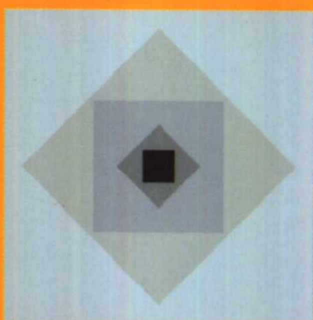
21 数学天元基金

现代应用数学方法丛书 ⑨

小波分析与文本文字识别

唐远炎 王玲 著



科学出版社
www.sciencep.com

现代应用数学方法丛书 9

小波分析与文本文字识别

唐远炎　王　玲　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

小波分析是近10年来在科学技术领域倍受关注的一门新学科，它不仅有完整的数学理论作支撑，同时又有广泛的应用工程作背景，对信号处理、图像处理、通讯、遥感、地球物理、控制系统和生物医学工程等都有重大影响.

本书从6个方面介绍了小波、多分辨分析、常用小波基、小波基在不同问题上的推广、利用连续小波变换进行文字(模式)的轮廓提取、小波分析在文本文字处理中的各种应用等内容.

本书可供计算机、生物医学、地球物理、图像处理、信号处理等专业的本科生、研究生、教师及工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

小波分析与文本文字识别/唐远炎，王玲著 —北京：科学出版社，2004

(现代应用数学方法丛书/方开泰主编)

ISBN 7-03-011563-5

Ⅰ.小… Ⅱ.①唐…②王… Ⅲ.小波分析-应用-文字识别 Ⅳ.O235

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第048675号

责任编辑：毕 颖/责任校对：朱光光

责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年5月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2004年5月第一次印刷 印张：12 5/8

印数：1—3 000 字数：331 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

总　序

应用数学的发展与自然科学和社会科学广泛的交叉和渗透密切相关.一方面,它为形形色色的物理、化学、生物、社会等现象提供描述和分析的数学工具.另一方面,这些实际问题的解决又为数学学科的发展提供了动力和永不枯竭的源泉.许多成功的应用数学方法,如解非线性方程的牛顿-高斯法、曲线拟合的最小二乘法、线性规划的单纯形法等,成了当今应用数学工作者手中不可缺少的工具.它们之所以有如此强大的生命力,原因在于方法本身有坚实的理论基础,同时又有鲜明的应用背景,能用于不同的领域.因此,成功的应用数学方法是理论联系实际的桥梁和纽带.

我国的数学要达到世界先进水平,要对人类有所贡献,重要的一点是要有一批独创的应用数学方法.《现代应用数学方法丛书》的出版,希望能为鼓励和促进我国的数学工作者创造或介绍更多的现代应用数学方法增加一个舞台.

这套丛书的宗旨是介绍现代应用数学方法.这些方法应该是目前世界上最先进的,或者是我国独创的,或者是国外已经普遍使用但国内知之甚少的方法.丛书着重阐明所介绍方法的应用背景和思想,避开深奥的数学论证,力求深入浅出、图文并茂,有数值及应用性的例子,使读者易于理解和使用.丛书要求短小精练,突出新的方法,不求齐全.书末所附的文献将指出方法的理论背景以及最近的进展,以便读者进一步深入研究.

本丛书的出版得到国家"天元"项目的资助,得到科学出版社的大力支持,是全体编委努力的成果.我们要特别感谢许多作者在百忙中为丛书撰写文稿,付出了辛勤的劳动.我们希望这套丛书的出

序　　言

小波分析在当前数学领域中的发展十分迅速，一方面它有着深刻的理论背景，其数学思想非常精美而完善；另一方面，它在工程中的应用又十分广泛.它是从 Fourier 变换中发展而来，但是在刻画时频局部化上又比 Fourier 变换有优势.它能够同时在时间和频率上做局域变换，因而能有效地从信号中提取有用信息，解决了 Fourier 变换不能解决的许多难题，所以小波变换又被誉为"数学显微镜".到了 20 世纪 90 年代，小波变换受到了科学家和工程师的广泛关注，在信号分析、图像处理、模式识别、语音合成、方程求解、分形力学等领域都已取得了具有科学意义和应用价值的重要成果.

由于小波分析有着很强的数学背景，因此要想很好地掌握它有一定的难度.已经出版的有关小波分析的书籍很多，但大都是从数学的角度去分析小波理论，对那些数学基础不是很好的读者来说，无疑不太好理解，影响了小波灵活而多变的应用.因而，我们希望能够编写一本比较通俗易懂的小波书，本书的初衷正是基于这样的思想来写作的.为了保持小波理论的完整性和深刻性，我们保留了小波的基本数学思想和来源，但是对一些关键的，比较难理解的概念，都从工程的角度给出了形象的、比较好理解的描述.通过形象的比喻加深读者对小波的理解，对于每一个算法都给出了具体的实现步骤，还通过举例进一步体现算法的思想.我们的努力都是希望读者能有信心、有兴趣地掌握好小波的基本特性和应用特点，为小波的应用打下基础.

虽然小波在模式识别中已经有一些卓有成效的应用，但将小波分析应用到文本和文字的处理中仍然不够深入.随着社会信息化程度的提高和计算机智能化的不断完善，对文本和文字处理的

要求也越来越高.要实现文本和文字的高级处理,就不得不借助一些强大的数学工具,小波分析就是这样一个崭新而实用的数学工具.本书还收集了最近几年我们在这方面的工作,几乎体现了文本文字处理的各个方面.这些应用并不仅仅是简单的变换,而是对小波理论有不同的扩展,解决了一些关键问题,为应用研究开辟了一些新途径和新方法.读者可以从这些应用中更进一步加深对小波的理解.

本书的很多内容是根据作者在国内外讲学、参加国际会议的英文和中文讲稿整理而成.本书的完成得到了很多人的帮助.特别感谢西安交通大学的程正兴教授对初稿进行了详细的审阅;感谢西安交通大学杨建伟博士的有益讨论和对本书的部分文字录入和修改;感谢西安电子科技大学的冯象初教授、四川大学的马洪教授、中山大学的杨力华教授、南京大学的全宁教授、重庆大学的曾理教授和广州军医大学的杨丰教授对本书的应用部分提供的资料;感谢南开大学张伟鹏博士对本书的部分文字录入;感谢香港浸会大学及其深圳研究院的大力支持,特别感谢香港浸会大学数学系方开泰教授的大力支持和帮助.

唐远炎(香港浸会大学)
王　玲(四川师范大学)
2002年10月

目　录

第一章　理解小波

本章的目的是希望读者对小波有一个基本的认识，特别是对那些不熟悉小波数学背景的读者．提到小波，就不可避免地要讨论到函数空间，因为小波是在能量有限空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上满足特定的允许条件的函数，所以我们首先从 $L^2(\mathbb{R})$ 空间出发，分析 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的本质和空间的分解，讨论向量的变换和 $L^2(\mathbb{R})$ 空间函数的变换．在对 Fourier 变换的缺点做了简要分析后，给出了小波变换的思想，指出了在大多数情况下小波变换优于 Fourier 变换的内在原因．正是这些优点使得小波变换在实际应用中效果特别明显，例如在文本文字的处理中逐渐成为特别有用的数学工具．

1.1　Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$

对于一个信号，从数学的角度来看，它就是一个自变量为时间 t 的函数 $f(t)$．我们知道，信号总是能量有限的，即

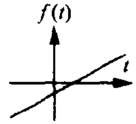
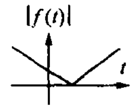
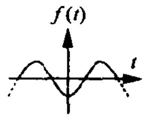
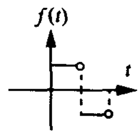
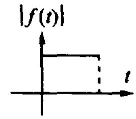
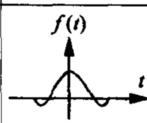
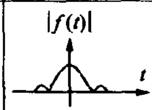
$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(t) \right|^2 dt < \infty \tag{1.1}$$

满足条件(1.1)的所有函数的集合就形成空间 $L^2(\mathbb{R})$，$L^2(\mathbb{R})$ 中的函数称为平方可积的．下面看几个 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中函数的例子(见表 1.1)．

从表 1.1 中不难发现，$L^2(\mathbb{R})$ 中的函数只在有限的区间上取值，或者在无限区间上取值时，在无穷远处函数很快地衰减为 0，而取值为无穷的点测度为 0．$|f(t)|^2$ 在工程中经常被称为能量，因此 $L^2(\mathbb{R})$ 又叫能量有限空间．事实上，在实际中遇到的信号都是能量有限的，由于采样设备的限制，我们不可能得到无穷取值的

信号，因此，我们要处理的信号都属于 $L^2(\mathbb{R})$ 空间.

表 1.1　判断函数是否属于 $L^2(\mathbb{R})$ 空间

函数 $f(t)$	$f(t)$ 图示	$\|f(t)\|$ 图示	结论
$f_1(t)=2t+3$			$f_1(t)\notin L^2(\mathbb{R})$
$f_2(t)=-\cos t$			$f_2(t)\notin L^2(\mathbb{R})$
$f_3(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ -1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right)\\ 0, & 其他\end{cases}$			$f_3(t)\in L^2(\mathbb{R})$
$f_4(t)=(1-t^2)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$			$f_4(t)\in L^2(\mathbb{R})$

在文本文字分析中，经常需要对文本文字图像进行处理，这里的图像被看成了二维信号，同样是能量有限的. 因为我们不可能处理无穷大的图像，任何一幅数字图像都是从真实的场景中经过采样和量化的处理后得到的. 图像的区域和图像的取值应该是有限的，所以，图像也是定义在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的函数(定义域实数$\mathbb{R}$ 被换成了二维实数域$\mathbb{R}^2$). 如图 1.1 所示的 Lenna 图像 $f(x,y)$，假设图像大小是 512×512，量化级数是 256，即

$$0\leqslant f(x,y)\leqslant 255,\ \ \Omega:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 511\\ 0\leqslant y\leqslant 511\end{cases}$$

如果在整个实平面$\mathbb{R}^2$ 上考虑图像 $f(x,y)$，可以把图像外的点看成背景，于是我们有了一个新定义的函数：

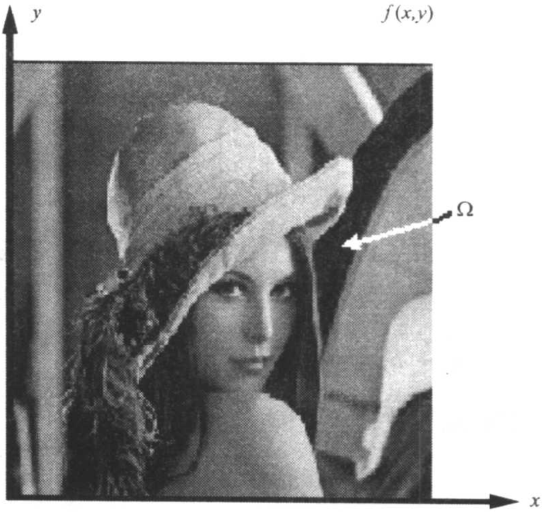


图 1.1　二维图像区域

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是,根据定义,我们知道

$$0\leqslant\iint_{\mathbb{R}^2}|\tilde{f}(x,y)|^2dxdy\leqslant\iint_{\Omega}|f(x,y)|^2dxdy$$

$$\leqslant 255^2\Omega=255^2\times 512^2<\infty$$

至此,我们说明了:图像也是 $L^2(\mathbb{R}^2)$上的能量有限函数.在以后的章节中,如果不特殊指明,我们讨论的都是 $L^2(\mathbb{R})$或 $L^2(\mathbb{R}^2)$上的函数.

在应用中,除了知道 $L^2(\mathbb{R})$中的函数满足(1.1)以外,还应该知道 $L^2(\mathbb{R})$中定义的运算;在 $L^2(\mathbb{R})$中的距离及函数序列的收敛;$L^2(\mathbb{R})$的基底等.

为了更明白地说明这些问题，我们以平面上的向量所形成的空间$\mathbb{V}^2$为例来说明.

设$\boldsymbol{a}\in\mathbb{V}^2$，即$\boldsymbol{a}$是平面向量：

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

为书写方便，常写为$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$，"T"表示转置.在$\mathbb{V}^2$中，可以引入两个向量之和

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)^{\mathrm{T}}$$

及数乘(α为实数或复数)

$$\alpha\boldsymbol{a}=(\alpha a_1,\ \alpha a_2)^{\mathrm{T}}$$

容易验证，这时加法的交换律、结合律成立；零向量$\boldsymbol{\theta}$与$-\boldsymbol{a}$存在：$\theta=(0,0)^{\mathrm{T}}$，$-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2)^{\mathrm{T}}$；乘法结合律成立：$(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$；乘法对加法的分配律成立：$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$，$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$；数1乘$\boldsymbol{a}$还是$\boldsymbol{a}$本身.

对于一个集合$\mathbb{X}$，在$\mathbb{X}$中定义了一个加法和数乘，并且满足上述交换律等条件，则称这个空间是线性空间.

对于$L^2(\mathbb{R})$中的函数，自然引入了普通的加法和数乘，且满足上述条件，所以$L^2(\mathbb{R})$是一个线性空间.空间$\mathbb{V}^2$当然也是线性空间.

线性空间最早是比照向量空间引入的，所以通常也把线性空间称为向量空间.

在空间$\mathbb{V}^2$中，$\boldsymbol{a}$的长度$\|\boldsymbol{a}\|$取为

$$\|\boldsymbol{a}\|=(a_1^2+b_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

它满足：

1) $\|\boldsymbol{a}\|\geqslant 0$，且$\|\boldsymbol{a}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\theta$；

2) $\|\alpha\boldsymbol{a}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$；

3) $\| \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \| \leqslant \| \boldsymbol{a} \| + \| \boldsymbol{b} \|$(三角不等式).

这时$\mathbb{V}^2$ 中的两点之间的距离为 $\| \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \|$.

这样我们就得到了线性赋泛空间的概念.

线性赋范空间 设$\mathbb{X}$是线性空间(数域为$\mathbb{K}$,代表实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$),如果对于每个元素 $x\in\mathbb{X}$,对应一个实数 $\|x\|$,满足($x,y\in\mathbb{X},\alpha\in\mathbb{K}$):

1) $\|x\| \geqslant 0$,且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$(三角不等式).

则称空间$\mathbb{X}$为赋泛线性空间,$\|\cdot\|$称为范数.

对于空间$\mathbb{V}^2$,还引入了内积(又称数积),即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{V}^2$,

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

这时如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直(也称正交),则$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,反之亦然.空间$\mathbb{V}^2$ 中正交向量的例子如 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 又可作为空间的基底,这以后详细讨论.

对于一般的线性空间也可引入内积.

内积空间 设$\mathbb{X}$是线性空间,数域为$\mathbb{K}$,如果对于$\mathbb{X}$中每一对元素 f,g,对应一个复数(或实数),记为$\langle f,g\rangle$,且满足下述性质:

1) 非负性 $\langle f,f\rangle \geqslant 0$,且$\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow f=\theta$;

2) 对称性 $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$;(这里$\overline{\langle g,f\rangle}$表示对$\langle g,f\rangle$取复共轭)

3) 线性性 $\langle \alpha f+\beta g,h\rangle = \alpha\langle f,h\rangle + \beta\langle g,h\rangle$, $h\in\mathbb{X}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

则称空间$\mathbb{X}$为内积空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$为内积.

例如,假设$\mathbb{C}[0,1]$表示$[0,1]$区间上的连续函数的集合,定义内积如下:

$$\langle f,g\rangle \triangleq \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \tag{1.2}$$

这样,$\mathbb{C}[0,1]$成为一个内积空间,容易验证它满足内积空间的三

个性质.

在内积空间中,两个函数之间的关系用一个数(内积)来刻画,可以大大简化对空间性质的讨论,也更容易理解函数之间的关系.对两个函数 f,g,如果 $\langle f,g\rangle=0$,我们就称函数 f 与 g 正交.

在内积空间$\mathbb{X}$中,对于每个 $x\in\mathbb{X}$,定义范数

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

这样定义的范数满足范数的三个性质,因此内积空间也是一个线性赋范空间.例如,$\mathbb{C}[0,1]$是一个赋范线性空间,其范数定义为

$$\| f \| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 f(t)\,\overline{f(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 | f(t) |^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

引入范数的目的是为了方便度量距离.对 $x,y\in\mathbb{X}$,我们通常用范数 $\|x-y\|$ 来描述函数 x 与函数 y 之间的距离 $d(x,y)=\|x-y\|$,这时空间$\mathbb{X}$也就变成了距离空间,这在实际应用中是非常有意义的(例如判定误差等).一般的范数 $\|x\|$ 可以理解为函数 x 与零元 θ 的距离.

距离空间中的一个序列 $\{x_n\}$ 称为是一个 Cauchy 序列,如果

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

即对于预先给定的 $\varepsilon>0$,存在 N,使对于 $n,m>N$ 时,$d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

一个空间$\mathbb{X}$称为是完备的,如果在这个空间中的每个 Cauchy 序列收敛于$\mathbb{X}$中的点.

这样我们就可以引入 Banach 空间与 Hilbert 空间的概念.

Banach 空间 一个完备的线性赋范空间称为 Banach 空间.

Hilbert 空间 一个完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

完备就是对极限运算的封闭性,即空间$\mathbb{X}$中所有序列的极限都应该包含在$\mathbb{X}$中;所谓的封闭性,是对空间(集合)和运算而言的,同一个集合对不同的运算会有不同的封闭性.例如,在自然数集 N 中,对加法运算是封闭的,但对减法运算是不封闭的(两个自

然数之差不一定是自然数). 在整数集合$\mathbb{Z}$中, 对加、减、乘运算都是封闭的, 但对除运算不封闭. 在有理数集合中, 虽然对加、减、乘、除运算都是封闭的, 但对极限运算又不封闭. 例如, 一个由 π 的有限位构成的有理数序列 $\{a_n\}$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3.1$, $a_3 = 3.14$, $a_4 = 3.141, \cdots$, 显然, 这个有理数序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$, 而 π 并不是有理数, 所以说有理数对极限运算是不封闭的. 当我们将数集扩大到实数集$\mathbb{R}$时, $\mathbb{R}$ 不仅对基本运算封闭, 而且对极限运算也是封闭的, 因此$\mathbb{R}$是完备的.

下面我们举一些 Banach 空间与 Hilbert 空间的例子.

对于每个 $p, 1 \leqslant p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R})$表示在$\mathbb{R}$上 p 幂可积函数 f 的类, 即

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < +\infty$$

赋予范数

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

这时对每个 $p, 1 \leqslant p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R})$都是 Banach 空间.

对于空间 $L^p(\mathbb{R})$有 Minkowski 不等式:

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

和 Hölder 不等式$\left(p \geqslant 1, q \geqslant 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

当 $p = q = 2$ 时, 称为 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$$

Hilbert 空间标准的例子就是空间 $L^2(\mathbb{R})$, 内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

另一个 Hilbert 空间的例子是 $l^2(\mathbb{Z})$，它是指标为整数的所有平方可积序列的集合，对 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in l^2(\mathbb{Z})$，$\boldsymbol{c} = (\cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{d} = (\cdots, d_{-1}, d_0, d_1, \cdots)^{\mathrm{T}}$ 的内积为

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \overline{d_n}$$

对于内积空间$\mathbb{X}$，有重要的 Cauchy-Schwarz 不等式，$u, v \in \mathbb{X}$，

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \| u \| \, \| v \|$$

特别地，对于 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

而对于 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in l^2(\mathbb{Z})$，有

$$\left|\sum_n c_n \overline{d_n}\right| \leqslant \left(\sum_n |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |d_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 空间的基底与变换

谈到空间的基底，必先讨论空间中子集元素的线性无关性.

线性无关 线性空间$\mathbb{X}$的一个子集 A 称为是线性无关的，如果对于 A 的每一个非空有限子集 $\{x_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$，关系 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0, \alpha_i \in \mathbb{K}$，推出 $\alpha_i = 0$ 对所有 $i \leqslant n$ 成立.

所谓集 $\{\boldsymbol{e}_i : i$ 属于某一指标集$\}$ 是$\mathbb{X}$的基底，是指：

1) 集 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是线性无关的；

2) $\mathbb{X}$ 中的任一元素都能用集 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 元素的线性组合表示.

下面我们分别详细地讨论向量空间的分解；离散信号与向量

空间的关系;函数空间中的变换等.

1.2.1 向量空间的正交分解

我们从有穷维向量空间的正交分解入手,先考虑一维向量的情形:对 $\boldsymbol{u}\in \mathbb{V}^1$,有

$$\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|\cdot \boldsymbol{e} = u_1\boldsymbol{e}$$

这里 $u_1=|\boldsymbol{u}|$是一个数,表示向量 $\boldsymbol{u}$ 的长度,$\boldsymbol{e}$ 是单位向量,且$|\boldsymbol{e}|=1$.可见,一维向量空间中的任一向量 $\boldsymbol{u}$ 可以用单位向量 $\boldsymbol{e}$ 线性表示(在向量空间中,我们并不考虑平移的情况,只要长度和方向相同,就认为是同一个向量),见图 1.2(a).

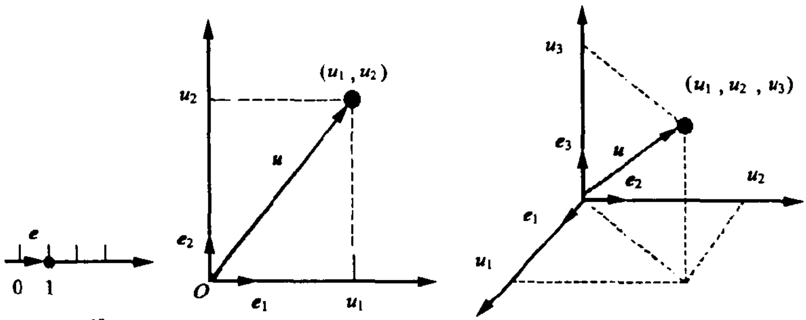


图 1.2 向量的分解

二维的情形也是如此:对 $\boldsymbol{u}\in \mathbb{V}^2$,有

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$$

这里,$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是相互正交的单位向量,即$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,并且 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$,即$\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=0$.可以取 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$,这里 T 表示转置.$u_1$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在$\boldsymbol{e}_1$ 方向的投影长度,$u_1=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_1\rangle$;$u_2$ 是 $\boldsymbol{u}$ 在$\boldsymbol{e}_2$ 方向的投影长度,$u_2=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_2\rangle$.向量 $\boldsymbol{u}$ 的大小(或长度)可以表示为$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.因此在二维向量空间,任何向量 $\boldsymbol{u}$ 都可