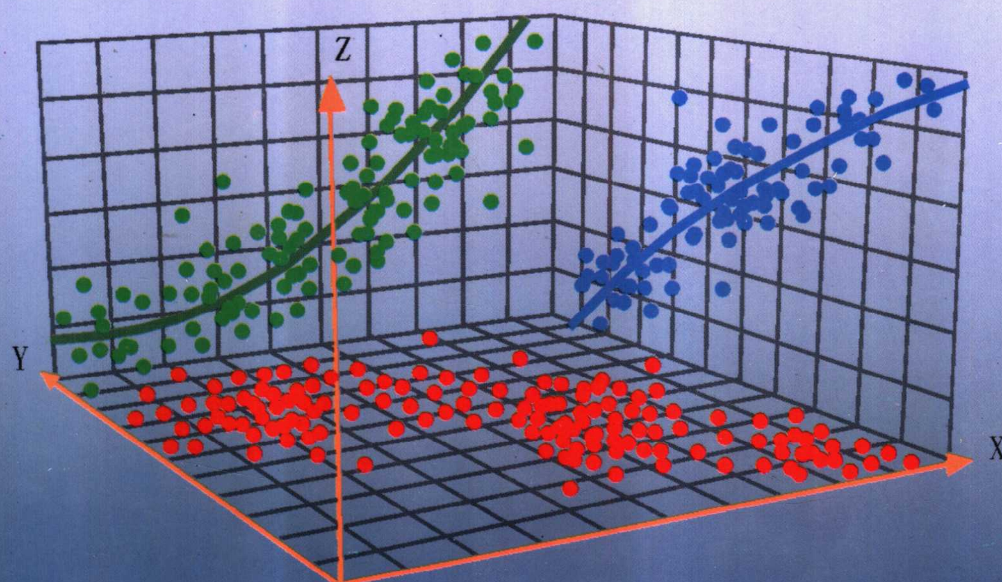
环境数学模型

ENVIRONMENTAL MATHEMATICAL MODEL

宋新山 邓 伟 编著



科学出版社
www.sciencep.com

环境数学模型

ENVIRONMENTAL MATHEMATICAL MODEL

宋新山　邓　伟　编著

北　京

内 容 简 介

作者根据多年从事环境数学模型方面的科研和教学工作,以及取得的重要成果,同时参考了国内外大量文献与最新科研成果,撰写了此书。本书有三个特色:一是内容丰富,突出全面性;二是深入浅出,突出实用性;三是系统性强,突出整体性。

本书可做为高等院校环境科学与工程类专业本科生或研究生的教材和参考书。也可以供从事环境科学研究及环境规划、环境管理的专业人员应用与参考。

图书在版编目(CIP)数据

环境数学模型/宋新山,邓伟编著.—北京:科学出版社,2004.9

ISBN 7-03-014164-4

Ⅰ.环… Ⅱ.①宋…②邓… Ⅲ.环境数学—数学模型 Ⅳ.X11

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第082657号

责任编辑:孟宪玺 张树清/封面设计:张树清 肖海福

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http://www.sciencep.com

长春市凤杰制印工厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2004年9月第一版 开本:787×1 092 1/16

2004年9月第一次印刷 印张:26 5/8

印数:平装900 精装100 字数:600 000

定价:65.00元(平装)

75.00元(精装)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序　言

环境与可持续发展是当今世界关注的重要议题，可持续发展的关键是协调好经济发展和环境保护之间的关系，这种协调有赖于应用系统论的观点研究环境系统内部各个组成部分和要素之间的对立统一关系，也有赖于研究环境质量和社会经济发展的对立统一关系，建立最佳的经济结构和环境－经济布局。环境科学的发展给日益显现和加剧的环境问题的解决提供了重要方法和技术。

环境质量的恶化与人类活动密切相关，许多问题呈现着复杂非线性关系，如何用数学语言描述和刻画环境问题的复杂过程与变化关系，是分析研究解决污染物在环境系统中产生、迁移、归宿的关键，以便有科学依据地对其进行控制和预测，建立最佳的污染防治体系。

运用系统论思想实现环境科学研究、环境保护与管理，以及污染控制目标，关键是要靠环境数学模型揭示环境系统各组成要素之间的相互关系，所以环境数学模型是环境系统分析的技术核心，其涉及到环境科学、数学、计算机科学、生态学、经济学等相关学科的知识。因此，从事环境科学研究与教学工作的专职人员应该掌握相关的综合知识，特别是对培养专业基础知识扎实、知识面宽广的复合型环境科学专业人才而言，熟练掌握和应用环境数学模型尤显重要。

随着国家对环境安全战略的日益重视，区域环境系统规划已经被列入到环境管理的重要日程，迫切需要深化对环境系统的认识。因而，在计算技术快速发展的基础上，建立环境系统的数学模型，并正确求解它，可为定量化、系统化认识环境变化过程和环境问题的科学分析与预测提供方法和手段。

《环境数学模型》一书是作者在教学和科研的实践中总结而成的，其中既有作者在教学中的实践经验总结，又有作者在长期的科研实践中的科研成果，既包含了环境数学模型的传统基础知识，又集成了国内外在环境数学模型和环境系统分析方面的最新研究成果。同时本书的一个显著特点是内容的丰富性和实用性。《环境数学模型》的内容囊括了环境数学模型应用的各个方面，对于具有一定的环境科学专业知识、掌握高等数学、线性代数、概率论与数理统计基本知识的读者，比较易于学习和掌握，可作为教师、科研人员和环境管理人员的教材或参考书，便于查阅和实际应用。

“纸上得来终觉浅，须知此事要躬行”，希望读者能够在学习、教学和科研的实践中，参考本书内容而加以应用，我相信本书的出版，将有益于丰富我国环境科学研究的理论与方法，进一步推动环境科学研究向定量化方向发展。

林学钰

2004.4.20

前　言

环境问题的定量化认识,需要数据的收集、整理与分析,并根据其变化特征,对环境问题产生的机理进行深刻的揭示,为环境管理提供决策依据。这就需要借助于数学工具,建立正确的环境数学模型。

环境科学是一门综合性很强、而又发展迅速的科学。在其发展过程中,不但一些经典的环境数学模型逐渐在完善,如河流水质 S－P 模型、大气污染扩散的高斯模型、多目标规划决策模型、环境经济投入产出模型等,而且许多新数学模型方法在环境科学中逐渐得到应用,如灰色系统中的灰色预测、灰色关联分析、地学中的空间分异模型、生态学中的分室模型、酸雨负荷模型,一些非线性科学的理论,如神经网络、混沌和分形、分维模型等也逐步扩展其在环境科学中的应用。然而,这些新方法、新理论、新成果目前还没有得到系统的集成。

仅就环境数学模型方面的教材而言,主要使用的是 20 世纪 90 年代初期编写的环境系统分析类教材,其中,许多新的数学模型理论和方法都没有收编进去。教师在讲述的过程中,需要补充大量教学内容,给教学过程带来了不便。

本书根据作者从事环境数学模型方面的科研和教学工作,结合作者在环境数学模型方面的研究成果,参考大量国内外文献,收纳了环境数学模型方面的最新研究成果。本书主要有三个方面的特色:一是内容丰富,突出全面性。收纳了许多目前的环境数学模型类或环境系统分析类教材中没有包含的内容,如污染损失率评价模型、区域环境空间分异模型、数据包络分析模型等。二是深入浅出,突出实用性。着重论述数学模型在环境科学中具体应用的概念、原理和方法,力求作到抽象问题具体化,数学问题实际化,不偏重于严密的数学论证,一些复杂的环境数学模型主要靠例题的详细讲述教会读者如何应用,着重于讲清方法和思路,略去了几乎所有的理论证明和技术细节。对于必备的环境数学基础知识,在第一章中分类专门列出,便于读者查阅和选读。三是系统性强,突出整体性。以环境数学模型建立的基本理论、方法为出发点,以环境系统的系统化、模型化和最优化为主线,着重讲述其在环境科学各重点学科领域,如环境质量评价、环境规划、环境管理、环境生态学等方面的应用。

鉴于作者的知识水平和能力有限,书中疏漏之处在所难免,恳请各位专家学者和广大读者批评指正。

本书编写过程中得到了中国科学院东北地理与农业生态研究所张树清研究员、东华大学汪永辉副教授的帮助和指导,付梓之前,承蒙中国科学院院士、吉林大学博士生导师林学钰教授作序,并得到科学出版社的大力支持,在此一并表示衷心感谢!

作　者

2004 年 4 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第一章　环境数学基础知识 …… (1)
　第一节　线性代数基础 …… (1)
　　一、行列式的概念与性质 …… (1)
　　二、矩阵的概念及相关运算 …… (4)
　　三、向量的线性关系 …… (10)
　　四、线性方程组及其解 …… (11)
　　五、特征根与特征向量 …… (18)
　第二节　概率论与数理统计 …… (19)
　　一、概率论基本概念 …… (19)
　　二、随机变量及其分布 …… (23)
　　三、随机变量的数字特征 …… (26)
　　四、数理统计的基本问题 …… (28)
　第三节　微积分基础知识 …… (36)
　　一、导数与微分 …… (36)
　　二、不定积分和定积分 …… (37)
　　三、微分方程及微分方程组的求解 …… (37)
　第四节　运筹学基础 …… (40)
　　一、线性规划 …… (40)
　　二、非线性规划 …… (49)
　　三、多目标规划 …… (52)
　　四、动态规划 …… (54)
　　五、对策与决策论 …… (56)
　第五节　灰色模型基础 …… (60)
　　一、概述 …… (60)
　　二、生成数的基本概念 …… (61)
　　三、灰色关联分析 …… (62)
　　四、灰色预测模型基础 …… (63)
第二章　环境问题的数学模型概述 …… (66)
　第一节　环境数学模型概述 …… (66)
　　一、数学模型及其特征 …… (66)
　　二、环境系统分析与环境数学模型 …… (67)
　　三、环境数学模型的分类 …… (71)
　　四、数学模型在环境科学中的应用 …… (72)
　第二节　环境数学模型的建立 …… (72)

一、建模的概念 …………………………………………………………………………… (72)
二、模型概念化方法 ………………………………………………………………………… (75)
三、模型系统结构的确定 …………………………………………………………………… (77)
四、参数估计的一般方法 …………………………………………………………………… (81)
五、模型的检验和修正 ……………………………………………………………………… (94)
六、灵敏度分析 ……………………………………………………………………………… (96)
第三节　环境数学模型建模的基本方法 ……………………………………………………… (103)
一、机理分析法 ……………………………………………………………………………… (103)
二、数据分析法 ……………………………………………………………………………… (111)
第三章　环境质量基本模型 ………………………………………………………………… (115)
第一节　环境质量的基本概念 ………………………………………………………………… (115)
第二节　基本环境流体动力学模型 …………………………………………………………… (116)
一、污染物在环境流体介质中的基本流体力学过程 ……………………………………… (116)
二、基本环境流体动力学模型 ……………………………………………………………… (119)
第三节　基本模型的解析解 …………………………………………………………………… (121)
一、求解析解的基本方法 …………………………………………………………………… (121)
二、非稳定源排放的解析解 ………………………………………………………………… (123)
三、稳定源排放下的解析解 ………………………………………………………………… (131)
第四节　污染物在流场中的分布特征和模型参数估计 ……………………………………… (133)
一、污染物在流场中的分布特征 …………………………………………………………… (133)
二、基本环境流体动力学模型参数估计 …………………………………………………… (134)
第五节　基本环境流体动力学模型的数值解 ………………………………………………… (137)
一、有限差分法基本概念 …………………………………………………………………… (137)
二、基本环境流体动力学模型的有限差分解 ……………………………………………… (138)
第六节　地表水环境数学模型 ………………………………………………………………… (141)
一、河流水质模型 …………………………………………………………………………… (141)
二、河口水质模型 …………………………………………………………………………… (152)
三、湖泊和水库水质模型 …………………………………………………………………… (153)
第七节　环境空气质量模型 …………………………………………………………………… (160)
一、箱式环境空气质量模型 ………………………………………………………………… (160)
二、高架点源扩散模型 ……………………………………………………………………… (162)
三、线源扩散模式 …………………………………………………………………………… (169)
四、面源扩散模式 …………………………………………………………………………… (172)
五、长期平均浓度模式 ……………………………………………………………………… (175)
六、环境空气质量模型中的参数估计 ……………………………………………………… (175)
第八节　声环境质量数学模型 ………………………………………………………………… (182)
一、度量环境噪声的物理量 ………………………………………………………………… (182)
二、噪声传播过程中的衰减 ………………………………………………………………… (185)

三、声环境预测数学模型 …… (187)
第九节　土壤环境质量基本模型 …… (189)
一、土壤污染及扩散过程的基本模型 …… (190)
二、土壤污染累积模型 …… (191)
第四章　环境容量模型 …… (193)
第一节　环境容量的概念 …… (193)
一、绝对环境容量模型 …… (194)
二、空间环境容量 …… (194)
三、考虑自净力的环境容量 …… (195)
第二节　水环境容量模型 …… (195)
一、概述 …… (195)
二、河流水环境容量模型 …… (196)
三、湖泊水环境容量模型 …… (201)
四、水环境中重金属的环境容量模型 …… (204)
第三节　大气环境容量模型 …… (206)
一、大气环境容量的箱模式 …… (206)
二、大气环境容量的 K 值和 P 值模式 …… (207)
三、大气环境污染物总量控制和分配模型 …… (209)
第四节　土壤环境容量模型 …… (212)
一、静态土壤环境容量模型 …… (212)
二、动态土壤环境容量模型 …… (213)
第五节　关于有偿使用环境容量的模型 …… (214)
第五章　环境污染控制规划模型 …… (216)
第一节　环境规划的概念与原理 …… (216)
一、环境规划的基本概念 …… (216)
二、环境规划的基本原理及类型 …… (216)
第二节　大气环境污染控制规划模型 …… (218)
一、比例削减规划模型 …… (218)
二、大气污染迁移规划模型 …… (222)
三、大气污染控制多目标规划模型 …… (225)
第三节　水环境污染控制规划模型 …… (226)
一、污染带控制规划模型 …… (227)
二、排污口最优化处理规划模型 …… (228)
三、均匀处理最优规划模型 …… (235)
四、流域工业园区水污染控制多目标规划组合模型 …… (238)
第六章　环境质量评价模型 …… (243)
第一节　环境质量评价的基本概念 …… (243)
第二节　环境质量指数评价模型 …… (244)

一、单因子指数评价模型 …………………………………………………………… (244)
二、多因子指数评价模型 …………………………………………………………… (244)
第三节 污染损失率评价模型 ……………………………………………………… (248)
一、环境污染的"S"型非线性效应 ………………………………………………… (249)
二、单因素的污染损失函数 ………………………………………………………… (249)
三、综合污染损失率模型 …………………………………………………………… (250)
四、污染损失率模型与其它常用评价方法的对比 ………………………………… (251)
第四节 区域污染源评价模型 ……………………………………………………… (253)
一、概述 ……………………………………………………………………………… (253)
二、等标污染负荷模型 ……………………………………………………………… (253)
第五节 层次分析模型 ……………………………………………………………… (257)
一、层次分析法原理 ………………………………………………………………… (257)
二、层次分析法的计算过程 ………………………………………………………… (259)
第六节 模糊综合评价模型 ………………………………………………………… (262)
一、模糊集合概念 …………………………………………………………………… (262)
二、模糊集的基本运算 ……………………………………………………………… (263)
三、模糊综合评价 …………………………………………………………………… (264)
第七节 环境质量的聚类分析模型 ………………………………………………… (269)
一、相似系数和距离 ………………………………………………………………… (269)
二、系统聚类分析 …………………………………………………………………… (270)
三、模糊聚类分析 …………………………………………………………………… (272)
第八节 主成分分析模型 …………………………………………………………… (274)
一、主成分分析概述 ………………………………………………………………… (274)
二、主成分分析计算过程 …………………………………………………………… (275)
第九节 因子分析模型 ……………………………………………………………… (279)
一、因子分析概述 …………………………………………………………………… (279)
二、因子分析计算过程 ……………………………………………………………… (280)
第十节 数据包络分析评价模型 …………………………………………………… (285)
一、数据包络模型介绍 ……………………………………………………………… (285)
二、DEA 模型在清洁生产评价中的应用 ………………………………………… (287)
第七章 环境经济数学模型 ………………………………………………………… (291)
第一节 环境费用效益分析模型 …………………………………………………… (291)
一、环境费用效益分析的一般概念 ………………………………………………… (291)
二、环境费用效益分析技术模型 …………………………………………………… (293)
第二节 排污收费计算模型 ………………………………………………………… (294)
一、排污收费一般概念 ……………………………………………………………… (294)
二、排污收费计算模型 ……………………………………………………………… (295)
第三节 环境－经济系统投入产出模型 …………………………………………… (297)

一、投入产出的基本原理 …………………………………………… (297)
二、环境-经济投入产出模型 …………………………………………… (303)
三、环境资源投入产出优化模型 …………………………………………… (307)
第八章 环境预测模型 …………………………………………… (311)
第一节 回归预测模型 …………………………………………… (311)
第二节 马尔可夫链状预测模型 …………………………………………… (313)
一、马尔可夫链状预测的基本概念 …………………………………………… (313)
二、马尔可夫链状预测模型 …………………………………………… (314)
三、马尔可夫过程的平稳模型 …………………………………………… (318)
第三节 灰色预测模型 …………………………………………… (320)
一、灰色灾变预测 …………………………………………… (320)
二、灰色系统预测 …………………………………………… (322)
第四节 污染物排放量预测模型 …………………………………………… (324)
一、*M* 系数预测法 …………………………………………… (324)
二、弹性系数预测法 …………………………………………… (324)
第五节 人工神经网络模型 …………………………………………… (326)
第九章 环境决策模型 …………………………………………… (330)
第一节 环境决策的一般概念 …………………………………………… (330)
一、决策分析的步骤 …………………………………………… (330)
二、环境决策分析的层次 …………………………………………… (331)
第二节 常用环境决策模型 …………………………………………… (332)
一、决策树模型 …………………………………………… (332)
二、决策矩阵模型 …………………………………………… (335)
三、多目标决策模型 …………………………………………… (337)
四、灰色局势决策模型 …………………………………………… (342)
第十章 环境生态学数学模型 …………………………………………… (346)
第一节 环境空间变异分析模型 …………………………………………… (346)
一、环境空间变异的基本概念 …………………………………………… (346)
二、地统计学模型 …………………………………………… (347)
三、趋势面分析模型 …………………………………………… (366)
四、环境排序分析模型 …………………………………………… (374)
第二节 生态系统内物质循环分室模型 …………………………………………… (380)
一、单室模型 …………………………………………… (381)
二、多室模型 …………………………………………… (382)
第三节 种群动态模型 …………………………………………… (386)
一、基本概念 …………………………………………… (386)
二、单一种群增长模型 …………………………………………… (389)
三、种间作用下的种群增长模型 …………………………………………… (392)

四、种群动态的矩阵模型 …………………………………………………………（396）
第十一章　非线性科学在环境建模中的应用 ……………………………………………（399）
第一节　非线性系统动力学分析方法 ……………………………………………（399）
第二节　突变理论用于环境生态模型的分析 ………………………………………（402）
第三节　分形与分维用于环境系统分析 …………………………………………（405）
一、基本概念 ………………………………………………………………（405）
二、分维的计算 ……………………………………………………………（406）
三、分维在环境系统分析中的应用 ………………………………………………（408）
主要参考文献 ………………………………………………………………（411）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　环境数学基础知识

在环境数学模型的建立和求解过程中，会用到线性代数、概率论、数理统计、运筹学、微积分、灰色系统、模糊数学等重要数学分支的知识。这些知识有的在大学基础数学课程中已经学习过，有些属于较新的数学分支，如灰色系统，一般的大学基础数学课程中没有涉及。作为环境数学模型的基础知识，也为了进一步完善我们的环境数学知识，本章对这些数学分支的重要概念、原理、定理、计算方法等作一介绍。需要注意的是，由于本书偏重于对这些数学知识的应用，因此主要对这些基础知识作一论述，关于一些重要原理的证明，请参考有关的数学专著。

第一节　线性代数基础

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以用线性关系表示出来。线性代数主要是研究线性关系的一个重要数学分支，不仅在数值计算、概率统计等数学研究中具有重要作用，而且在自动控制、机械电子、环境科学等许多学科中应用越来越广泛。特别是随着科研和实践中定量化研究的逐渐深入和成熟，线性代数不仅在自然科学中，而且在社会科学中的应用也在逐步推广。由于线性代数在大量数据处理上的优势，在上一世纪 60 年代电子计算机迅速发展的基础上，线性代数成为应用计算机进行数据处理的基本工具。环境科学是以环境系统为研究对象的学科，其中的环境系统包括生物和非生物的各种环境因素及其相互关系的总和。按照系统科学的原理，在各个环境子系统之间和子系统内部，不但存在着许多非线性关系，而且也存在大量的线性关系，如何揭示这种线性关系，并用数学的语言准确和简洁地描述出来，成为环境科学借助数学工具进行定量化研究的有力方面。本节的目的是帮助读者整理在环境数学研究中必备的线性代数基础知识，以有利于后续章节的学习和应用。

一、行列式的概念与性质

1. 行列式的概念

用二阶行列式可以解两个未知量的线性方程组，用三阶行列式可以解三个未知量的线性方程组。一般，n 个未知量的线性方程组是否也能这样求解？ n 阶行列式就是根据这个需要产生的。就人类认识事

物的顺序来说，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。

二阶行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

其中 $a_{ij}(i = 1,2;j = 1,2)$ 表示这个行列式的第 i 行和第 j 列。

三阶行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-2}$$

其中 $a_{ij}(i = 1,2,3;j = 1,2,3)$ 表示这个行列式的第 i 行和第 j 列。

从上述定义可见：一个二阶行列式有二项(2!)，一项前面为“+”号，另一项前面为“-”号，每项是二个元素的乘积，每个元素取自不同的行和不同的列；三阶行列式共有六项(3!)，前三项前面为“+”号，后三项前面加“-”号，每项是三个元素的乘积，每个元素取自不同的行和不同的列。无论二阶或三阶行列式，实线方向元素的乘积均取“+”号，虚线方向元素的乘积均取“-”号。上述用虚实线连接得到行列式值的方法称为对角线法。

根据二阶行列式与三阶行列式的定义，考察其展开计算的关系可得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

上式中，把元素 $a_{ij}(i = 1,2,3;j = 1,2,3)$ 所在的第 i 行与第 j 列元素划去，余下的元素所构成的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，同时称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。依此定义，三阶行列式可以表示成它的任一行的每个元素与它的代数余子式（二阶行列式）的乘积之和，称行列式按行展开，当然行列式也可以按列展开。

根据上述定义，三阶行列式按行（或列）展开可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1,2,3) \tag{1-4}$$

利用二阶行列式和三阶行列式的定义和关系，用归纳法给出 n 阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-5}$$

式中各符号与前述相同,上式称 n 阶行列式按第 i 行展开。

例 1.1:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

2. **行列式的基本性质**

在明确行列式定义的基础上,讨论行列式的基本性质。在此我们仅注重对行列式性质的应用,因此仅列出行列式的基本性质,而不对这些性质的证明作过多的论述。

性质 1:将行列式 D 的行变为列(或列变为行),不改变它们之间的前后顺序得到的行列式称为原行列式的转置行列式,记为 D^T,并且 $D = D^T$。即:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

例 1.2:
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -12$$

性质 2:假如行列式的某行(列)中所有元素同用数 k 乘,结果等于用 k 乘该行列式,或者说,某行(或列)中所有元素有公因数 k,可以把 k 提到行列式外面。即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

上述性质说明,如果行列式某行(或列)中的元素全部为零,则行列式等于零。

性质 3:如果行列式中第 i 行(或列)中的元素都可以写成两项的和,则该行列式等于两个行列式的和。即:

如果:$a_{ij} = b_j + c_j, j = 1,2,\cdots,n$,则有:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

例 1.3：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1+1 & 2+2 & 5+1 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 8 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 0+8=8$

性质 4：如果把行列式中任意两行（或列）互换，行列式只改变符号。

例 1.4：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 8$　而 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -8$

推论 1：由性质 4 可推得如果行列式中任意两行（或列）完全相同，则行列式等于零。这是由于这两行互换后行列式反号，而实际上由于这两行（或列）完全相同，互换后行列式不变，因此结果只能是行列式等于零。

推论 2：由性质 2 和推论 1 可得，行列式中如果有任意两行（或列）对应成比例，则该行列式等于零。这是由于有任意两行（或列）对应成比例的行列式按性质 2 提取公因子后，行列式有两行（或列）相等，因此根据推论 1 行列式等于零。

性质 5：如果把行列式的某行（或列）中的各元素同乘以数 k 后，加到另一行（或列）上 $(i \neq j)$，则该行列式不变。

例 1.5：将第一行乘以 2 加到第 2 行上

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2+2 & 4+4 & 6+10 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} + 2\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 8+0=8$$

二、矩阵的概念及相关运算

1. 矩阵的相关概念

定义：由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的如下形式的具有 m 行 n 列的矩形数表，称为一个 $m \times n$ 阶矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \tag{1-9}$$

其中的 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij} 称为矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素。为了标明矩阵的行数和列数，也可用 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 表示上述矩阵。

矩阵和行列式虽然形式上相似，但二者之间实际上是有严格区别的，首先矩阵实质上

是一个数表，而行列式的最终计算结果只是一个数；其次矩阵的行数和列数可以不相等，而行列式必然有相等的行数和列数。

下面介绍几种特殊形式的矩阵，它们在矩阵的运算中具有重要作用。

行矩阵：只有一行的矩阵，如 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为行矩阵。

列矩阵：只有一列的矩阵，如 $B = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$称为列矩阵。

方阵：行数和列数均为 n 的矩阵称为 n 阶方阵。

零矩阵：元素全部为零的矩阵称为零矩阵。

对角矩阵：n 阶方阵从左上方到右下方的对角线上的元素 $d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn}$（即 $d_{ij}, i = j$）称为主对角线元素，它们所在的一条对角线称为主对角线。如果主对角线上的元素不为零，而矩阵中其它元素为零，则称这样的矩阵为对角矩阵，记为：

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn}) \tag{1-10}$$

单位矩阵：特别地，矩阵主对角线元素全为 1，而其它元素全为零，则称为单位矩阵。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

上三角矩阵：方阵中零元素全部集中在主对角线左下方的矩阵称为上三角矩阵，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

下三角矩阵：方阵中零元素全部集中在主对角线右上方的矩阵称为下三角矩阵，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

2. 矩阵的运算和性质

矩阵的加（减）法：设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和（或差）记为 $A + B$（或 $A - B$），矩阵相加（减）表示矩阵中对应元素的分别相加（减），即：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

需要注意的是,矩阵相加(减)必须满足两个矩阵的行数和列数对应相等,即两个矩阵的行数相等,列数也相等。矩阵的加(减)法满足如下规律,即:

①$A \pm B = B \pm A$;②$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$。

数与矩阵的乘法:以数 k 乘以矩阵 A 中的每一个元素得到的矩阵,称为数 k 与矩阵 A 的乘积,记为 kA 或 Ak,即:

$$kA = Ak = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-15}$$

数与矩阵相乘满足如下规律(设 A,B 为 $m \times n$ 矩阵,λ,μ 为数),即:

①$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;②$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;③$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$。

矩阵的乘法:设矩阵 $A_{m\times l} = (a_{ik})_{m\times l}$ 是一 $m \times l$ 矩阵,矩阵 $B_{l\times n} = (b_{kj})_{l\times n}$ 是一 $l \times n$ 矩阵,那么矩阵 AB 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵,其中的元素 c_{ij} 为:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-16}$$

并把此乘积记为 $C = A \times B$。

需要注意的是,矩阵相乘必须满足前一个矩阵的列数和后一个矩阵的行数相等。

例 1.6:设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,求 AB 与 BA。

解:A 是 2×3 矩阵,B 是 3×2 矩阵,A 的列数和 B 的行数相等,因此 A 与 B 可以相乘,AB 是 2×2 矩阵。

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

由于 B 的列数与 A 的行数均为 2,因此 B 与 A 也可以相乘,BA 是 3×3 矩阵。

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

由上例可见,矩阵的乘法不满足交换律,即在一般情况下,$AB \neq BA$。为了强调两个矩阵相乘的次序,一般称 A 乘以 B 为 A 左乘 B,或 B 右乘 A,记为 AB。

如果 A 为 $1 \times n$ 矩阵,B 为 $n \times 1$ 矩阵,则 AB 为 1 阶方阵,而 BA 为 n 阶方阵。

例 1.7:设矩阵 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$,$B = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$ 则 $AB = [a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com