幾何定理摘要及問題之解法

（平面部及空間部）

蕭佩蓀
董恩博　合編

趙進義　校閱

幾何定理摘要及問題之解法

平面部及空間部

民國二十四年六月初版

不准翻印　版權所有

全書一册　定價　宣紙精裝　二元八角
　　　　　　　　報紙平裝　二　　元

子

編輯者　涿縣　蕭佩孫
　　　　新城　董恩博

校閱者　東鹿　趙進義

出版者　宣明學社

發行者

前外楊梅竹斜街中間

北平中華印書局

電話南局一六七三號

序

董樹德君與蕭奉宗君曾畢業於國立北平師範大學數學系，學識卓越，教授得方，故在卒業前即爲各校所爭聘，担任主要課程。今董蕭兩君，就其數年之研究心得與教授經驗，參考中外名著，編此『幾何定理摘要及問題之解法』一書；取材豐富，條理清晰，將理論綱要與問題解法，合爲一册，使讀者可有概括之觀念與演習之機會，在現行之中等數學叢書中極爲難得。故該書誠爲中學生自修或預備會考與中學數學教員不可不備之手本也。今由北平中華印書局印行問世，其造福於吾國中學界者，當甚大焉。

趙進義序於北平

六月十日

幾何定理摘要及問題之解法

目　　錄

第一編　定理摘要

第二編　平面問題之解法

第三編 空間問題之解法

幾何定理摘要及問題之解法

第一編　定理摘要

第一章　平面定理摘要

I　線段

(1)　必有惟一之中點.

(2)　必有惟一之平分線.

(3)　垂直平分線上之點,與兩端等距離.

(4)　與兩端等距離之點必在垂直平分線上.

II　一角

(1)　必有惟一之平分線.

(2)　平分線上之點距兩邊等遠.

(3)　距兩邊等遠之點,必在角平分線上.

III　二平行線與一割線所成之

(1)　同位角必等.

(2)　內錯角必等.

(3)　外錯角必等.

(4)　割線同側內角相補.

(5) 割線同側外角相補.

IV 三角形具下列條件之一者必相全同

(1) 三邊彼此相等(s.s.s.=s.s.s.)

(2) 二邊及夾角彼此相等(s.a.s.=s.a.s.)

(3) 二角及夾邊彼此相等(a.s.a.=a.s.a.)

(4) 弦與銳角彼此相等.

V 一點A至一直線BC

(1) 僅可作一垂線Ao

(2) 所作諸線Ao, AP, AQ,………Ao爲最短.

(3) $AP \gtreqless AQ$.全視$op \gtreqless OQ$而定.

VI 平行四邊形之

(1) 對邊平行.

(2) 對邊相等.

(3) 對角相等.

(4) 對角線互相平分.

(5) 鄰角互爲補角.

(6) 一副對邊平行且相等.

VII 一三角形ABC

(1) 必有一外切圓.

其圓心爲三邊之垂直平分綫之交點,稱爲外心.

(2) 必有一內切圓.

其圓心爲三角之平分綫之交點,稱爲內心.

(3) 必有三傍切圓.

其圓心爲任意二外角之平分綫及一內角之平分綫之交點，稱爲傍心.

(4) 必有三高線會于一點，稱爲垂心.

(5) 必有三中線會于一點，稱爲重心.

(6) $\angle A+\angle B+\angle C=2$直角.

(7) 外角等于二內對角之和，故大于每一對角.

(8) 任二邊之和大于第三邊.

VIII 平面內圓有下列關係

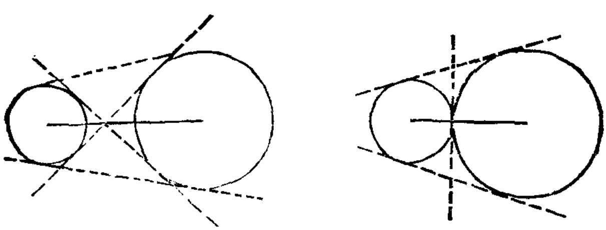
(1) 半徑和$<$連心線，
二圓互相在外，有四公切綫.

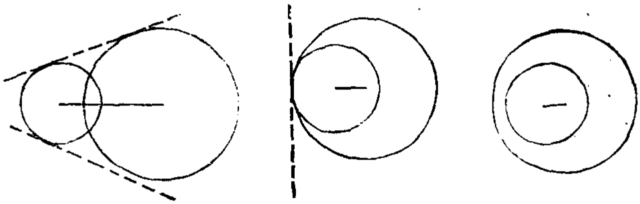
(2) 半徑和$=$連心線，
二圓互相外切，有三公切線

(3) 連心綫$>$半徑差，
二圓相交于二點，有二公切綫.

(4) 連心線$=$半徑差，
小圓內切于大圓，有一公切綫.

(5) 連心線$<$半徑差.
小圓全容于大圓之內，無公切線.





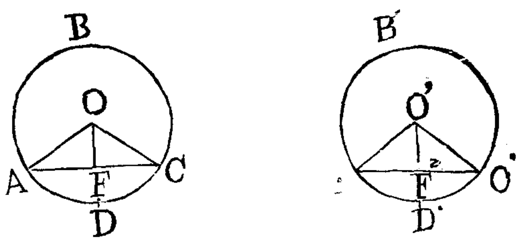
IX 一直線與一圓之關係

(1) 與圓心距離$<$半徑者, 交圓于二點.

(2) 與圓心距離$=$半徑者, 切圓(惟一交點).

(3) 與圓心距離$>$半徑者, 在圓外.

X 等圓或同圓內



二劣弧 $\overset{\frown}{ADC} \equiv \overset{\frown}{A'D'C'}$

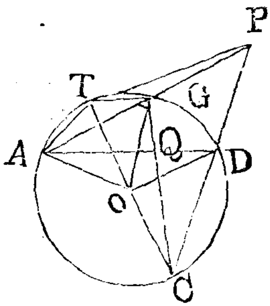
全視圓心角$\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$ 而定.

亦視弦 $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ 而定.

又視弦心距 $OF \equiv O'F'$ 而定.

亦視優弧 $\overset{\frown}{ABC} \equiv \overset{\frown}{A'B'C'}$ 而定.

XI 圓周角,圓內角,圓外角,



(1) 圓周角

$\angle ABC=\angle ADC$

$=\frac{1}{2}\angle AOC$

(2) 圓內角 $\angle AQC$

$=\angle ADC+\angle DCB$

$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)$

(3) 圓外角 $\angle APC=\angle ADC$

$-\angle DAB$

$=\frac{1}{2}(\angle AOC-BOD)$

(4) 弦與切線間之角

$\angle BTP=\frac{1}{2}\angle TAB=\frac{1}{2}\angle TOB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{TB}$

XII n邊形

(1) 內角和$=(n-2)$平角

(2) 外角和$=2$平角

(3) 每邊小于其餘各邊之和

XIII 一點與一圓之關係

(1) p在圓內， 若其與圓心之距離$\angle$半徑.

(2) P在圓上. 若其與圓心之距離$=$半徑.

(3) P在圓外，若其與圓心之距離$>$半徑.

(4) 當P, A在BC之同側.

(a) 若P在弓形BAC上.

則$\angle BPC=\angle BAC$

(∵同弧之圓周角)

(b) 若P_1在弓形BAC內

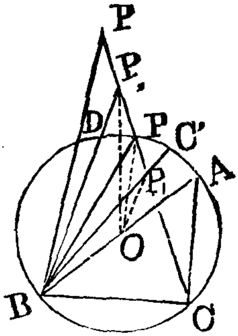
則$\angle BP_1C > \angle BAC$

$$\left[\begin{array}{l}\because \angle BP_1C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{PC'}) \\ \angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\end{array}\right]$$

(c) 若P_2在弓形BAC外

則$\angle BP_2C < \angle BAC$

$$\left[\begin{array}{l}\because \angle BP_2C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{PD}) \\ \angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\end{array}\right]$$



XIV　正n邊形之

(1)　各角相等,各邊相等.

(2)　可作一外切圓.

(3)　可作一內切圓.

(4)　每內角$=\frac{n-2}{n}$平角$=\left(1-\frac{2}{n}\right)$平角.

(5)　每外角$=\frac{2}{n}$平角.

(6)　圓內接等邊形爲正多邊形.

(7)　圓外切等角多角形爲正多邊形.

XV　(1) 一線段被諸平行線均分,則必將任何線均分

(2)　一線段可均分之爲若干等份.

(3)　平行線將各割線截成比例.

(4)　一綫段必可分爲兩段令其比等于定比.

XVI　三角形ABC, 三角形A'B'C'　有下列

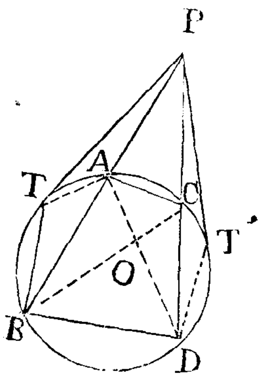
條件之一者,必相似

(1)　$\angle A = \angle A'$。$\angle B = B'$,

(2)　$\angle A = \angle A'$, $AB : A'B' = AC : A'C'$

(3)　$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$.

XVII　由一點P至O圓作割線PCD, PAB,切線PT,PT'



(1)　$\triangle PAC \backsim PDB$.

$$\left(\begin{array}{l} \because \quad \angle P \equiv \angle P \\ \angle PAC = \angle PDB \\ \angle PCA = \angle PBD \end{array}\right)$$

(2)　$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$.

$$\left(\begin{array}{l} \because \quad \angle P \equiv \angle P \\ \angle PDA = \angle PBC \\ \angle PCB = \angle PAD \end{array}\right)$$

(3)　$\triangle PAT \backsim \triangle PTB$

$$\left(\begin{array}{l} \because \quad \angle P \equiv \angle P \\ \angle PTA = \angle PBT \\ \angle PAT = \angle PTB \end{array}\right).$$

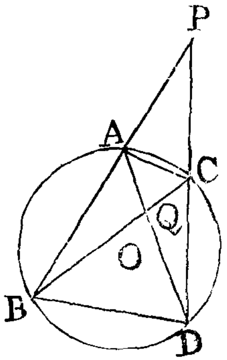
(4)　$PT : PB = PA : PT$

即　$PT^2 = PA.PB$.

$PT' : PC = PD : PT'$

即　$PT'^2 = PC.PD$.

(5)　$\triangle QAC \backsim \triangle QBD$



$$\left(\begin{array}{l}\because \angle AQC=\angle BQD\\ \angle CAQ=\angle DBQ\\ \angle BDQ=\angle ACQ\end{array}\right)$$

(6)　$\triangle QAB \backsim \triangle QCD$.

(7)　$QA : QD = QC : QB$.

XVIII　面積(以s表之)

(1)　矩形　$S=b\times h$

(2)　正方形　$S=b^2$

(3)　平行四邊形 $S=b\times h$

(4)　三角形　$S=\frac{1}{2}h\times b$

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $S=\dfrac{abc}{4R}$

(5)　等邊三角形 $S=\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$

(6)　梯形　$S=\frac{1}{2}h(b+b')$

(7)　有法多邊形 $S=\frac{1}{2}r\times p$

(8)　圓　$S=\frac{1}{2}R\times c$　$S=\pi R^2$

(9)　扇形　$S=\frac{1}{2}R\times$ 弧.

符號

S ＝面積　　$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$

h ＝高　　R＝圓之半徑

b ＝下底　　　　C＝圓周

b' ＝上底　　　　P＝周界

$a,b,c,$＝三角形之三邊．　$\pi=3.1416$．

XIX　軌跡確定須證明次之界說

(1)　在X線上之點，適合要件A．

(2)　適合於要件A之點，必在X線上．

(3)　不適於要件A之點，不在X線上．

(4)　不在X綫上之點，不適於要件A．

但(3)與(1)，(4)與(2)，意義相同．故欲証軌跡．必證明(1)及(2)二命題．

第二章　空間定理摘要

XX　平面可決定

(1)　由一直線與線外一點．

(2)　由不在同一直綫之三點．

(3)　由相交二直綫．

(4)　由相平行二直線．

XXI　平面之垂線及斜線

(1)　由面上(外)一點可引惟一垂線，許多斜線．

(2)　自面外一點A向平面引一垂線AO及斜線．AB，AC，$AB \gtreqless AC$ 視 $OB \gtreqless OC$而定．

(3)　AO，AB，AC，諸綫，垂綫AO爲最短．

XXII　平行直線及平面

(1) 垂直於同一平面之二直綫互平行.

(2) 二平行直綫之一垂直于一平面,則其他亦垂直.

(3) 平行於同一直線之二直線,互平行.

(4) 夾于二平行平面間之平行線等長.

(5) 不在同一平面之二角,有平行之各邊,非相等卽相補.

XXIII 二面角及多面角

(1) 自二面角之稜上一點,於各面上作稜之垂線,稱爲二面角之平面角必相等.

(2) 二面角之大小以其平面角度之.

(3) 三面角之任意二個面角之和大于其餘之面角.

(4) 兩個三面角其面角相等,同序時全同,逆序時對稱.

(5) 多面角之面角之和小于四直角.

XXIV 正多面體

(1) 不能多于五種(實爲五種)

(a) 正四面體——由正三角形組成.

(b) 正六面體——由正方形組成.

(c) 正八面體——由正三角形組成.

(d) 正十二面體——由正五邊形組成.

(e) 正二十面體——由正三角形組成.

XXV 球

(1) 球以平面截之,截面爲圓.

(2) 球之大圓相等.

(3) 球面與球面之交爲圓.

(4) 球之半徑外端垂直於半徑之平面切於球.

(5) 於球之圓周上,各點與其極等距離.

(6) 球面多角形之一邊小于他各邊之和.

(7) 球面多角形各邊之和小于360°.

(8) 二球面三角形,互爲極三角形,則其一之各角與他之一所對之邊互爲補角.

(9) 球面三角形各角和大于180°小於540°.

XXVI 公式

(1) 角柱體及平行六面體.

$L=E\times P$ (P爲正截面之周界)

$V=B\times H$

$V=a\times b\times c$(矩平行六面體)

(2) 角錐體

$L=\frac{1}{2}S\times P$ (有法角錐體)

$V=\frac{1}{3}B\times H$

(3) 平截角錐體.

$L=\frac{1}{2}(P+P)S$ (有法角錐體)

$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$

(4) 旋成圓柱體.

$L=C\times H=2\pi R.H$

$T=2\pi R(H+R)$

$V=B\times H$

$V=\pi R^2 . H$

(5) 旋成圓錐體.

$L=\frac{1}{2}C\times S=\pi R.S$

$T=\pi R(S+R)$

$V=\frac{1}{3}B\times H$

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$

(6) 平截旋成圓錐體.

$L=\frac{1}{2}(C+c)\times S=\pi(R+r).S$

$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr).$

符號

L=側面積	P=下底之周界	
r=上底之半徑	E=側稜	
c=上底之圓周	R=下底之半徑	
p=上底之周界	C=下底之圓周	
V=體積	H=高	S=斜高
B=下底	b=上底	T=全面積

(7) 弧面積.

(a) 球 $S=4\pi R^2$

(b) 球帶 $S=2.\pi R.H.$

(c) 月形 $S=\frac{\pi R^2 . A}{90}$

(d) 弧三角形 $S=\frac{\pi R^2 . E}{180}$