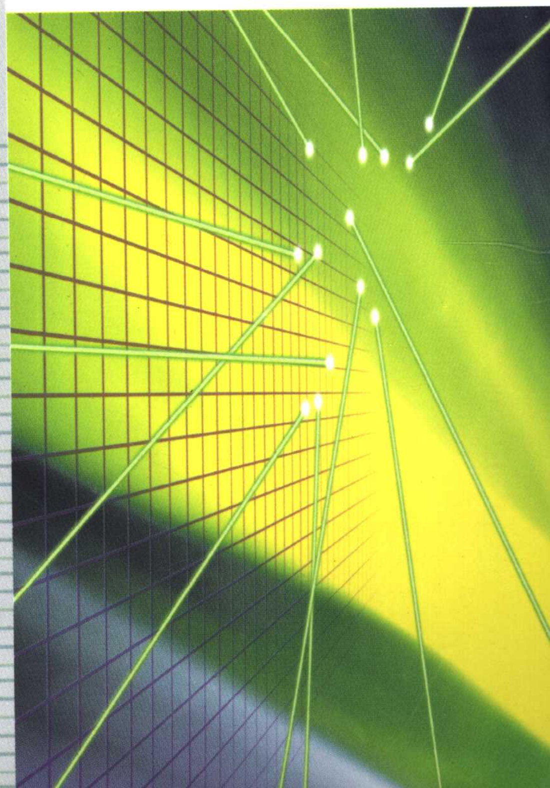
大学数学学习指南

线性代数

刘建亚 总主编
吴 臻 主编



山东大学出版社
Shandong University Press

大学数学学习指南
——线性代数

总主编　刘建亚

主　编　吴　臻

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指南．线性代数/刘建亚总主编．吴臻分册主编．
—济南:山东大学出版社,2004.8
ISBN 7-5607-2834-0

Ⅰ．大...
Ⅱ．①刘...②吴...
Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 078184 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
安丘市意中印务有限公司印刷
787×980 毫米　1/16　13.5 印张　255 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印数:1－5000 册
定价:20.00 元

《大学数学学习指南》编委会

《线性代数》

主　编　吴　臻
编　者　秦　静　金　辉

前 言

大学数学是大学教育中重要的基础理论课，它不仅是学好其他专业课的重要工具，同时也能使学生通过数学知识和方法的学习，获得理性思维的训练和美的享受，对提高学生的综合素质具有重要意义。学好大学数学，要有一套好教材，也需要有与之配套的教学指导书，以帮助学生掌握大学数学的教学要求，更好地理解基本概念，掌握系统的基本理论，体会数学的思维方法，提高利用基本知识分析和解决问题的能力。“大学数学学习指南”丛书可与山东大学数学学院编写的国家“十五”规划教材“大学数学教程”微积分、线性代数、概率统计(高等教育出版社2002年版)配套使用，同时亦可作为读者学习大学数学课程的参考书，备考硕士研究生入学考试的辅导用书。

“大学数学学习指南”丛书按“大学数学教程”各分册的体系编写，山东大学数学与系科学学院刘建亚教授负责丛书总策划并担任总主编，吴臻教授任丛书主编，统稿定稿。各分册的编者是：微积分——蒋晓芸、许闻天、崔玉泉；线性代数——秦静，金辉；概率统计——胡发胜、宿洁、史敬涛。

学习指南丛书线性代数分册分为三篇。第一篇为线性代数基本内容，按章编写，包括“基本要求”、“内容提要”、“例题分析与难点解析”和“练习题”等四部分。第一部分“基本要求”给出了对该章内容的具体要求；第二部分“内容提要”扼要整理和归纳了该章的概念、定理和公式，方便学生复习查阅；第三部分“例题分析与难点解析”通过典型例题系统全面地介绍了线性代数解题与证题的方法和技巧，给出了求解同类题目的一般方法及注意事项，并对这些方法和技巧进行了归纳和总结，以帮助学生认识和掌握重点，提高解决难度较高、综合性较强的问题的能力，这是本丛书的特色之一，充分体现学习指南的作用；第四部分“练习题”除有计算、应用、证明题外，参照研究生入学考试试题的构成，每章均选编了一定数量的选择题和填空题，供读者练习使用，所选习题难度层次分明，既有基本习题也有一些较难的题目。第二篇为试题汇编，包括4套线性代数课程模拟试卷及2000～2004年全国研究生入学考试线性代数试题选编。第三篇为练习题、课程模拟试卷及研究生入学考试试题的详细解答与答案，这是本丛书的又一

特色，读者可在独立做完练习题、课程模拟试卷和研究生入学考试试题之后对照查阅，再一次充分体现学习指南的作用。

线性代数分册约收集了500道题目，每道题目都给出了详细解答，有些题目还给出了多种解法，有助于读者全面系统地复习、巩固和掌握线性代数知识，提高解题、证题及应试能力。

本丛书编写过程中，得到山东大学教务处、山东大学数学与系统科学学院领导及同行教师们的关心和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，加上经验不足、时间仓促，书中的不足与疏漏之处在所难免，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

2004年7月

目　　录

第一篇　基本内容

第二篇　试题汇编

第三篇　解答与答案

第一篇　基本内容

第一章　矩　阵

一、基本要求

(一) 矩　阵

1. 理解矩阵的概念，了解单位阵、对角阵、对称阵等特殊矩阵.

2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其运算规律.

3. 熟练掌握矩阵的初等变换，理解初等矩阵的概念.

4. 熟练掌握矩阵秩的求法，了解满秩方阵的性质.

5. 理解逆矩阵的概念及其存在条件. 熟练掌握逆矩阵的求法，并能(利用逆矩阵)求解矩阵方程.

6. 掌握分块矩阵的运算并能用矩阵分块法简化矩阵运算.

(二) n 阶行列式

1. 了解行列式的定义、性质，掌握行列式的计算.

2. 了解克莱姆法则并能求解某些线性方程组.

二、内容提要

(一) 重要概念

1. 矩　阵

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定顺序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵(或 m 行 n 列矩阵),简称**矩阵**.横的各排称为矩阵的**行**,竖的各排称为矩阵的**列**,a_{ij}称为矩阵的第 i 行第 j 列的**元素**.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的相等

若矩阵 A 与 B 的行数与列数分别相等,则称矩阵 A 与 B 是同型矩阵;若 A 与 B 是同型矩阵且对应元素相同,则称矩阵 A 与 B 相等,即

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$,则 A 与 B 为同型矩阵;若还有 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则 $A=B$.

(2) 矩阵的加、减法

设同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$,称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$为矩阵$A$ 与 B 的和(差),记为 $C=A\pm B$.

(3) 矩阵的数乘

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,k 为常数,以 k 乘矩阵A 的每一个元素得到的矩阵称为数k 与矩阵A 的**数量乘积**,简称**数乘**,记作 kA,即 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$.

(4) 矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times s}$, $B=(b_{kj})_{s\times n}$,则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

组成的矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$称为矩阵A 与B 的乘积,记作 AB,即 $C=AB$.

(5) 矩阵的转置

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行列互换得到的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**转置矩阵**,记作 A^T.

3. 矩阵的初等变换

以下三种变换分别称为矩阵的第一、第二、第三种**初等行(列)变换**.

(1) 对换矩阵中第 i,j 两行(列)的位置,记作 $r_{ij}(c_{ij})$或 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

(2) 用非零常数 k 乘矩阵第 i 行(列)的各元素,记作 $r_i \times k(c_i \times k)$.

(3) 将矩阵的第 j 行(列)各元素乘以常数 k 后加到第 i 行(列)的各对应元素上去,记作 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

4. 初等矩阵

对单位阵作一次初等变换后得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等行变换对应着下面三种初等矩阵.

(1) 初等行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 对应的初等矩阵记为 $E(i,j)$,则

$$E(i,j)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

(2) 初等行变换 $r_i \times k$ 对应的初等矩阵记为 $E(i(k))$,则

$$E(i(k))=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}. \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

(3) 初等行变换 $r_i + kr_j$ 对应的初等矩阵记为 $E(i,j(k))$,则

$$E(i,j(k))=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}.$$

同样可以得到与初等列变换对应的初等矩阵. 但应指出,对单位阵作一次初等列变换所得到的矩阵已包括在上面三种矩阵之中. 例如把单位阵 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列仍得到 $E(i,j(k))$. 因此,上述三种矩阵就是全部的初等矩阵.

5. 矩阵的 k 阶子式

在一个 $m\times n$ 的矩阵 A 中,任取 k 行 k 列($k\leqslant\min\{m,n\}$),位于这些行列相交处的元素按原来的次序所构成的 k 阶行列式,称为矩阵 A 的 k 阶子式.

6. 矩阵的秩

矩阵 $A_{m\times n}$ 中所有不等于零的子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩,记为 $r(A)$.

7. 矩阵的等价

若对矩阵 A 进行有限次初等变换得到矩阵 B,则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**,记作 $A\cong B$ 或 $A\leftrightarrow B$.

8. 对称阵与反对称阵

设 A 为 n 阶方阵,若 $A^T=A$,则称 A 为对称矩阵,简称为**对称阵**;若 $A^T=-A$,则称 A 为反对称矩阵,简称为**反对称阵**.

对称阵的特点是 $a_{ij}=a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n$. 关于反对称阵,由 $A^T=-A$ 知 $a_{ij}=-a_{ji}$,由此可推得 $a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$.

9. 满秩矩阵

设 A 为 n 阶矩阵,若 $r(A)=n$,则称 A 为满秩矩阵;若 $r(A)<n$,则称 A 为降秩矩阵.

10. 逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵,若存在一个 n 阶方阵 B,使得

$$AB=BA=E$$

成立,则称 A 是可逆矩阵,B 称为 A 的**逆矩阵**,简称为**逆阵**.

11. 正交矩阵

若 n 阶方阵 A 满足 $A^TA=E$,则称 A 为 n 阶正交矩阵.

12. n 阶行列式

(1) 排列

由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列称为一个 n 级排列,简称为**排列**.

(2) 逆序数

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果 $i_t>i_s$,但 i_t 排在 i_s 之前,则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序;一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数.

(3) 奇、偶排列

逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

(4) n 阶行列式

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排列成的一个 n 行 n 列的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式(简记为 $D=|a_{ij}|$),它是 $n!$ 项的代数和,即

$$D=\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中每一项都是取自 D 中不同行、不同列的 n 个元素的乘积,$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$N(j_1j_2\cdots j_n)$是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

13. 代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,选定元素 a_{ij},并将 a_{ij}所在的第 i 行与第 j 列划掉,剩下的元素按照原来的位置组成一个 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的**代数余子式**.

(二) 重要性质

1. 初等矩阵的性质

(1) 初等矩阵的转置仍为同类型的初等矩阵,且

$$E^T(i,j)=E(i,j),E^T(i(k))=E(i(k)),$$
$$E^T(i,i(k))=E(j,i(k)).$$

(2) 初等矩阵为非奇异方阵,且

$$|E(i,j)|=-1,|E(i(k))|=k,|E(i,j(k))|=1.$$

(3) 初等矩阵的逆阵仍为同类型的初等矩阵,且

$$E^{-1}(i,j)=E(i,j),E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k})),$$
$$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k)).$$

对于初等矩阵的这三条性质，读者应熟练掌握.

2. 初等变换的性质

对矩阵 $A_{m\times n}$施行初等行变换，相当于先对单位矩阵 E_m施行同样的初等行变换，并将所得到的矩阵从左边去乘 A；对矩阵 $A_{m\times n}$施行初等列变换，相当于先对单位矩阵 E_n 施行同样的初等列变换，并将所得到的矩阵从右边去乘 A，用一个公式可表示如下：

$$T_{行}(A_{m\times n})=T_{行}(E_m)\cdot A_{m\times n},$$
$$T_{列}(A_{m\times n})=A_{m\times n}\cdot T_{列}(E_n).$$

这里 $T(A)$表示对 A 进行初等变换后所得到的矩阵.

3. 行列式的性质

(1) 行列式经转置后其值不变，即 $D^T=D$.

(2) 行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值改变符号.

推论 如果行列式中两行(列)的对应元素完全相同，则该行列式的值等于零.

(3) 用数 k 乘行列式某一行(列)中所有元素，等于用 k 乘此行列式.

推论 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则此公因子可以提到行列式外面.

(4) 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

(5) 如果行列式某行(列)的元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和.

(6) 如果在行列式某一行(列)的元素上加上另一行(列)对应元素的 k 倍，则行列式的值不变.

(7) n 阶行列式D 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

推论 n 阶行列式D 的任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s),$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).$$

(8) 若 A,B 为同阶方阵，则

$$|AB|=|A||B|.$$

关于(8)，应特别注意 A,B 必须为同阶方阵.

(三) 重要定理与公式

1. 关于秩

(1) 两个同型矩阵 A 与 B 等价的充要条件是它们的秩相同.

(2) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,P,Q 分别为 m 阶与 n 阶满秩矩阵,则有:

① $r(A^T)=r(A)$;

② $r(kA)=\begin{cases}0, & k=0,\\ r(A), & k\neq 0;\end{cases}$

③ $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$ (B 为 $m\times n$ 矩阵即与 A 同型);

④ $r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$,$B$ 为 $n\times s$ 矩阵;

⑤ $r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)$.

2. 关于逆阵

(1) 设 A 为 n 阶方阵,则下列命题等价:

① A 满秩;

② A 可逆;

③ A 与同阶单位矩阵等价;

④ A 非奇异,即 $|A|\neq 0$;

⑤ $A=P_1P_2\cdots P_m$,其中 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 n 阶初等阵.

(2) 当 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆时,$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,其中 A^* 为方阵的伴随矩阵.

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}.$$

A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(3) 逆阵的运算公式

设 A,B 为 n 阶可逆方阵,k 为非零常数,则:

① $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$;

② $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$;

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

④ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$;

⑤ $(A^{-1})^{-1}=A$.

但须注意,一般而言$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$.

3. 关于A^*的几个基本公式

设A为n阶方阵,A^*为其伴随矩阵,则有:

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$.

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(3) $r(A^*)=\begin{cases} n, 当\ r(A)=n\ 时; \\ 1, 当\ r(A)=n-1\ 时; \\ 0, 当\ r(A)<n-1\ 时. \end{cases}$

(4) 当A可逆时,A^*也可逆且$A^*=|A|A^{-1}$,$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

4. 关于分块矩阵的几个基本公式

(1) 设A_i为n_i阶方阵,$i=1,2,\cdots,s$,则有

① $\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix}=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$;

② $r\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}=r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$;

③ 矩阵$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$可逆的充要条件为$A_i(i=1,2,\cdots,s)$是可逆的,且有

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

(2) 设A_{ii}为n_i阶方阵,$i=1,2$,则有

① $\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|$,

$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|$;

② $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$可逆的充要条件为 $A_{ii}(i=1,2)$可逆且

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$可逆的充要条件为 $A_{ii}(i=1,2)$可逆且

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

(3) 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，则

① $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$；

② $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆的充要条件为 A 与 B 可逆且 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

5. 关于正交矩阵的几个基本公式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为正交矩阵，则有

(1) $|A| = \pm 1$；

(2) $a_{ij} = \pm A_{ij}$；(A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式)

(3) $A^{-1} = A^{T}$；

(4) 若 B 也为 n 阶正交矩阵，则 AB 与 BA 均为正交矩阵.

6. 特殊行列式的计算公式

(1) 对角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}. \quad (\text{未写出的部分均为 } 0)$$

(2) 三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(未写出的部分均为 0)

(3) 斜三角形行列式