中国数学奥林匹克委员会 编译

Mathematics

# 环球城市数学竞赛

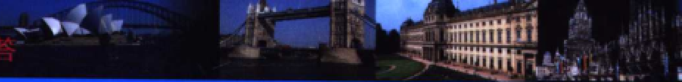
## 问题与解答 1

huanqiuchengshishuxuejingsai

wentiyujieda

开明出版社

Kaimingpress



环球城市数学竞赛问题与解答

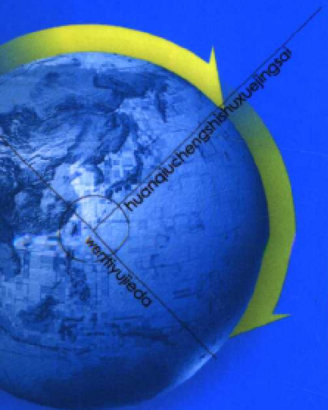
责任编辑：赵 菲

## 环球城市数学竞赛简介

环球城市数学竞赛是一项国际性的著名数学赛事，被视为国际数学奥林匹克竞赛（IMO）的热身赛。该比赛由俄罗斯科学院主办，每年举行两次，每次比赛有上百个城市，数十万名学生参加。比赛分初中组（初中二年级和初中三年级）与高中组（高中一年级和高中二年级）两种，参赛成绩优异者将由俄罗斯科学院颁发证书。

环球城市数学竞赛从上世纪70年代末至今，已有20多年的历史。该项竞赛试题活泼，难度高，对我国的中学生数学竞赛活动有很强的借鉴意义。

*本书是由九位中国数学奥林匹克委员会的*委员分别编译而成，他们也都是中国数学奥林匹克委员会聘任的国家级教练。




封面设计　北京羽人创意设计中心

ISBN 7-80133-812-X

9 787801 338129 >

ISBN 7-80133-812-X/G・727

定价：17.00元

中国数学奥林匹克委员会 编译

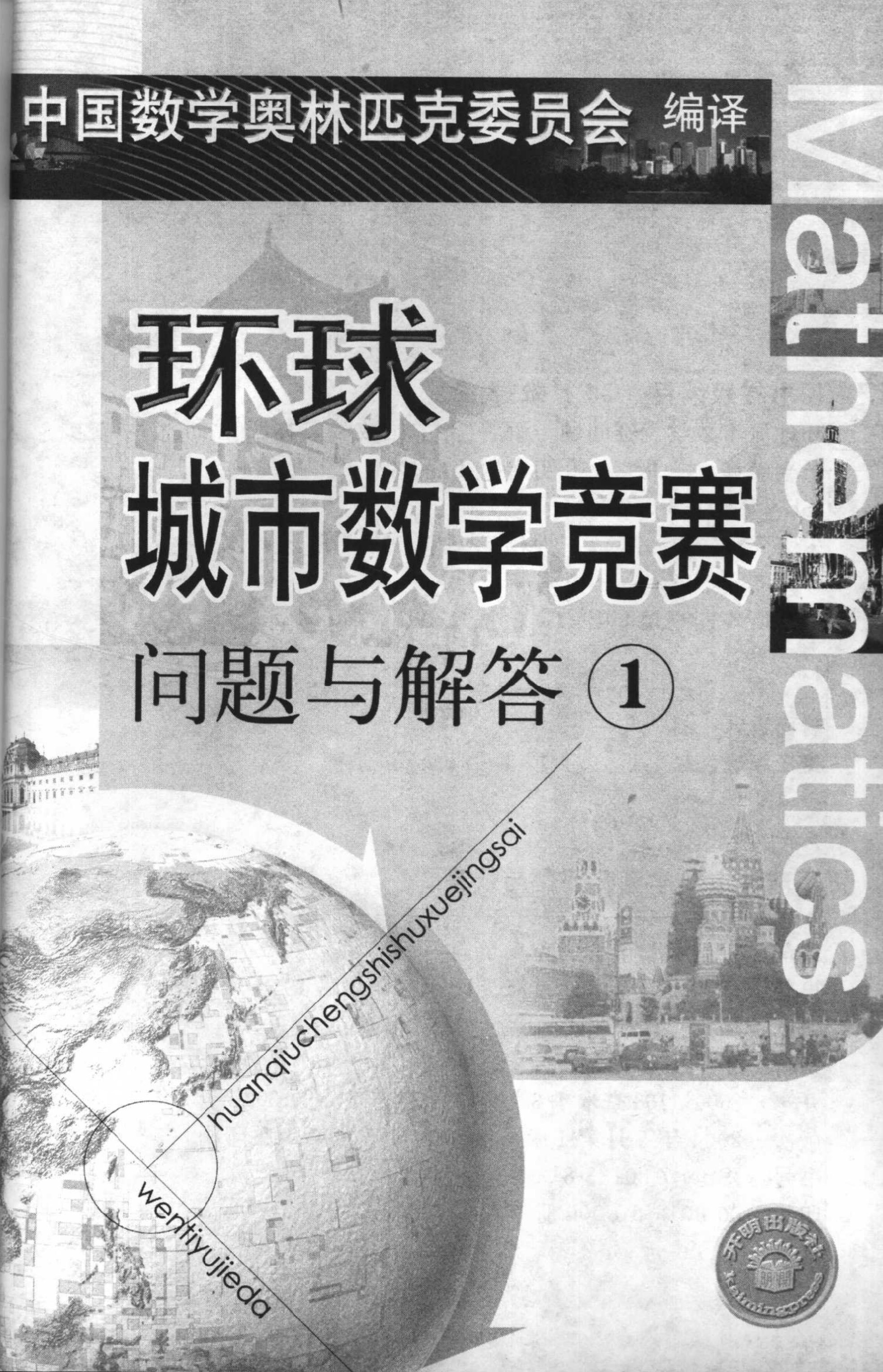
# 环球城市数学竞赛

## 问题与解答 ①

Mathematics

huanqiuchengshishuxuejingsai

wentiyujieda



开明出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

环球城市数学竞赛问题与解答①/中国数学奥林匹克委员会编译．—北京：开明出版社，2004.4

ISBN 7-80133-812-X

Ⅰ.环...　Ⅱ.中...　Ⅲ.数学课—中学—解题

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 054558 号

**封面设计：**羽　人

**责任编辑：**赵　菲

**环球城市数学竞赛问题与解答①**

编译　中国数学奥林匹克委员会

出版　开明出版社（北京海淀区西三环北路 19 号）

印刷　保定市印刷厂

发行　新华书店北京发行所

开本　850×1168 毫米 1/32 开　印张 11.625　字数 302 千

版次　2004 年 5 月第 1 版　　2004 年 5 月第 1 次印刷

书号　ISBN 7-80133-812-X/ G·727

印数　00 001～10 000 册

定价　17.00 元

# 序

本书是环球城市数学竞赛考题及其解答的中译本，包含了从 1980 年至 1998 年春季的全部试题与解答. 从 1980 年至 1997 年春季的全部试题与解答译自四本书：Mathematics Competition Enrichment Series 6，3，7，15. International Mathematics Tournament of the Towns. Published by The Australian Mathematics Trust：Questions and Solutions 1980 to 1984；1985 to 1989；1990 to 1993，all edited by P. J. Taylor；1994 to 1997，edited by P. J. Taylor and A. M. Storozhev. 从 1997 年秋季至 1998 年春季的全部试题与解答译自 P. J. Taylor 教授提供的英文材料.

环球城市数学竞赛从 1980 年开始，每年举行一次. 从 1982 年开始，改为每年举行两次. 这项竞赛分低年级（初中二年级和三年级）与高年级（高中一年级和二年级）两种. 在多数年份每次考试共进行两场，它相当于国际数学竞赛的一试及二试. 第一试每次四道题或五道题，第二试每次六道题或七道题，每道题上标出它的分数值，它们不完全相同.

环球城市数学竞赛的中心组织委员会主席和出题的教授都是由俄罗斯人担任. 参加者以城市为单位，其条件为：一、要交纳费用，其数额由该城市总人口来核算；二、前几名的考卷要全部译成英文. 从 1998 年秋季开始，亚洲部分地区委托台湾九章出版社董事长孙文先先生管理. 到目前为止，世界上参赛城市已有一百个左右.

中国的中学生数学竞赛活动开始于 1956 年. 在华罗庚教授的主持下，只在若干大城市中断断续续地进行了六届. 1967 年后，就被迫全部停止了. 从 1978 年起，又重新开始. 这一活动的范围，日益扩大到全国. 这是一项很好的中学生课外活

动、增加了中学同学学习数学的兴趣，提高了中学生的数学素质，增进了彼此间的友谊．同时，也对中学数学教师的提高与进修起到了很好的促进作用．不少数学家与中学老师都为之付出了心血与汗水．

从 1985 年开始，我国参加了国际数学奥林匹克竞赛（这项竞赛起始于 1959 年，在国际上，是中学生最重要的一项国际竞赛活动）．在 1986 年，我国选手的成绩就名列前茅．以后，多次取得国际数学奥林匹克竞赛国家团体总分第一，很多选手取得个人金牌、银牌和铜牌．我国还参加了少数地区国际数学竞赛，同样取得了很好的成绩．

关于数学竞赛的业务本身，我们虽然有很强的指导老师及取得了很好的竞赛成绩，但对数学竞赛考题的提出方面，我们与一些国家还有差距．我们应该认真地向他们学习．尤其要向数学竞赛有悠久历史积累与很强实力的俄国同行学习．这就是我们组织翻译这本书的主要目的．

本书是由九位中国数学奥林匹克委员会的委员分别编译而成，他们也都是中国数学奥林匹克委员会聘任的国家级教练．按姓氏笔画为序是：

王杰（北京大学），

许以超（中国科学院数学研究院），

李成章（南开大学），

张筑生（北京大学），

常庚哲（中国科学技术大学），

黄玉民（南开大学），

舒五昌（复旦大学），

裘宗沪（中国科学院数学研究院），

潘承彪（北京大学）.

他们在编译过程中，对于多数问题，采用了原始解答，但也作了不同程度的修改，因此本书并非完全按照原文作对应翻译，而是依据原文编译，作出了适合我国读者的解答. 所以上述九位教授灌注了更多的心血. 另一方面，在修改的过程中，或许会出现错误，还请读者指正.

中国数学奥林匹克委员会主席

王 元

中国科学院数学研究院

2003 年 10 月 25 日

# 目录

CONTENTS


序言 …………………………………………………… 王元(i)

1980 初中组春季赛问题 ………………………………… (1)

1980 初中组春季赛解答 ………………………………… (2)

1980 高中组春季赛问题 ………………………………… (11)

1980 高中组春季赛解答 ………………………………… (12)

1981 初中组春季赛问题 ………………………………… (13)

1981 初中组春季赛解答 ………………………………… (14)

1981 高中组春季赛问题 ………………………………… (17)

1981 高中组春季赛解答 ………………………………… (19)

1982 初中组春季赛问题 ………………………………… (25)

1982 初中组春季赛解答 ………………………………… (26)

1982 高中组春季赛问题 ………………………………… (29)

1982 高中组春季赛解答 ………………………………… (30)

1982 初中组秋季赛问题 ………………………………… (35)

1982 初中组秋季赛解答 ………………………………… (36)

1982 高中组秋季赛问题 ………………………………… (38)

1982 高中组秋季赛解答 ………………………………… (40)

1983 初中组春季赛问题 ………………………………… (49)

1983 初中组春季赛解答 ………………………………… (52)

1983 高中组春季赛问题 ………………………………… (58)

1983 高中组春季赛解答 ………………………………… (61)

1983 初中组秋季赛问题 ………………………………… (68)

1983 初中组秋季赛解答 ………………………………… (69)

1983 高中组秋季赛问题 ………………………………… (73)

1983 高中组秋季赛解答 ………………………………… (75)

## 目录

CONTENTS


1984 初中组春季赛问题 …………………………………… (79)
1984 初中组春季赛解答 …………………………………… (82)
1984 高中组春季赛问题 …………………………………… (88)
1984 高中组春季赛解答 …………………………………… (91)
1984 初中组秋季赛问题 …………………………………… (96)
1984 初中组秋季赛解答 …………………………………… (98)
1984 高中组秋季赛问题 …………………………………… (103)
1984 高中组秋季赛解答 …………………………………… (105)
1985 初中组春季赛问题 …………………………………… (109)
1985 初中组春季赛解答 …………………………………… (111)
1985 高中组春季赛问题 …………………………………… (118)
1985 高中组春季赛解答 …………………………………… (120)
1985 初中组秋季赛问题 …………………………………… (127)
1985 初中组秋季赛解答 …………………………………… (130)
1985 高中组秋季赛问题 …………………………………… (135)
1985 高中组秋季赛解答 …………………………………… (137)
1986 初中组春季赛问题 …………………………………… (141)
1986 初中组春季赛解答 …………………………………… (143)
1986 高中组春季赛问题 …………………………………… (147)
1986 高中组春季赛解答 …………………………………… (149)
1986 初中组秋季赛问题 …………………………………… (153)
1986 初中组秋季赛解答 …………………………………… (155)
1986 高中组秋季赛问题 …………………………………… (161)
1986 高中组秋季赛解答 …………………………………… (162)
1987 初中组春季赛问题 …………………………………… (167)

1987 初中组春季赛解答 ………………………………… (169)
1987 高中组春季赛问题 ………………………………… (175)
1987 高中组春季赛解答 ………………………………… (177)
1987 初中组秋季赛问题 ………………………………… (184)
1987 初中组秋季赛解答 ………………………………… (185)
1987 高中组秋季赛问题 ………………………………… (190)
1987 高中组秋季赛解答 ………………………………… (192)
1988 初中组春季赛问题 ………………………………… (198)
1988 初中组春季赛解答 ………………………………… (201)
1988 高中组春季赛问题 ………………………………… (208)
1988 高中组春季赛解答 ………………………………… (210)
1988 初中组秋季赛问题 ………………………………… (220)
1988 初中组秋季赛解答 ………………………………… (222)
1988 高中组秋季赛问题 ………………………………… (229)
1988 高中组秋季赛解答 ………………………………… (231)
1989 初中组春季赛问题 ………………………………… (240)
1989 初中组春季赛解答 ………………………………… (243)
1989 高中组春季赛问题 ………………………………… (253)
1989 高中组春季赛解答 ………………………………… (255)
1989 初中组秋季赛问题 ………………………………… (263)
1989 初中组秋季赛解答 ………………………………… (265)
1989 高中组秋季赛问题 ………………………………… (276)
1989 高中组秋季赛解答 ………………………………… (278)
1990 初中组春季赛问题 ………………………………… (292)
1990 初中组春季赛解答 ………………………………… (295)

## 目录

CONTENTS

1990 高中组春季赛问题 …………………………………… (306)
1990 高中组春季赛解答 …………………………………… (308)
1990 初中组秋季赛问题 …………………………………… (319)
1990 初中组秋季赛解答 …………………………………… (322)
1990 高中组秋季赛问题 …………………………………… (331)
1990 高中组秋季赛解答 …………………………………… (334)
1991 初中组春季赛问题 …………………………………… (340)
1991 初中组春季赛解答 …………………………………… (342)
1991 高中组春季赛问题 …………………………………… (350)
1991 高中组春季赛解答 …………………………………… (352)

# 1980 初中组春季赛问题

1 对圆周上已有的红点和蓝点可进行如下操作：或者加上一个红点，同时改变它的相邻两点的颜色 (即红变蓝，蓝变红)；或者去掉一个红点，同时改变其原来相邻两点的颜色. 设开始时圆周上仅有两个红点. 求证：经任意有限次上述操作，不可能出现圆周上仅有两个蓝点的状态.

2 在一个 $N\times N$ 数的阵列中，设 $N$ 个行是两两不等的 (两行只要在一个列中的两个数不等，就称这两行不等). 求证：可以去掉一列，使得剩下的阵列中的 $N$ 行仍然是两两不等的.

3 记 2,3,4,$\cdots$,102 的排列为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{101},$$

求所有满足以下条件的数列：对于 $k=1,2,\cdots,101$, $k$ 均能整除 $a_k$.

4 已给凸四边形 $ABCD$, 将它的每一边 $N$ 等分. 用直线段连接 $AB$ 边上的分点与 $DC$ 边上的相应分点 (这些线段称为第一类线段). 同样，用直线段连接 $BC$ 边上的分点与 $AD$ 边上的相应分点 (这些线段称为第二类线段). 从所组成的 $N^2$ 个小四边形中选出 $N$ 个，使得其中任意两个既至少被一条第一类线段分离，又至少被一条第二类线段分离. 求证所选的 $N$ 个小四边形的面积之和等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\dfrac{1}{N}$.

5 在一个边长为 1 的正方形上，有长度之和为 18 的有限条线段 (假设正方形含有它的边，线段都含它的端点)，每条线段平行该正方形的一条边. 若这些线段把正方形分割成若干个两两无相交内部的小区域. 求证这些小区域中至少有一个的面积不小于 0.01.

## 1980 初中组春季赛解答

**1 解** 设 $S$ 是该圆周满足下列条件之一的红点和蓝点分布状态集合:

(i) 全是其个数不被 3 整除的红点;

(ii) 有偶数个蓝点. 两个相邻蓝点之间的红点 (可能是空集) 称为一个链, 其个数 (可能是 0) 称为该链的长度, 从某一个链开始依顺时针顺序依次将每个链标上 " + " 或者 " − ". 记标以 " + " 的链之长度和为 $n$, 标以 " − " 的链之长度和为 $m$, 则 $n-m$ 不被 3 整除. (注意在 (ii) 中, 初始链的选取和顺时针与逆时针顺序的选取只影响 $n-m$ 的符号.)

不难验证 $S$ 中的一个状态经题中所说的操作所产生的状态仍在 $S$ 中. 因为初始状态在 $S$ 中, 所以无论经多少次操作, 所产生的状态都在 $S$ 中. 由于仅有两个蓝点的状态不在 $S$ 中, 从而经任意有限次操作, 不可能从仅有两个红点的状态产生仅有两个蓝点的状态.

**注** 不难证明: $S$ 中的任一状态均可以从仅有两个红点的初始状态经有限次操作产生. 进一步, 包含偶数个蓝点 (可能是 0 个), 但不在 $S$ 中的状态都可以从仅有两个蓝点的初始状态经有限次操作产生. 所有包含奇数个蓝点的状态可从仅有三个蓝点的初始状态经有限次操作产生.

**2 解一** 称数的阵列中某些列的集合 $C$ 区分某些行的集合 $R$, 如果 $R$ 中的行局限在 $C$ 上是两两不同的. 用归纳法可以证明以下与 $m$ 有关的命题 $P(m)$: "数的阵列中的前 $m$ 行可被它的某 $m-1$ 个列区分". 由此令 $m=N$, 立即可得要证的结论.

当 $m=2$ 时, 因为前两行不同, 所以存在一列, 使得它们

在这个列上的取值不同，即前两行被这个列区分，因此 $P(2)$ 成立. 设对于 $2 \le m < N$, $P(m)$ 成立，即存在由 $m-1$ 个列组成的集合 $C$, 使得 $C$ 区分前 $m$ 行. 关于第 $m+1$ 行有以下两种情况:

**(i)** 局限在 $C$ 上第 $m+1$ 行与前 $m$ 行都不相同. 此时集合 $C$ 就区分前 $m+1$ 行.

**(ii)** 存在 $1 \le i \le m$, 使得局限在 $C$ 上，第 $m+1$ 行与第 $i$ 行相同. 由于在整个 $N \times N$ 数的阵列中第 $m+1$ 行与第 $i$ 行不同，从而存在不属于 $C$ 的列区分第 $m+1$ 行和第 $i$ 行. 显然 $C$ 连同这一列区分前 $m+1$ 行，即 $P(m+1)$ 成立. 以上完成了命题 $P(m)$ 的归纳证明.

**解二** 反设要证的结论不成立，即若去掉已给数的阵列中的任一列，则在余下的阵列中至多有一对相等的行.

现考虑一个图 $G$, 它有 $n$ 个顶点 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, 其中 $r_i$ 对应第 $i$ 行， $i = 1, 2, \cdots, N$. 阵列中的每一列按下述规则恰好决定 $G$ 的一条边: "去掉第 $i$ 列后，选出一对相等的行，连它们对应的顶点所得之边记为 $C_i$, 称之为对应第 $i$ 列的边."

当 $N = 2$ 时，由反证法假设立即可得阵列中的两行相等，这与题设矛盾！

当 $N \ge 3$ 时， $G$ 中的一条边不能对应阵列中两个不同的列，即 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ 两两不同，否则就可得到一对相等的行，同样引出矛盾. 由此可知 $G$ 有 $N$ 个顶点和 $N$ 条边. 从图论定理可知 $G$ 必包含一个圈，即存在顶点序列 $r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_m}, r_{i_1}$, 使得 $m \ge 3$, 两个相邻顶点均有边相连，且前 $m$ 个顶点两两不同. 记连 $r_{i_k}$ 和 $r_{i_{k+1}}$ 的边为 $C_{j_k}$, $k = 1, 2, \cdots, m-1$, 连 $r_{i_m}$ 与 $r_{i_1}$ 的边为 $C_{j_m}$, 则 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 两两不同. 由 $G$ 中边的确定方法可知第 $i_1$ 行和第 $i_2$ 行仅在第 $j_1$ 列的数可能不同，从而它们在第 $j_m$ 列中的数相同. 同理可证第 $i_2$ 和第 $i_3$ 行在第 $j_m$ 列中的数相同，从而第 $i_1$ 行和第 $i_3$ 行在第 $j_m$ 列的数相同. 依此类推可知第 $i_1$

行和第 $i_m$ 行在第 $j_m$ 列的数相同. 又 $r_{i_1}$ 与 $r_{i_m}$ 有 $C_{i_m}$ 相连, 即第 $i_1$ 行和第 $i_m$ 行仅在第 $j_m$ 列的数可能不同, 于是第 $i_1$ 行与第 $i_m$ 行相等, 与题设矛盾！从而要证之结论成立.

**3 解** 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{101}$ 为所求的排列. 令 $a_{m_1}=102$. 若 $m_1\neq 1$, 则必有 $m_2$ 使得 $a_{m_2}=m_1$. 由题设可知 $m_1\neq 102$ 且 $m_1|102$, $m_2\neq m_1$, 且 $m_2|m_1$. 若 $m_2\neq 1$, 则必有 $m_3$, 使得 $a_{m_3}=m_2$. 显然 $m_3\neq m_2$, 且 $m_3|m_2$. 依此类推, 可知存在 $m_n$ 使得 $m_n=1$, 且 $a_{m_n}=m_{n-1}$. 记 $m_0=102$ 可得数列

$$m_0,m_1,\cdots,m_n, \tag{1}$$

其中 $m_n=1$, $a_{m_i}=m_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$m_i<m_{i-1},\quad m_i|m_{i-1},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

显然

$$\begin{aligned}&\{a_k\mid k\neq m_i,\ i=1,2,\cdots,n\}\\=&\{k\in\{1,2,3,\cdots,101\},\ k\neq m_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

再由 $k|a_k$ 可得

$$a_k=k,\quad k\in\{1,2,3,\cdots,101\},\quad k\neq m_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

反之满足 (2) 的数列 (1) 及 (3) 惟一确定所求的一个排列, 由此可知所求的排列恰有以下 13 个:

$$\begin{array}{llll}a_1=102, & & & a_k=k,\quad k=2,3,\cdots,101;\\ a_1=2, & a_2=102, & & a_k=k,\quad k=3,4,\cdots,101;\\ a_1=2, & a_2=6, & a_6=102, & a_k=k,\quad k\neq 1,2,6;\\ a_1=2, & a_2=34, & a_{34}=102, & a_k=k,\quad k\neq 1,2,34;\\ a_1=3, & a_3=102, & & a_k=k,\quad k\neq 1,3.\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllll}
a_1 = 3, & a_3 = 6, & a_6 = 102, & a_k = k, & k \neq 1,3,6; \\
a_1 = 3, & a_3 = 51, & a_{51} = 102, & a_k = k, & k \neq 1,3,51; \\
a_1 = 6, & a_6 = 102, & & a_k = k, & k \neq 1,6; \\
a_1 = 17, & a_{17} = 102, & & a_k = k, & k \neq 1,17; \\
a_1 = 17, & a_{17} = 34, & a_{34} = 102, & a_k = k, & k \neq 1,17,34; \\
a_1 = 17, & a_{17} = 51, & a_{51} = 102, & a_k = k, & k \neq 1,17,51; \\
a_1 = 34, & a_{34} = 102, & & a_k = k, & k \neq 1,34; \\
a_1 = 51, & a_{51} = 102, & & a_k = k, & k \neq 1,51.
\end{array}
$$

**4 解** 首先证明两个辅助结果。

**引理 1** 设 $ABCD$ 是凸四边形，$E, F, G, H$ 分别是 $AB, BC, CD, DA$ 边上的点，使得

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DG}{GC} = \alpha, \quad \frac{BF}{FC} = \frac{AH}{HD} = \beta,$$

记 $K$ 是 $EG$ 和 $FH$ 的交点，则

$$\frac{HK}{KF} = \alpha, \quad \frac{EK}{KG} = \beta.$$

**证** 如果 $ABCD$ 是平行四边形，要证之结论显然成立. 否则作平行四边形 $ABC'D$ 如下页图. 分别在 $BC'$ 和 $C'D$ 上取点 $F'$ 和 $G'$, 使得 $FF' \parallel GG' \parallel CC'$. 记 $EG'$ 和 $F'H$ 的交点为 $K'$, 在 $EG$ 上取点 $K''$ 使得 $K''K' \parallel GG'$. 易知

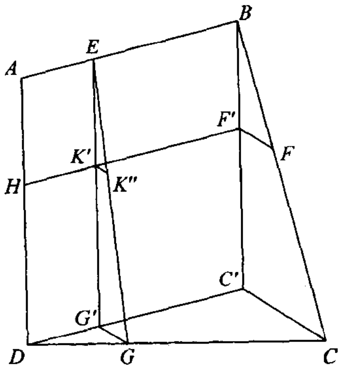
$$\frac{FF'}{CC'} = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad \frac{GG'}{CC'} = \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

由于

$$\frac{BF'}{F'C'} = \frac{BF}{FC} = \frac{AH}{HD} = \beta,$$

又

$$\frac{DG'}{G'C'} = \frac{DG}{GC} = \frac{AE}{EB} = \alpha,$$




从 $ABC'D$ 是平行四边形可得

$$\frac{EK'}{K'G'}=\beta.$$

由此可得

$$\frac{K''K'}{GG'}=\frac{\beta}{\beta+1}.$$

于是

$$\frac{K''K'}{FF'}=\frac{K''K'}{GG'}\cdot\frac{GG'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{FF'}=\frac{\beta}{\beta+1}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot\frac{\beta+1}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+1},$$

从而 $K''$ 在 $FH$ 上. $K$ 与 $K''$ 都是 $EG$ 和 $FH$ 的交点，所以 $K=K''$, 且

$$\frac{EK}{KG}=\frac{EK'}{K'G'}=\beta,\quad \frac{HK}{KF}=\frac{HK'}{K'F'}=\alpha.$$

**引理 2** 设 $ABCD$ 是凸四边形， $N$ 等分 $AB$ 和 $CD$, 并用线段连结对应的分点， $M$ 等分 $BC$ 和 $DA$, 也用线段连结对应的分点. 由此得到 $N\times M$ 个小四边形的面积标记如下页图: