水炸弹的合理起爆深度问题；稀有资源在军队中的分配问题等等。对船只受到敌机攻击时应采取何种策略的研究，提出了“大船应急转向、小船应缓慢转向”的躲避策略。该研究成果使船只的中弹率由47%降低到29%；对反潜深水炸弹合理起爆深度的研究，使德国潜艇的被摧毁数增加到原来的400%。当时的英国空中战斗、太平洋岛屿战斗、大西洋北部战斗等一系列战斗的胜利，被公认为与运筹学密切相关。

“运筹学”一词在英国称为“Operational Research (缩写为O.R.)”，在美国称为“Operations Research (缩写为O.R.)”，汉语直译为“运用研究”或“作业研究”。我国1956年曾译作“运用学”，1957年才正式定名为“运筹学”，而港台与海外华人一般仍将其译作“作业研究”。很显然，这里的“运筹”二字与“运筹帷幄”中的“运筹”二字在含义上并不完全一样。“运筹学”与研究“运筹”的学问并不完全一致。现在我们将其译为“运筹学”是因为“Operational Research”在其内涵上与成语中“运筹”二字的“筹划、决策”的含义比较一致。

那么,到底什么是运筹学?不同的工具书中对“运筹学”的释义并不一致,如:大英百科全书称运筹学“是一门应用于管理有组织系统的科学”,运筹学“为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。中国企业管理百科全书称运筹学“应用分析、试验、量化的方法,对经济管理系统中人、财、物等有限资源进行统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理。”综合不同教科书与工具书中对“运筹学”的定义与释义,我们对“运筹学”可作如下描述:(1)运筹学是一门应用科学,是将科学分析工具用于管理组织系统的科学;(2)运筹学主要使用但不限于量化分析方法研究实际决策问题,运筹学的基本手段是建立数学模型;(3)运筹学强调最优决策。

运筹学与其他自然科学的明显区别在于它的研究对象是“事”,而不是“物”。因此,我们也可称其为“事理科学”。对于运筹学,至今还没有一个统一而准确的定义。如果一定要给“运筹学”下定义,我们可以为运筹学下这么一个简明的定义:运筹学是研究如何运用科学分析方法辅助决策或确定最佳方案的一门应用科学。

0.2 运筹学的思想与理论

上面是从学科产生的角度看运筹学。运筹学作为一门学科,产生于20世纪30年代末。但如果从思想与理论的角度看,中国古代朴素的运筹学思想很早就有了。例如:中国古代的齐王(和田忌)赛马与(北宋)丁渭修皇宫等故事就体现了朴素的运筹学思想。齐王(和田忌)赛马故事说的是,双方赛马,规定各出上中下等级的马,如按同等级马比赛,齐王可获得全胜;但田忌采用的策略是下马对上马、上马对中马、中马对下马,结果2:1获胜。丁渭修皇宫故事说的是,皇宫被毁,丁渭主持修复,他先让人宫前取土烧砖,挖沟灌水成渠,利用水渠运材料,工程完成后再用废物填沟修复大街,从而减少费用、加快工程进度。这里考虑的都是如何运作最好的问题。

运筹学中的有一些理论很早就被提出,如:军事运筹学中的兰彻斯特(Lanchester)战斗方程是1914年提出的;排队论中的一些著名公式是1917年提出的;存贮论中的最优批量公式是20世纪20年代初提出的。运筹学早期理论及应用的专门研究在二战时期最引人注目,并且主要是在军事领域,属于军事运筹学。如:线性规划及其通用解法—单纯形法是丹捷格(G.B.Dantzig)在1947年研究美国空军军事规划时提出的。线性规划的提出后很快受到经济学家的关注。当然,也有一些非军事领域的研究,如:1939年,苏联学者康托洛维奇(Л. В. Канторович)在解决工业生产组织与计划问题时就提出类似线性规划的模型及解法,1944年,冯·诺意曼(Von Neumann)和摩根斯坦(O.Morgenstern)合著的《对策论与经济行为》为对策论的发展奠定了基础。

二战以后, 运筹学的理论及应用研究不断扩展, 广泛应用到工业和政府等其他领域。通常认为, 运筹学的思想和理论主要来源于军事、管理与经济三大领域。

0.3 运筹学的战后发展

运筹学在军事上的显著成功, 引起了人们广泛的关注。第二次世界大战结束后, 运筹学很快深入到工业、商业、政府部门等, 并得到了迅速发展。运筹学的战后发展可分成三个阶段:

1) 创建时期: 20 世纪 40 年代末到 50 年代初

第二次世界大战结束后, 战时研究运筹学的学者开始转向民用部门运筹学的应用研究。在这一时期, 从事运筹学研究的人数相对较少、出版物少、学会少, 但这一时期是运筹学创建与发展过程中的重要时期。1948 年, 英国率先成立“运筹学俱乐部(后改为运筹学会)”; 美国麻省理工学院(MIT)把运筹学作为一门课程来介绍。1950 年, 第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(Operational Research Quarterly)创刊于英国; 英国伯明翰大学开始开设运筹学课程。1952 年, 美国喀斯(Case)工业大学设立运筹学的硕士和博士学位; 美国成立美国运筹学会, 出版运筹学杂志 Journal of ORSA。1951 年, 莫尔斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)合著的《运筹学方法》一书正式出版发行。20 世纪 50 年代初用电子计算机求解线性规划获得成功。所有这些, 标志运筹学作为一门独立学科已基本形成。

2) 成长时期: 20 世纪 50 年代初到 50 年代末期

由于计算机软硬件技术的迅速发展, 运筹学中的一些方法, 如单纯形法等在实际工作中得以推广应用。这一时期有了更多运筹学的刊物和学会出现。1956~1959 年, 法国、印度、日本、荷兰、比利时等 10 个国家也成立运筹学会, 并有 6 种运筹学刊物问世。1957 年, 在英国牛津大学召开了第一次国际运筹学会议, 并且决定以后每 3 年举行一次。1959 年, 英美法三国发起成立国际运筹学联合会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS), 以后各国运筹学会纷纷加入。20 世纪 50 年代末, 美国大约有半数的大公司在自己的经营管理中应用运筹学, 如用于制订生产计划、物资储备、资源分配、设备更新等方面的决策。

3) 发展普及时期: 20 世纪 60 年代以来

运筹学的学科体系与实际应用领域得到迅速发展, 运筹学进一步细化为各个分支。运筹学的专业学术团体不断增多, 有更多的期刊创办, 有大量的相关书籍出版, 有更多的学校开设运筹学课程。另外, 第三代电子计算机的出现促进了运筹学对复杂系统的研究, 如: 城市交通、环境污染、国民经济计划等。在这一时期, 成立了地区性的学术组织, 并创办了相应的刊物, 如: 欧洲运筹学协会成立

于 1976 年, 亚太运筹学协会成立于 1985 年, 并且都有相应的刊物。目前, 随着计算机信息技术的不断发展, 运筹学的学科体系与实际应用领域仍在不断地向前发展。

0.4 我国运筹学的发展

运筹学作为一门学科, 在 20 世纪 50 年代中期, 由钱学森和许国志等将其从西方引入中国。后来, 华罗庚等一大批中国数学家也参与运筹学的研究。1956 年, 我国第一个运筹学小组在中国科学院力学研究所成立, 1958 年建立了运筹学研究室。1960 年, 在山东济南召开应用运筹学的经验交流与推广会议。1962 年、1978 年, 分别在北京和成都召开两次全国运筹学专业学术会议。

1980 年 4 月, 成立中国运筹学会。华罗庚为中国运筹学会第一届理事会理事长。在我国的农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门, 运筹学的方法开始得到应用推广。除中国运筹学会外, 中国系统工程学会以及与国民经济各部门有关的专业学会, 也都把运筹学应用作为重要的研究领域。目前, 我国各高等院校, 特别是经济管理类专业将运筹学作为专业主干课程列入教学计划。

0.5 运筹学的应用

运筹学早期的应用主要在军事领域, 二战后转向民用。通常, 我们认为, 运筹学的主要应用领域是: 军事、管理、经济与工程(设计)。目前运筹学已广泛应用的具体领域包括: 市场预测与销售、生产计划与调度、库存管理、设备更新与可靠性、各类工程的优化设计、资源分配、运输问题、企业管理、人事管理、城市管理、计算机与信息系统、决策咨询、财政与会计等等。

我国的运筹学工作者在运筹学应用研究方面取得了相当辉煌的成就。1957 年, 我国首先在建筑业和纺织业中应用运筹学。从 1958 年开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面陆续得到推广应用。比如: 粮食部门为解决粮食的合理调运问题, 提出了“图上作业法”, 我国运筹学工作者从理论上证明了它的科学性; 在解决邮递员合理投递路线时, 我国学者管梅谷教授提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法。20 世纪 60 年代起, 运筹学在我国钢铁和石油部门开始得到了比较全面和深入的应用。从 1965 年起, 统筹法在我国建筑业、大型设备维修计划等方面的应用取得可喜的进展。从 1970 年起, 在全国大部分省、市和部门推广优选法。20 世纪 70 年代中期, 最优化方法在我国工程设计界受到广泛的重视, 并在许多方面取得成果: 排队论开始应用于矿山、港口、电讯及计算机设计等方面; 图论用于线路布置、计算机设计、化学物品的存放等。20 世纪 70 年代后期, 存贮论应用于汽车工业等方面并获得成功。近年来, 运筹学已趋向研究和解决规

模更大、更复杂的问题，并与系统工程紧密结合。运筹学是系统工程重要的理论基础。

0.6 运筹学的研究步骤

1) 分析、提出问题

任何决策问题定量分析前，必须先认真地作定性分析：①确定决策目标；②辨认哪些是决策的关键因素、关键约束。这部分工作对工作的有效性及其重要。事实上，任何量化的工作，都离不开定性分析。

2) 建立模型

建模是运筹学方法的精髓。运筹学中的模型有3种基本形式：形象模型、模拟模型、符号或数学模型。建模时一般应尽可能选择建立数学模型。

3) 求解模型

用各种手段（数学方法或其他工具）求解模型。模型的解可以为最优解、次优解和满意解。通常，复杂模型的求解需要计算机的支持。

4) 模型与解的检验

将数据代入模型，求出的解毕竟是模型的解。为检验其是否正确，常采用回溯的方法。即将历史资料输入模型，分析研究得到的解与实际的符合程度，以判别模型是否正确，检查实际问题是否有一些重要因素没有在模型中考虑。

5) 解的有效控制

任何模型都有一定的适用范围。模型的解是否有效，首先要注意模型是否继续有效，并依据灵敏度分析方法，确定最优解保持稳定的参数变化范围，要及时对模型与解作修正。

6) 方案实施

这是很关键但也是很困难的一步。只有最优化方案实施后，分析、研究成果才算真正有价值、有收获。在方案实施阶段，要求明确如下几点：方案由谁去实施，什么时间去实施，如何实施。

上述步骤往往要交叉反复进行。

0.7 运筹学的主要分支

运筹学发展到今天，内容已相当丰富，分支也很多，可以根据所解决问题的主要特征将其分为两大类：确定型模型和概率型模型。

确定型模型主要包括：数学规划（线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、随机规划、多目标规划、两层规划、多层规划）、图论与网络分析；概率型模型主要包括：决策论、对策论、排队论、存贮论等。上述分类只是一种习惯的分法，并不十分严格，部分内容有交叉。并且，运筹学的研究领域和

应用领域在不断地扩大,运筹学应包括哪些分支并不是很严格。国外一些文献中出现的与运筹学相关的内容还有:模拟、可靠性、质量控制、模型论、可行性研究、投入产出分析等。各分支的具体内容,这里不细述,请参见本书和其他相关文献。

0.8 运筹学与其他学科的关系

在运筹学的建模和求解等过程中,通常需要利用很多数学知识,所以学习、应用运筹学应具备较广的数学知识。事实上,许多运筹学者来自数学专业。因此,有人认为运筹学是一门应用数学,但运筹学所解决的问题其本身并非数学问题,而是生产管理等实际决策过程的具体问题,在利用运筹学理论和方法解决具体问题时,需要涉及管理科学的有关理论,因此,运筹学的发展与管理学科理论的发展有着密切的关系。此外,运筹学的发展还与计算机科学的发展有很大关系。运筹学所研究的问题通常比较复杂,而且规模大,在求解问题时,必须借助计算机来完成。最后,运筹学模型在管理信息系统及其分析设计中得到很广泛的应用,运筹学是系统工程的重要理论基础。

另外需要说明如下两点:首先,目前运筹学涉及的主要领域是管理领域,因而我们通常讲的运筹学一般都是指管理运筹学;其研究的基本手段是数学,并较多地运用各种数学工具,因而又将运筹学称作“管理数学”。其次,运筹学不仅可应用于战术决策问题,也可应用于战略决策问题。

1 线性规划及其基本理论

线性规划 (Linear Programming, 简记为 LP) 是运筹学中的一个最重要、应用最广泛的分支。一般认为, 线性规划及其通用解法——单纯形法是丹捷格在 1947 年研究美国空军军事规划时提出的。苏联学者康托洛维奇在 1939 年解决工业生产组织与计划问题时就提出类似线性规划的模型及解法。康托洛维奇的工作当时没有被重视, 直到 1960 年康托洛维奇再次出版《最佳资源利用的经济计算》一书后, 才受到重视。目前线性规划理论体系与计算方法日趋完善, 线性规划已广泛应用于军事、管理和经济领域。一些常见的带有 Spreadsheet 的软件, 如: Excel、Lotus1-2-3 等, 均有内置的线性规划求解功能。

在本章, 我们首先介绍线性规划问题的定义、模型以及线性规划问题解的概念与性质, 然后再详细介绍线性规划问题的求解方法。

1.1 线性规划及其数学模型

我们首先通过一些简单的例子说明线性规划问题是一个什么样的问题。

1.1.1 线性规划问题

在社会经济活动中, 人们总是希望通过某种途径追求可能达到的最佳结果。企业在生产管理和经营活动中也经常会提出这样一类问题: 如何合理利用有限的人力、物力、财力等资源, 以便取得最好的效果。例如:

1) 配载问题

一交通工具, 运输几种不同体积、重量的物资, 如何装配, 所运的物资最多?

2) 下料问题

用某种圆钢制造长度不等的机轴, 如何下料, 所剩的余料最少?

3) 生产计划问题

企业生产 A、B 两种电器产品, 两种产品的市场需求状况可以确定, 按当前的定价可确保所有产品均能销售出去。企业可提供的两种原材料和劳动时间的数量是有限的。产品 A 与产品 B 各应生产多少, 可使企业总利润最大?

上述这些问题有如下共同特点:

(1) 问题解决要满足一定的条件, 称为约束条件。

(2) 问题有多个满足条件的解决方案。

(3) 问题解决有明确的目标要求, 对应不同方案有不同目标值, 可表示成目标函数。

这类问题可以是各种各样的具体问题, 但我们可将其归纳为一个一般问题,

就是“在一定约束条件下，求目标函数的最大或最小值。”我们称之为最优化问题或数学规划问题。在这类问题中，如果约束条件与目标函数均是线性的，我们就称之为线性规划问题。

线性规划问题要求目标函数与约束条件必须是线性的，隐含了如下假定：

(1) 比例性假定 每个决策变量的变化对目标函数和约束条件的影响与决策变量的改变量成比例。

(2) 可加性假定 每个决策变量对目标函数和约束条件的影响独立于其他变量；目标函数值是每个决策变量对目标函数贡献的总和。

(3) 连续性假定 线性规划问题中的决策变量取连续值。

(4) 确定性假定 线性规划问题中的所有参数均必须为确定的参数，不包含随机因素；线性规划问题是确定性问题。

因此，在运用线性规划解决实际问题时，必须注意问题在多大程度上满足这些假定。

1.1.2 线性规划数学模型

我们求解数学规划问题的主要方法是应用数学方法，将其抽象成数学模型，然后再对其求解。因此，对于一个实际问题，我们若要将其作为一个线性规划问题来处理，必须建立与实际问题对应的数学模型。我们用一个简单例子来说明如何建立数学规划问题的数学模型。

例 1.1（运输工具的配载问题）有一辆运输卡车，载重 2.5 t，容积 18 m³，用来装载如下两种货物：

箱装件 0.4m³，125kg；

包装件 1.5m³，20kg。

请问：如何装配，卡车所装物件个数最多？

解 根据题意，设所装箱装件 x_1 个，包装件 x_2 个，那么需要满足条件：

体积约束 $0.4x_1 + 1.5x_2 \leq 18$

重量约束 $125x_1 + 20x_2 \leq 2\,500$

非负约束 $x_1, x_2 \geq 0$

目标要求 $\max z = x_1 + x_2$

我们对上面的式子稍作整理，便可得到下面的形式：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} 0.4x_1 + 1.5x_2 \leq 18 \\ 125x_1 + 20x_2 \leq 2\,500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

这就是一个线性规划问题的数学模型。一个线性规划问题的数学模型包括两