学数学、做数学、用数学 丛书

探秘数学世界

九年级（上）

华东师范大学出版社

探秘数学世界

本书编写组

九年级（上）

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

探密数学世界.九年级.上/《探密数学世界》编写组编.—上海:华东师范大学出版社,2004.7

ISBN 7-5617-3366-6

Ⅰ.探... Ⅱ.探... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064992 号

探秘数学世界九年级(上)

编　　著　本书编写组
责任编辑　李文革
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购)电话 021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东　中南地区 021-62458734
　　　　　华北　东北地区 021-62571961
　　　　　西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　如东县印刷厂有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　7.75
字　　数　180 千字
版　　次　2004 年 8 月第一版
印　　次　2004 年 8 月第一次
印　　数　1—6000
书　　号　ISBN 7-5617-3366-6/G·1795
定　　价　10.00 元

出 版 人　朱杰人

前　言

学数学离不开做数学题目，但是，数学学习的目的决不仅仅是会做数学题．我们认为：数学可以锻炼我们的思维，使我们学会科学思考问题的方法；数学可以帮助我们观察周围的世界，使我们变得更聪明；数学可以给我们带来快乐，使我们遨游在思想的王国中；数学可以锻炼我们的意志，增强我们的信心等等．因此，学数学的目的在于学会数学地思考、在于体验数学的乐趣、在于用数学．

新的数学课程标准为我们提供了学数学、用数学的舞台．但由于教材的篇幅所限，不能提供足够的题目，让学生巩固知识；不能提供更广泛的探索天地，让学生去发现；不能提供更多的有趣的事例，让学生去体验等等．为更好地帮助教师和学生运用新教材，给学生提供更广阔的数学舞台，进一步体会学数学、用数学的乐趣，提高数学素养，我们组织编写了这套“学数学、做数学、用数学”数学辅导丛书．

这套丛书与华东师大版初中数学实验教材配套．每册的内容按教材中的章节编写．每节分“知识导航”、“探索天地”和“数学乐园”三个栏目．“知识导航”栏目设置的目的是让学生巩固所学知识，其中的题目是一些常规题，要求每一位学生都要掌握．“探索天地”栏目设置的目的是给学生提供更广阔的思维空间，让学生去探索、去思考，其中的选题是教材内容的拓展或深化．“数学乐园”栏目设置的目的是让学生更多地了解学数学、用数学的乐趣，其中有数学家的故事、数学学习方法介绍、数学史料、数学趣题等等．每章都配有“竞技擂台”栏目，用来检验学生的学习成效．

本书由教育部中考评价课题组数学学科负责人、华东师大版初中数学实验教材副主编王继延教授整体构思，华东师大版初中数学实验教材编写组部分成员编写．

书中难免有错误之处，敬请斧正．欢迎广大实验区师生对本书提出宝贵意见．

编　者

2004年5月

目　录

第21章　分　式

第22章　一元二次方程

第23章　圆

第24章　图形的全等



第25章　样本与总体

第21章　分式

§21.1　整式除法

一、知识导航

回　　忆

本节中我们学习了两个内容：同底数幂的除法和单项式除以单项式．正像同底数幂的乘法是整式乘法的基础一样，同底数幂的除法也是整式除法的基础．在知识和应用上两者都有着密切的联系，所以我们在学习本节内容时要特别注意与已有学习经历和知识的联系、比较，注意培养综合应用的能力．

通过举例验证，并借助同底数幂乘法的逆运算，我们得到了同底数幂的除法法则，至此，我们已经完整掌握了幂的运算性质：同底数幂的乘除、两数积的乘方、幂的乘方．要注意相互之间的联系与区别，在实践中正确运用．联系单项式与单项式的乘法法则，单项式除以单项式的运算法则也不难得到，关键是要正确进行系数与指数的有理数运算，特别注意综合运算中的符号．

对多项式除以单项式，课本中提出了要我们进行探索的问题，你已经有结论了吗？有了本节的学习经验以及与多项式乘以单项式法则的比较，相信你一定会成功．但要注意的是多项式除以单项式并不满足交换律，这一点是和多项式与单项式的乘法不同的．

下面的一些问题能巩固你对这些基本运算法则的掌握，也有不少需要你继续探索的内容．

1. 用数学公式表示下列幂的运算性质：

(1) 同底数幂的乘法；　　　　(2) 同底数幂的除法；

(3) 两数积的乘方；　　　　(4) 幂的乘方．

2. 指出下列运算是否正确，简要说明原因：

(1) $x^{12} \div x^{3} = x^{4}$;　　　　(2) $(-x)^{6} \div (-x)^{4} = -x^{2}$;

(3) $(-x)^{10} \div x^{5} = x^{5}$;　　　　(4) $(-x)^{6} \div (-x^{3}) = x^{3}$.

3. 直接写出下列各式的结果：

(1) $a^{3} \div a^{4} \cdot a^{5} =$ ______;

(2) $(-x^{3})^{2} \div (-x^{2})^{3} =$ ______;

(3) $8x^{3}y^{5}z \div (-2x^{2}y^{4}) =$ ______;

(4) $-\frac{4}{3}ab^{4}c^{2} \div \left(-\frac{5}{6}b^{4}c\right) =$ ______.

4. 计算：

(1) $(x^{4}x^{5}) \div x^{3}$;　　　　(2) $(-y^{2})^{3} \div (-y^{3})^{3} \cdot (-y^{2})^{2}$;

(3) $(-3a^{2})^{3} \div (-2a)^{2}$;　　　　(4) $x^{2}y \cdot (-x^{4}y^{3}) \div (-2x^{3}y)^{2}$.

5. 计算：

(1) $(6x^{4} - 3x^{3} + 2x^{2} - x) \div (-2x)$;　　　　(2) $(16x^{2}y^{3} - 8x^{3}y^{2}z) \div 8x^{2}y^{2}$;

(3) $[(-x^{4}y^{3})^{2} - (-x^{3}y^{4})^{2}] \div (-x^{2}y^{3})^{2}$.

6. 计算，并将结果用科学记数法表示：

(1) $(6.9 \times 10^{9}) \div (1.5 \times 10^{4})$;　　　　(2) $(2.3 \times 10^{12}) \div (-8 \times 10^{8})$.

7. 我国的森林覆盖面积是 1.34×10^{6} 平方千米，占我国国土总面积 9.6×10^{6} 平方千米的比例是多少？

8. 已知太阳到地球的距离是 1.5×10^{11} 米，光的传播速度是 3×10^{5} 千米／秒，太阳光线射到地球上需多少时间？

9. 化简 $[(x+y)(x-y) - (x-y)^{2}] \div (-2y)$，并求出当 $x = \sqrt{2}$，$y = 2\sqrt{2}$ 时，代数

式的值.

10. 化简下列各式(n 是正整数):

(1) $(-3x^{2n+2}y^{n})^{3} \div [(-x^{3}y)^{2}]^{n}$;

(2) $(3a^{n+4}b^{n+3}+2a^{n+3}b^{n+2}-12a^{n+2}b^{n+1}) \div 6a^{2}b^{n}$.

11. 化简:

(1) $(a-b)^{5} \div (a-b)^{3}$;

(2) $12(2x+y)^{4} \div [-8(y+2x)^{3}]$;

(3) $(m-n)^{2} \div (n-m)^{4} \cdot (n-m)^{3}$.

12. 已知一个单项式乘以$\frac{1}{3}x^{2}y^{5}z$所得的积是$-2x^{4}y^{5}z^{2}$,求这个单项式.

13. 已知一个单项式除以$2a^{3}bc^{2}$所得的商是$\frac{1}{2}ab^{2}c^{2}$,求这个单项式.

14. 已知一个多项式减去$x^{2}-x-1$后除以$2x^{2}$的商是$x+2$,求这个多项式.

15. 试进行下列多项式的除法运算:

(1) $(x-y)^{3}(x+y)^{2} \div [(x-y)(x+y)^{2}]$;

(2) $(x^{2}-4) \div (x-2)$.

二、探索天地

我们已经掌握了单项式与单项式相除的法则,也在课堂上探索了多项式除以单项式的方法,后者实际上就是前者的推广.可是,对于多项式除以多项式,该如何进行呢?我们在这

里介绍一种像多位数除法一样的方法，适用于含同一个字母的两个多项式相除. 例如：

计算 $(x^4+4x^2-3x^3-7x+6)\div(x-2)$.

我们可以把它写成多位数相除的竖式形式，注意将被除式与除式都按字母的降幂排列. 然后，(1)用除式第一项 x 除被除式第一项 x^4，得商式第一项 x^3；(2)用商式第一项 x^3 去乘除式，把所得的积写在被除式下面(同类项对齐)，从被除式中减去这个积，得到第一余式(可以只写出其中的前两项 $-x^3+4x^2$ ——与除式项数相同)；(3)将 $-x^3+4x^2$ 作为新的被除式继续上述过程(在原被除式中逐一移下一项)，直至余式次数小于除式次数为止. 如下式所示：

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & x^3 & -x^2 & +2x & -3 & \cdots\cdots\text{商式} \\
\text{除式}\cdots\cdots x-2 & \big)\,x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -7x & +6 & \cdots\cdots\text{被除式} \\
 & (-)\ x^4 & -2x^3 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -x^3 & +4x^2 & & & \cdots\cdots\text{第一余式前两项} \\
 & & (-)\ -x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 2x^2 & -7x & & \cdots\cdots\text{第二余式前两项} \\
 & & & (-)\ 2x^2 & -4x & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -3x & +6 & \cdots\cdots\text{第三余式} \\
 & & & & (-)\ -3x & +6 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 & \cdots\cdots\text{余式}
\end{array}
$$

所以 $(x^4+4x^2-3x^3-7x+6)\div(x-2)=x^3-x^2+2x-3$.

试写出多位数除法 13 476 ÷ 12 的竖式算式，比较一下它们是否很相像，不过要注意这里是没有进位和退位的. 此外，还应注意两点：①如果除式或被除式中有缺项，要补全之后再进行，如 x^4+4x^2-7x+6，要写成 $x^4+0x^3+4x^2-7x+6$；②如果最后余式不为 0，即不能整除，可将结果分别写成商式和余式的形式. 下面就请你检验一下自己的阅读理解和探索的能力.

16. 计算：

(1) $(6x^4+4x^3-5x^2+3x+1)\div(3x^2+5x+1)$;

(2) $(x^5-6x^3+7x^2-7x+3)\div(x^2-2x+1)$.

17. 试计算 $(2x^3+9x^2y+xy^2-12y^3)\div(2x+3y)$.

18. 已知 x^3+6x^2+4x+m 能被 $x+2$ 整除，求 m 的值.

同学们大概都碰到过与下面一个问题类似的情境：一次登山活动中，小明上山时的平均速度是 4 千米/时，沿原路下山时的平均速度是 6 千米/时. 问小明在全程中的平均速度是多少？

有不少同学误认为结果是 6 和 4 的平均数 5(千米/时)，其实不是这样的. 我们可以应用整式的除法给予说明：设小明登山全程是 $2S$ 千米，那么上、下山的路程各是 S 千米，在上、下山中所花时间分别为$\frac{S}{4}$小时和$\frac{S}{6}$小时，全程共花时间 $\left(\frac{S}{4}+\frac{S}{6}\right)$ 小时，所以小明在全程中的平均速度是 $2S\div\left(\frac{S}{4}+\frac{S}{6}\right)=2S\div\frac{5S}{12}=4.8$(千米/时).

下面两个问题请你试一试，它们与上述问题是否相似？有什么不同？你也能列出代数式，应用整式除法给予说明吗？

19. 商店有两种单价分别为 12 元/千克和 8 元/千克的糖果，现将质量相同的这两种糖果混合在一起，按 10 元/千克的单价出售，问商店是否比原来多获利？

20. 商店有两种单价分别为 12 元/千克和 8 元/千克的糖果，现将总售价相同的这两种糖果混合在一起，按 10 元/千克的单价出售，问商店是否比原来多获利？

三、数学乐园

墓志铭中的数学文化

墓志铭通常是对死者生卒时间及生平事迹的简述，以示纪念. 其中也不乏反映出各个时代的数学文化特征. 一类是不同时代的数字符号及其不同的表示方式，例如古埃及僧侣的墓碑上用一种"单位分数(我们下面就将见到)"表述死者的生卒年月. 有一些地方还曾流行用数学谜语的方式表述死者的一生，如大家熟悉的丢番图的墓志铭，它既告诉了人们丢番图的年龄，也让人们联想起丢番图在方程领域所作出的贡献.

更有不少数学家，他们生前献身数学，死后人们就在他们的墓碑上刻上代表他们生平业绩的标志. 例如古希腊学者阿基米德死于进攻西西里岛的罗马士兵之手，死前还高叫"不要弄坏我的圆". 人们为了纪念他发现球的体积和表面积都等于其外切圆柱的体积和表面积的三分之二，在其墓碑上刻着内切于圆柱的球. 我们熟悉的数学家高斯，自从发现了正十七边形的尺规作法，走上了献身数学的道路，人们在他家乡的一座纪念碑底座上刻着一个正十七边形. 16 世纪德国数学家鲁道夫花了毕生精力把圆周率计算到小数点后 35 位，后人称之为鲁道夫数，并将这个数刻在他的墓碑上. 瑞士数学家伯努利生前对螺线研究有贡献，人们就在他的墓碑上刻了一条对数螺线，并在碑文上写着"我虽然改变了，但却和原来一样"，既刻画了螺线的性质，又象征了他对数学的热爱.

原书缺页

5. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{2b}{a}\right)^2\left(-\dfrac{a}{2b^2}\right)$；

(2) $-\dfrac{2n}{3m^2}\div 6mn^2$；

(3) $\dfrac{3ab^2}{4c}\div\left(-\dfrac{9a^2b^3}{8cd}\right)$；

(4) $-\dfrac{3}{x^2}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}x^2y\right)\div\left(\dfrac{2y}{x^2}\right)^2$.

6. 计算：

(1) $\dfrac{a}{2x^2y}+\dfrac{b}{3xy^2}-\dfrac{c}{6xy}$；

(2) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $\dfrac{3}{1+x}-\dfrac{12}{x^2-1}-\dfrac{6}{1-x}$；

(4) $\dfrac{a^2+ab}{a^2b-b^3}-\dfrac{a^2-ab}{ab+a^2}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

7. 当 x 取何值时，分式 $\dfrac{2x-3}{2x+3}$ 的值是 -2？

8. 计算：

(1) $\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)\div\dfrac{2x}{1-x}$；

(2) $\left(a-\dfrac{a}{a+1}\right)\div\dfrac{a^2-2a}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-4}{a^2+3a+2}$.

9. 求下列分式的值：

(1) 已知 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{5}$，求 $\dfrac{3x-2y}{5x+6y}$ 的值；

(2) 已知 $x:2y:3z=3:4:6$，求 $\dfrac{3x^2-xy+2y^2}{2x^2-5xz+z^2}$ 的值.

10. 已知 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9$ 的值.

11. 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$, 求代数式 $\dfrac{2x^2-3xy+2y^2}{xy-x^2-y^2}$ 的值.

12. 已知 a、b 互为倒数,求代数式 $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$ 的值.

13. 已知 $\dfrac{|a|}{a-a^2}=\dfrac{1}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

14. 已知 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{x+y}$,求 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 的值.

15. 已知 $abc=1$, 将下列和式中后两个分式的分母化为和第一个分式的分母相同,并计算:

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}.$$

16. 列出下列问题中的代数式:

(1) 一项工程,甲单独完成需 a 天,乙单独完成需 b 天. 求甲乙两人合作一天完成的工程量及两人合作完成的天数;

(2) 某山区为了开发利用水资源,需要测得一段路程之内水流的平均速度. 测量人员驾驶汽艇在这段路程中顺、逆流来回行驶,测得两段时间分别为 t_1 小时和 t_2 小时. 已知汽艇在静水中的速度是 v 千米/时,求水流的平均速度.

二、探索天地

像分数中有繁分数一样,分式中也有一些这样的"高层建筑": $\dfrac{\frac{1}{a-1}}{\frac{a}{a-2}}$, $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{1+x}}$. 一个分式的分子或分母中还有分式,这样的分式称为繁分式. 望形生义,它给人的感觉就是"繁". 越繁就越应该理清头绪,辨明哪一条是"主要的分数线":它写在所在行的中间,通常划得稍长一些. 这样我们就能确定繁分式中谁是分子、谁是分母,可以按照分式的意义,将它转

换成除法来进行化简，如对第一个繁分式，我们可以化为 $\frac{1}{a-1}\div\frac{a}{a-2}=\frac{1}{a-1}\times\frac{a-2}{a}=\frac{a-2}{a(a-1)}$；我们也可以根据分式的基本性质，在分子和分母中同时乘以分子、分母中各个"小分母"的最小公倍式，去掉这些"小分母"，如对第二个繁分式，我们可以写成 $\frac{\frac{1}{x}x(x+1)}{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)x(x+1)}=\frac{x+1}{x(x+1)+x}=\frac{x+1}{x^2+2x}$.

对于繁分式中字母取值范围的确定，我们应该遵循这样一个原则：字母的取值必须使得繁分式中"大大小小"的分母都不为零. 例如在上述第一个繁分式中，a 的取值范围应该是不等于 0、1、2 的实数；对第二个繁分式，我们容易发现 x 不能取 0 和 -1，还必须使 $1+\frac{1}{1+x}\neq 0$，对这一个要求，目前我们还只能"凑"出 $x\neq -2$（到本章学习结束，我们就容易得出这一结果），所以 x 的取值范围应该是不等于 -2、-1、0 的实数.

17. 化简下列各式：

(1) $\frac{1}{1+\frac{1}{2+x}}$；　　(2) $\frac{\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}}{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}}$.

18. 求下列繁分式中字母的取值范围：

(1) $\frac{\frac{x}{x-2}-3}{x}$；　　(2) $\frac{1-\frac{a}{a+1}}{2-\frac{1}{a-1}}$.

19. 两个简单的多项式相除，我们在上一节中介绍了竖式除法，对一些能够分解因式的多项式相除，我们还可以将它写成分式的形式，利用分式的约分进行化简. 下面请你独立进行尝试，体验一下这种方法的作用：

(1) $(4x^2-y^2)\div(2x-y)$；　　(2) $(6x^3-12x^2)\div[3(x-2)]$；

(3) $(x^4-2x^3+x^2)\div(x^4-x^2)$；　　(4) $(2x+6)(x^2-9)\div(x+3)^2$.

20. 用适当的方法计算：

(1) $[(x+y)^2-(x-y)^2]\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$；

(2) $\left[\dfrac{1}{(a+b)^2}-\dfrac{1}{(a-b)^2}\right]\div\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}\right)$.

三、数学乐园

最早的分数

我们在课本中见到了我国应用分数运算法则的历史，但分数的出现远比这一时期早得多. 世界上应用分数最早的是古巴比伦(现在伊拉克一带)人，在公元前2100年的著作中已经出现六十分制的分数，如用 $\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{60^2}+\dfrac{1}{60^3}$ 表示1°角的正弦函数值；公元前1850年左右，埃及的僧侣所写的数学著作中，广泛采用正整数的倒数(也称作单位分数)形式来表示分数，例如 $\dfrac{2}{13}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{52}+\dfrac{1}{104}$；在我国，据《左传》记载，公元前770年，国王给诸侯封地时就用分数给出了封地的标准. 例如：给诸侯封地“大都不过三国之一，中五之一，小九之一”，意思是：诸侯的都城最大的不得超过国都的 $\dfrac{1}{3}$，中等的不超过 $\dfrac{1}{5}$，小的不超过 $\dfrac{1}{9}$.

至于分数运算法则的完整研究和应用，则正如课本阅读材料中所介绍的那样，我国至少领先400多年. 直到公元7世纪，英国学者倍达还说：“世界上有很多难做的事情，没有比分数的四则运算更难的了.”

连 分 数

我们知道，无理数是无限不循环小数，$\sqrt{2}=1.414\,213\,56\cdots$ 也是这样. 但是你知道吗？它也可以用循环的形式被表示出来. 观察下列各算式：

$$1+\frac{1}{2}=1.5,\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1.4,\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\approx 1.416\,7,\ \cdots$$

一次比一次更接近 $\sqrt{2}$. 继续这样的过程，我们得到的数将会和 $\sqrt{2}$ 越来越接近(如果你不信，不妨取出计算器再试几个)，写成无限“循环”的形式，我们便可以得到 $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$.

这种形式被称为“连分数”，它在数学上有极重要的应用. 事实上，任何形如 $\sqrt{n}$(n 是正整数)的无理数都可以用循环的连分数来表示，如 $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$，你能看出