新编数学习题集系列丛书

Mathematics

拓扑学习题集

邹应 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学习题集/邹应编著.—武汉：武汉大学出版社，2003.9
ISBN 7-307-03528-6

Ⅰ.拓…　Ⅱ.邹…　Ⅲ.拓扑—高等学校—习题　Ⅳ.0189-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009628 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：张　昕　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：[illegible]edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：湖北省荆州市[illegible]有限公司
开本：787×960　1/16　印张：19　字数：348 千字
版次：2003 年 9 月第 1 版　　2003 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03528-6/O·2[illegible]　　定价：25.00 元

编者的话

拓扑学是大学理科数学的一门重要的专业基础课程，一、二年级的数学分析实际上已经涉及有限维 $\mathbf{R}^n$ 空间的一些基本拓扑概念及结论，三、四年级中的测度与积分、泛函分析、Banach 空间的微分学、微分方程、凸与变分分析及数值分析等都与拓扑学的知识密切相关。因此学好拓扑学对于大学阶段的学习以及为将来的科学研究打好扎实的理论基础都具有十分重要的意义。

本习题集共分五章：拓扑空间、紧空间、完备度量空间、连通空间及内积空间（赋范向量空间穿插各章之中），它们是点集拓扑的最核心、最基础的部分。每一章由**课程回顾**、**习题单列**、**习题解答**三部分组成。**课程回顾**部分比较详尽地列举了本章所涉及的最基本的概念与主要定理；**习题单列**部分收集了许多有典型代表性的习题和问题，有的是对基本概念的加深，有的是介绍一些重要结论，所选题目都具有一定的难度，有少数习题还需要泛函分析中的弱收敛、弱闭等概念，这些习题可以留到以后再去研究。

为了帮助读者易于选择，作者用符号“·”、“··”及“∴”加以区别，难度自然随黑点增多而增加。

所有习题解答只是作者提供的一种解法，希望读者充分发挥自己的创造性独立思考，做出属于自己的题解。

本习题集可以作为作者在武汉大学出版社先行出版的《数学分析习题集及其解答》的续编，因为在那里有关度量空间部分的习题是放在本习题集中的。

本习题集的绝大部分题目选自参考书目 [1]，[3]，[5] 的练习题。为了丰富课程内容及拓展知识面，作者少量地选择了其他参考书目中的一些重要问题作为本习题集的习题，对这些问题的原题解都作了必要的加工，补充了原题解中被省略的证明，弥补了一些论证上的缺陷和不足。作者对所引参考书目的作者表示感谢。

此习题集是作者于 1994～1999 年在马里共和国巴马科高等师范学校及马里大学理学院数学系任教期间编写的。作者对这两个学校的中心图书馆为编写此书所提供的工作便利表示谢意，作者对与马里大学理学院数学系系主任 Gaoussou

TRAORE 教授个人之间的交流表示感谢。

此习题集的出版得到武汉大学出版社的大力支持，在此特向武汉大学出版社表示衷心的感谢。

邹 应

2001 年 2 月

目　　录

第 1 章　拓扑空间

课程回顾 ………………………………………… (1)

习题单列 ………………………………………… (12)

习题解答 ………………………………………… (29)

第 2 章　紧空间

课程回顾 ………………………………………… (106)

习题单列 ………………………………………… (108)

习题解答 ………………………………………… (114)

第 3 章　完备度量空间

课程回顾 ………………………………………… (143)

习题单列 ………………………………………… (146)

习题解答 ………………………………………… (156)

第 4 章　连通空间

课程回顾 ………………………………………… (213)

习题单列 ………………………………………… (214)

习题解答 ………………………………………… (218)

第 5 章　内积空间

课程回顾 ………………………………………… (240)

习题单列 ………………………………………… (243)

习题解答 ………………………………………… (251)

参考书目 ………………………………………… (298)

第 1 章　拓扑空间

I　课程回顾

1．距离与范数

▲　**定义**

- 设 E 是一集合，一个映射 $d: E\times E\to\mathbf{R}_+$ 称为 E 上的**距离**，当且仅当下述条件满足：

  1）$\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y.$　　（分离性）

  2）$\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=d(y,x).$　　（对称性）

  3）$\forall (x,y,z)\in E^3,\ d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$（三角形不等式）

  若 d 是 E 上的一个距离，则二元组 (E,d) 称为一个**度量空间**.

- 在 $\mathbf{R}^n$ 上，令：$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，

$$d_0(x,y)=((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|,$$
$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

  则 d_0,d_1,d_∞ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离，称为 $\mathbf{R}^n$ 的三个**标准距离**，d_0 称为**常用距离**或**欧几里得距离**.

- 设 E 是一 $\mathbf{K}$- 向量空间（$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）. 一个映射 $\|\cdot\|: E\to\mathbf{R}_+$ 称为 E 上的**范数**，当且仅当下述条件满足：

  1）$\forall x\in E,\ \|x\|=0\Leftrightarrow x=0.$

  2）$\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbf{K},\ \|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|.$

  3）$\forall (x,y)\in E^2,\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$

  若 $\|\cdot\|$ 是 E 上的范数，则二元组 $(E,\|\cdot\|)$ 称为一个**赋范向量空间**.

- 在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$ 上，令：$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，

$$\|x\|_0=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$
$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

则 $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数，并称之为 $\mathbf{R}^n$ 上的三个**标准范数**. $\|\cdot\|_0$ 也称为**常用范数**或**欧几里得范数**.

- 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是一赋范向量空间. 令：

$$d(x,y)=\|x-y\|\quad(\forall x,y\in E).$$

则 d 是 E 上的一个距离，称为**由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的距离**.

- 设 (E,d) 是一度量空间，$A\subset E$. 则 d 在 $A\times A$ 上的限制 $d|_{A\times A}$ 是 A 上的一个距离，称为**由 d 诱导的距离**，记为 d_A. 而 (A,d_A) 称为 (E,d) 的**度量子空间**.

- 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是一赋范空间，$A\subset E$ 是一向量子空间，$\|\cdot\|$ 在 A 上的限制 $\|\cdot\||_A$ 是 A 上的一个范数，称为**由 $\|\cdot\|$ 诱导的范数**，记为 $\|\cdot\|_A$. 而 $(A,\|\cdot\|_A)$ 称为 $(E,\|\cdot\|)$ 的**赋范向量子空间**.

- 设 (E,d) 是一度量空间，$a\in E$，$r\geqslant 0$.

  1) 集合 $\{x\in E\mid d(a,x)<r\}$ 称为**以 a 为中心、r 为半径的开球**，记为 $B_d(a,r)$ 或 $B(a,r)$.

  2) 集合 $\{x\in E\mid d(a,x)\leqslant r\}$ 称为**以 a 为中心、r 为半径的闭球**，记为 $B_d(a,r]$ 或 $B(a,r]$.

  3) 集合 $\{x\in E\mid d(a,x)=r\}$ 称为**以 a 为中心、r 为半径的球面**，记为 $S_d(a,r)$ 或 $S(a,r)$.

- 设 (E,d) 是一度量空间，$A\subset E$，$B\subset E$.

  1) 若 $\sup\limits_{(x,y)\in A^2}d(x,y)<+\infty$，则称 A 是**有界的**，实数 $\sup\limits_{(x,y)\in A^2}d(x,y)$ 称为 A 的**直径**，记为 $\mathrm{diam}(A)$.

  2) 实数 $\inf\limits_{x\in A,\ y\in B}d(x,y)$ 称为 **A 与 B 之间的距离**，记为 $d(A,B)$. 若 $A=\{x\}$，则 $d(\{x\},B)$ 称为**从 x 到 B 的距离**，记为 $d(x,B)$.

- 设 X 是任一非空集合，(E,d) 是一度量空间，$f\colon X\to E$ 是任一映射. 称 f 在 X 上是**有界的**，当且仅当 $f(X)\subset E$ 是有界集. 记 $\mathscr{B}(X,E)$ 为所有有界函数 $f\colon X\to E$ 的集合.

- 设 E 是任一集合，d_1,d_2 是 E 上的两个距离. 称 d_1 与 d_2 是**等价的**，当且仅当 $\exists C_1>0$，$C_2>0$ 使得

$$C_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C_2 d_1(x,y) \quad (\forall (x,y) \in E^2).$$

设 E 是一 $\mathbf{K}$- 向量空间，$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 E 上的两个范数. 称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是**等价的**，当且仅当 $\exists C_1 > 0,\ C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1 \quad (\forall x \in E).$$

于是 $\mathbf{R}^n$ 上的三个标准距离(或三个标准范数)是互相等价的，因为

$$d_\infty \leqslant d_0 \leqslant d_1 \leqslant n\, d_\infty \quad (\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_0 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant n\|\cdot\|_\infty).$$

2. 拓扑空间

(1) 拓扑

▲ **定义**

- 设 X 是一集合. 记 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的所有子集的集合. $\mathscr{P}(X)$ 的一个子集 $\mathscr{T}$ 称为 X 的一个**拓扑**，当且仅当下述条件满足：

  1) $\varnothing, X \in \mathscr{T}$.

  2) $\forall U, V \in \mathscr{T},\ U \cap V \in \mathscr{T}$.

  3) $\forall U_\lambda \in \mathscr{T}$ (这里 $\lambda \in \Lambda$，Λ 为指标集)，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{T}$.

  若 $\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑，则二元组 $(X,\mathscr{T})$ 称为一个**拓扑空间**. $\mathscr{T}$ 的每一个元素 U 称为 X 的一个**开集**. X 的一个子集 F 称为 $(X,\mathscr{T})$ 的**闭集**(或简称为 X 的闭集)，当且仅当 $X - F$ 是 X 的开集.

- 设 X 是一非空集合. 令 $\mathscr{T}_g = \{\varnothing, X\}$，$\mathscr{T}_d = \mathscr{P}(X)$. 则 $\mathscr{T}_g$ 与 $\mathscr{T}_d$ 是 X 上的两个拓扑，$\mathscr{T}_g$ 称为 X 的**粗拓扑**，$\mathscr{T}_d$ 称为 X 的**离散拓扑**.

- 在 $\mathbf{R}$ 上，记 $\mathscr{C}$ 为下述 5 种形式的区间的集合：

  $\varnothing$; $\mathbf{R}$; (x,y) $(x,y \in \mathbf{R},\ x < y)$; $(-\infty, x)$ $(x \in \mathbf{R})$; $(x, +\infty)$ $(x \in \mathbf{R})$.

  设 $\mathscr{O}_\mathbf{R}$ 为 $\mathscr{C}$ 的元素的任意并的集合. 则 $\mathscr{O}_\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑，称为 $\mathbf{R}$ 的**通常拓扑**.

- 设 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 称 $\mathscr{T}_2$ **比** $\mathscr{T}_1$ **细**，当且仅当 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$，记为 $\mathscr{T}_1 \leqslant \mathscr{T}_2$. 因此对 X 的任一拓扑 $\mathscr{T}$，有 $\mathscr{T}_g \leqslant \mathscr{T} \leqslant \mathscr{T}_d$.

- 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间，$\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$. 称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个**拓扑基**，当且仅当 X 的每一个开集是 $\mathscr{B}$ 的元素的并. 此外，如果 $\mathscr{B}$ 是可数的，则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个**可数拓扑基**.

- 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间，$x \in X$. X 的一个子集 V 称为 x 的**邻域**，当且仅当存在 X 的一个开集 ω 使得 $x \in \omega \subset V$. x 的所有的邻域的集合记为 $\mathscr{U}(x)$，称为 x 的**邻域系**. $\mathscr{U}(x)$ 的一个子集 $\mathscr{B}(x)$ 称为 x 的**邻域基**，当且仅当 $\forall V \in \mathscr{U}(x)$，$\exists B \in \mathscr{B}(x)$ 使得 $B \subset V$.

若 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的一个邻域基并且 $\mathscr{B}(x)$ 是可数的，则称 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的**可数邻域基**.

- 设$(X,\mathscr{T})$是一拓扑空间.
  1) 若 $\forall x \in X$, x 有一个可数邻域基，则称 X 满足**第一可数公理**.
  2) 若 $\mathscr{T}$ 有一个可数拓扑基，则称 X 满足**第二可数公理**.
- 一个拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为是**分离的**，当且仅当 $\forall x,y \in X$ 且 $x \neq y$, $\exists U \in \mathscr{U}(x)$, $V \in \mathscr{U}(y)$ 使得 $U \cap V = \varnothing$.
- 设(X,d)是一度量空间，记$\mathscr{T}^d$为X的开球的并的集合. 则$\mathscr{T}^d$是X上的一个拓扑，称为**由 d 生成的拓扑**. 如果 X 是一个 **K**- 向量空间，度量 d 是由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的，则$\mathscr{T}^d$ 称为**由范数 $\|\cdot\|$ 生成的拓扑**.
- X 上的两个距离 d_1 与 d_2 称为是**拓扑等价的**，当且仅当 $\mathscr{T}^{d_1} = \mathscr{T}^{d_2}$.
- 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为**可度量的**，当且仅当存在一个距离 d 使得 $\mathscr{T} = \mathscr{T}^d$.
- 设$(X,\mathscr{T})$是一拓扑空间，$A \subset X$ 是一子集. 令
$$\mathscr{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathscr{T}\}.$$
则 $\mathscr{T}_A$ 是A 上的一个拓扑，称为$\mathscr{T}$在 A 上的**诱导拓扑**. $(A,\mathscr{T}_A)$称为$(X,\mathscr{T})$(或简称为 X)的**拓扑子空间**. $\mathscr{T}_A$ 的每一个开集(或闭集)称为 A 的**相对开集**(或**相对闭集**).
- **有限乘积拓扑空间**
设$(E_i,\mathscr{T}_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$是 n 个拓扑空间. 令 $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. $\forall U_i \in \mathscr{T}_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ 称为E 的**基本开集**. 记$\mathscr{T}$为所有基本开集的并组成的集合. 则$\mathscr{T}$是 E 上的一个拓扑，称为 E 的**乘积拓扑**，二元组$(E,\mathscr{T})$称为$(E_i,\mathscr{T}_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$的**乘积拓扑空间**.
设 $n \in \mathbf{N}^*$ $(\mathbf{N}^* = \{1,2,\cdots\})$, $\mathbf{R}$ 赋予通常拓扑 $\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$. 则 n 个拓扑空间$(\mathbf{R},\mathscr{O}_{\mathbf{R}})$的乘积拓扑空间的乘积拓扑$\mathscr{T}$称为 $\mathbf{R}^n$ 的**通常拓扑**. 设 $I_i \subset \mathbf{R}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$是有界开区间，则基本开集 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 称为$\mathbf{R}^n$ 的**开长方体**. 若 I_i $(i = 1,2,\cdots,n)$为$\mathbf{R}$的有界闭区间，则 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的**闭长方体**.
- **任意乘积拓扑空间**
设 I 是一非空指标集. $\forall i \in I$, $(E_i,\mathscr{T}_i)$是一拓扑空间. 令 $E = \prod_{i\in I} E_i$. 于是 $x \in E$，当且仅当 $x = (x_i)_{i\in I}$ 且 $x_i \in E_i$ $(\forall i \in I)$.
设 $J \subset I$ 是任一有限集，$\forall j \in J$, $U_j \in \mathscr{T}_j$，则乘积
$$\prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I-J} E_i$$

称为 E 的**基本开集**. 由 E 的基本开集的任意并组成的集合 $\mathscr{T}$ 称为 E 的**乘积拓扑**. 二元组 $(\prod_{i\in I}E_i,\mathscr{T})$ 称为 $(E_i,\mathscr{T}_i)$ $(i\in I)$ 的**乘积拓扑空间**.

- 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间, $\mathscr{R}$ 是 X 上的一等价关系, $X/\mathscr{R}$ 是 X 关于 $\mathscr{R}$ 的商集, $p: X\to X/\mathscr{R}$ 是标准投影. 令

$$\mathscr{T}_{\mathscr{R}}=\{U\subset X/\mathscr{R}\mid p^{-1}(U)\in\mathscr{T}\}.$$

则 $\mathscr{T}_{\mathscr{R}}$ 是商集 $X/\mathscr{R}$ 上的一个拓扑, 称为 X 的**关于 $\mathscr{R}$ 的商拓扑**, 二元组 $(X/\mathscr{R},\mathscr{T}_{\mathscr{R}})$ 称为 X 的**关于 $\mathscr{R}$ 的商空间**.

▲ **定理**

定理 1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间, $\mathscr{S}$ 是 X 的所有闭集组成的集合, 则

1) $\varnothing,X\in\mathscr{S}$;

2) 若 $F_1,F_2,\cdots,F_n\in\mathscr{S}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n}F_i\in\mathscr{S}$;

3) 若 $F_\lambda\in\mathscr{S}$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$, 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathscr{S}$.

定理 2 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间, $\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$ 是一子集, 那么 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的拓扑基, 当且仅当 $\forall x\in X$, $\{U\in\mathscr{B}\mid x\in U\}$ 是 x 的一个邻域基.

定理 3 设 X 是任一非空集合, $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$. 令

$$\mathscr{B}=\{X\}\cup\{A\subset X\mid \exists A_1,A_2\cdots,A_n\in\mathscr{A}\text{使得 }A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\}.$$

那么存在 X 的惟一的拓扑 $\mathscr{T}$ 使得 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的拓扑基. $\mathscr{T}$ 称为由 $\mathscr{A}$ 生成的拓扑.

定理 4 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间, $A\subset X$ 是一非空集合.

1) V 是 A 的开集 $\Leftrightarrow\exists U\in\mathscr{T}$ 使得 $V=A\cap U$.

2) F 是 A 的闭集 $\Leftrightarrow\exists X$ 的闭集 G 使得 $F=A\cap G$.

定理 5 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间. 则 X 是分离的, 当且仅当集合 $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 是乘积空间 $X\times X$ 的闭集.

定理 6 设 $(E_i,\mathscr{T}_i)$ $(i\in I)$ 是拓扑空间, $(E,\mathscr{T})$ 是它们的乘积拓扑空间(这里 $E=\prod_{i\in I}E_i$).

1) 若 $\forall i\in I$, $(E_i,\mathscr{T}_i)$ 是分离的, 则 $(E,\mathscr{T})$ 是分离的.

2) $\forall i\in I$, 投影映射 $p_i: E\to E_i$ 是开映射, 即对 E 的每一个开集 U, $p_i(U)$ 是 E_i 的开集.

(2) **特殊集合、点**

▲ **定义**

- 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一拓扑空间, $A\subset X$ 是一非空集合.

1) 一个点 $a \in X$ 称为 A 的**闭包点**，当且仅当 $\forall U \in \mathscr{U}(a)$，$U \cap A \neq \varnothing$. A 的所有闭包点的集合称为 A 的**闭包**，记为 $\overline{A}$.

2) 一个点 $a \in X$ 称为 A 的**内点**，当且仅当 $\exists X$ 的一个开集 U 使得 $x \in U \subset A$. A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**，记为 $\mathring{A}$.

3) 一个点 $a \in X$ 称为 A 的**边界点**，当且仅当 $\forall U \in \mathscr{U}(a)$，$U \cap A \neq \varnothing$ 且 $U \cap (X - A) \neq \varnothing$. A 的所有边界点的集合称为 A 的**边界**，记为 ∂A.

4) 一个点 $a \in X$ 称为 A 的**聚点**，当且仅当 $\forall U \in \mathscr{U}(a)$，

$$U \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing.$$

5) 一个点 $a \in X$ 称为 A 的**孤立点**，当且仅当 $a \in A$ 且 $\exists U \in \mathscr{U}(a)$ 使得 $U \cap (A - \{a\}) = \varnothing$，或当且仅当 $\exists U \in \mathscr{U}(a)$ 使得 $U \cap A = \{a\}$.

6) A 称为 X 的**离散集**，当且仅当 A 的每一点是 A 的孤立点.

7) A 称为在 X 中**稠密**，当且仅当 $\overline{A} = X$.

- 一个拓扑空间 $(X, \mathscr{F})$ 称为是**可分的**，当且仅当 X 有一个可数稠密集.

▲ 定理

定理 7 设 $(X, \mathscr{F})$ 是一拓扑空间，$A \subset X$，$B \supset X$.

1) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

2) A 是闭集 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

3) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

定理 8 设 $(X, \mathscr{F})$ 是一拓扑空间，$A \subset X$，$B \subset X$.

1) $\mathring{A}$ 是包含在 A 中的最大开集.

2) A 是开集 $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

3) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

4) $X - \mathring{A} = \overline{X - A}$；$X - \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$.

5) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$；$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

定理 9 设 $(X, \mathscr{F})$ 是一拓扑空间，$A \subset X$.

1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$，因此 ∂A 是闭集.

2) $\partial A = \partial(X - A)$.

定理 10 设 (E, d) 是一度量空间，$A \subset X$.

1) $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$.

2) A 是闭集 $\Leftrightarrow \forall x \in E$，若 $d(x, A) = 0$，则 $x \in A$.

(3) 极限与极限点

▲ **定义**

- 设$(X,\mathscr{T})$是一拓扑空间，$\{x_n\}$是X的一点序列，$l\in X$. 称l是序列$\{x_n\}$当$n\to+\infty$时的**极限**，当且仅当$\forall U\in\mathscr{U}(l)$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得$\forall n\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N$时，有
$$x_n\in U.$$
若是如此，则记为$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$或$x_n\to l\ (n\to+\infty)$.
  若$(X,\mathscr{T})=(X,d)$，则
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant N\Rightarrow d(x_n,l)<\varepsilon.$$
- 设$(X,\mathscr{T})$与$(Y,\mathscr{S})$是两个拓扑空间；$A\subset X$是一非空集合；$a\in\overline{A}$；$f:A\to Y$是一映射；$l\in Y$. 称l是f**在**a **处的极限**，当且仅当$\forall W\in\mathscr{U}(l)$，$\exists U\in\mathscr{U}(a)$使得
$$f(U\cap A)\subset W.$$
若是如此，则记为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$或$f(x)\to l\ (x\to a)$.
  若$(X,\mathscr{T})=(X,d)$，则
$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall W\in\mathscr{U}(l),\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ d(x,a)<\delta\Rightarrow f(x)\in W.$$
  若$(Y,\mathscr{S})=(Y,\rho)$，则
$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists U\in\mathscr{U}(a),\ \forall x\in U\cap A\Rightarrow\rho(f(x),l)<\varepsilon.$$
  若$(X,\mathscr{T})=(X,d)$，$(Y,\mathscr{S})=(Y,\rho)$，则
$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ d(x,a)<\delta\Rightarrow\rho(f(x),l)<\varepsilon.$$
- 设$\{x_n\}$是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的一点序列. $a\in X$称为$\{x_n\}$的**极限点**，当且仅当$\forall U\in\mathscr{U}(a)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists k_n\in\mathbf{N}$且$k_n\geqslant n$，使得$x_{k_n}\in U$.

▲ **定理**

定理 11 设$(X,\mathscr{T})$是一拓扑空间，$A\subset X$，$a\in\overline{A}$，$f,g:A\to\mathbf{K}$使得$\lim\limits_{x\to a}f(x)$及$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在. 则

1) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim\limits_{x\to a}f(x)+\beta\lim\limits_{x\to a}g(x)$；
2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$；
3) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq0$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$.

定理 12 设$(X,\mathscr{T}_1)$，$(Y,\mathscr{T}_2)$及$(Z,\mathscr{T}_3)$是三个拓扑空间，$f:A\to Y$，$g:B\to Z$是两个映射，$A\subset X$，$a\in\overline{A}$，$B\subset Y$使得$\mathrm{Im}(f)\subset B$，$b\in Y$，$l\in Z$.

1） 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，则$b\in\overline{B}$.

2） 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，$\lim\limits_{y\to b}g(y)=l$，则$\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)=l$.

定理 13 若拓扑空间$(X,\mathscr{F})$的拓扑可由度量d生成，$A\subset X$，$a\in\overline{A}$，$f:A\to Y$. 则使$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$的充分必要条件是：对$A$的收敛于$a$的每一个序列$\{x_n\}$，点序列$\{f(x_n)\}$收敛于$l$.

定理 14 设$(\prod\limits_{i\in I}E_i,\mathscr{F})$是一乘积拓扑空间，$(X,\mathscr{S})$是一拓扑空间，$A\subset X$且$a\in\overline{A}$，$l=(l_i)\in\prod\limits_{i\in I}E_i$，$f:A\to\prod\limits_{i\in I}E_i$是任一映射；$\forall i\in I$，$p_i:\prod\limits_{i\in I}E_i\to E_i$，$f_i=p_i\circ f$，则

$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall i\in I,\ \lim_{x\to a}f_i(x)=l_i.$$

推 论 设$\{x^{(n)}\}$是$\prod\limits_{i\in I}E_i$的一点序列，这里$x^{(n)}=(x_i^{(n)})$，$l=(l_i)\in\prod\limits_{i\in I}E_i$，则

$$\lim_{n\to+\infty}x^{(n)}=l\Leftrightarrow\forall i\in I,\ \lim_{n\to+\infty}x_i^{(n)}=l_i.$$

定理15 设$\{x_n\}$是拓扑空间$(X,\mathscr{F})$的一点序列，$\forall n\in\mathbf{N}$，令$S_n=\{x_m\mid m\geqslant n\}$. 那么$\{x_n\}$的所有极限点的集合$=\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}\overline{S_n}$.

定理 16 设$\{x_n\}$是度量空间(X,d)的一点序列.

1） $a\in X$是$\{x_n\}$的一个极限点，当且仅当存在$\{x_n\}$的一个收敛于a的子序列$\{x_{k_n}\}$.

2） 若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$有惟一的极限点，但反之不然.

定理 17 设(X,d)是一度量空间，$A\subset X$是一非空集合，A是闭集的充分必要条件是：若$x_n\in A\ (n\in\mathbf{N})$且$x_n\to a\in X\ (n\to+\infty)$，则$a\in A$.

(4) 连续性

▲ 定义

- 设$(X,\mathscr{F})$，$(Y,\mathscr{S})$是两个拓扑空间，$f:X\to Y$是一映射.

  1） 称f**在**$a\in X$**处连续**，当且仅当$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

  2） 称f**是连续的**，当且仅当f在每一点$a\in X$处连续.

  若X的拓扑$\mathscr{F}$、Y的拓扑$\mathscr{S}$分别由度量d与ρ生成，则f在a处连续，当且仅当$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得$\forall x\in X$，当$d(x,a)<\delta$时，有

$$\rho(f(x),f(a))<\varepsilon.$$

- 设(X,d)与(Y,ρ)是两个度量空间，$f:X\to Y$是一映射. 称函数f是一致

连续的，当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x, y \in X$ 且 $d(x,y) < \delta$ 时，有

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

若是如此，则上述实数 $\delta > 0$ 称为 f 对 $\varepsilon > 0$ 的**连续模**.

- 设 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一映射. 称 f 是**同胚映射**，当且仅当：

  1) $f: X \to Y$ 是单全射.

  2) f 及 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的.

  称 X 与 Y 是**同胚的**，当且仅当存在一个同胚映射 $f: X \to Y$.

▲ 定理

定理 18 设 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一映射，$a \in X$.

1) 若 f 在 a 处连续，则 $\forall x_n \in X\ (n \in \mathbf{N})$ 且 $x_n \to a$，

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

2) 若 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 由度量 d 生成，则 f 在 a 处连续，当且仅当 $\forall x_n \in X\ (n \in \mathbf{N})$ 且 $x_n \to a$，有 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

定理 19 设 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 是两个拓扑空间，映射 $f, g: X \to Y$ 在 $a \in X$ 处连续.

1) 若 $Y = \mathbf{K}$，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$，$\alpha f + \beta g$ 在 a 处连续；如果 $g(a) \neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在 a 处连续.

2) 若 Y 是一 $\mathbf{K}$- 赋范向量空间，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$，$\alpha f + \beta g$ 在 a 处连续.

定理 20 设 $(X,\mathscr{T}_1), (Y,\mathscr{T}_2), (Z,\mathscr{T}_3)$ 是三个拓扑空间；$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 是两个映射.

1) 若 f 在 $a \in X$ 处连续，g 在 $b = f(a) \in Y$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 a 处连续；特别地，若 f 连续，g 连续，则 $g \circ f$ 连续.

2) 若 f 是同胚，g 是同胚，则 $g \circ f$ 也是同胚.

定理 21 设 $(X,\mathscr{T}), (Y,\mathscr{S})$ 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一映射，则下列结论互相等价：

1) f 是连续的.

2) 对 Y 的每一个开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 X 的开集.

3) 对 Y 的每一个闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集.

定理 22 设 $(X,\mathscr{S})$ 是一拓扑空间，$(\prod\limits_{i \in I} E_i, \mathscr{T})$ 是一乘积拓扑空间，$f: X \to \prod\limits_{i \in I} E_i$

是一映射；$\forall i \in I$，$p_i: \coprod_{i\in I} E_i \to E_i$. f 在 $a \in X$ 处连续，当且仅当 $\forall i \in I$，$p_i \circ f: X \to E_i$ 在 a 处连续.

定理 23 设$(X,\mathscr{T}),(Y,\mathscr{S})$是两个拓扑空间，$\mathscr{R}$是 X 上的一等价关系，$p: X \to X/\mathscr{R}$是标准投影，$f: X/\mathscr{R} \to Y$ 是一映射，则 f 连续的充分必要条件是映射$f \circ p: X \to Y$ 连续.

(5) 在赋范向量空间中的连续性

▲ 定义

- 设$(E, \|\cdot\|_E)$与$(F, \|\cdot\|_F)$是两个 $\mathbf{K}$- 赋范向量空间. 一个映射$f: E \to F$ 称为是**线性的**，当且仅当 $\forall x, y \in E$，$\forall \lambda \in \mathbf{K}$，满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E,F)$ 表示所有从 E 到 F 中的线性映射的集合，用 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ 表示所有从 E 到 F 的连续线性映射的集合. 若 $E = F$，则记 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,E)$ 为 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E)$；若 $F = \mathbf{K}$，则记 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E,\mathbf{K}) = E^*$，$\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,\mathbf{K}) = E'$. E^* 称为 E 的**对偶**，E' 称为 E 的**拓扑对偶**.

- 设$(E_i, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$及$(F, \|\cdot\|)$是 $\mathbf{K}$- 赋范向量空间，一个映射 $f: E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ 称为n **重线性映射**，当且仅当 f 关于$(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times E_n$ 的每一个变量 x_i 是线性的，即 $\forall (x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$，$(x_1,\cdots,y_i,\cdots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times E_n$ 及 $\forall \lambda \in \mathbf{K}$，有

$$f(x_1,\cdots,x_i+y_i,\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n) + f(x_1,\cdots,y_i,\cdots,x_n),$$
$$f(x_1,\cdots,\lambda x_i,\cdots,x_n) = \lambda f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n).$$

用 $ML_{\mathbf{K}}(E_1,E_2,\cdots,E_n;F)$ 表示所有从 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 到 F 中的 n 重线性映射的集合，而用 $\mathscr{ML}_{\mathbf{K}}(E_1,E_2,\cdots,E_n;F)$ 表示所有从 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 到 F 中的连续的 n 重线性映射的集合.

▲ 定理

定理 24 设$(E, \|\cdot\|)$是一 $\mathbf{K}$- 赋范向量空间，$E \times E$ 与 $\mathbf{K} \times E$ 分别赋予乘积拓扑. 那么，

1) $E \times E \to E$，$(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射；
2) $\mathbf{K} \times E \to E$，$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ 是连续映射；
3) $\forall a \in E$，$E \to E$，$x \mapsto a + x$ 是同胚映射.

定理 25 设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 E 上的两个范数，则下述结论等价：

1） $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

2） 恒等映射 id_E：$(E,\|\cdot\|_1)\to(E,\|\cdot\|_2)$ 是同胚的.

定理 26 设$(E,\|\cdot\|)$与$(F,\|\cdot\|)$是两个 **K**- 赋范向量空间，$T\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E,F)$. 则下述各结论互相等价：

1） T 是连续的.

2） T 在 0_E 处连续.

3） 存在常数 $C>0$ 使得 $\forall x\in E$，$\|T(x)\|\leqslant C\|x\|$.

4） T 在单位闭球 $B(0_E,1]$ 上有界.

5） T 在单位球面 $S(0_E,1)$ 上有界.

定理 27 设$(E,\|\cdot\|)$与$(F,\|\cdot\|)$是两个 **K**- 赋范向量空间且 $E\neq\{0\}$，$T\in\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. 令

$$a_1=\sup_{x\in E-\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|},$$

$$a_2=\sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant1}\|T(x)\|,$$

$$a_3=\sup_{x\in E,\ \|x\|=1}\|T(x)\|,$$

$$a_4=\inf\{C\in\mathbf{R}_+\mid\forall x\in E,\ \|T(x)\|\leqslant C\|x\|\}.$$

则 $a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbf{R}_+$. 令 $|||T|||=a_1$. 则 $|||\cdot|||$ 形成 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ 上的一个范数，称为**与 E,F 的范数相应的范数**.

定理 28 设$(E,\|\cdot\|)$，$(F,\|\cdot\|)$及$(G,\|\cdot\|)$是三个 **K**- 赋范向量空间，在 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$，$\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$ 及 $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,G)$ 上分别赋予与 E,F,G 的范数相应的范数，若 $T\in\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$，$S\in\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$，则 $S\circ T\in\mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E,G)$，并且

$$|||S\circ T|||\leqslant|||S|||\cdot|||T|||.$$

定理 29 设$(E_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 及$(F,\|\cdot\|)$是 **K**- 赋范向量空间，$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 赋予乘积拓扑，$\mu\in ML_{\mathbf{K}}(E_1,E_2,\cdots,E_n;F)$，则下述结论互相等价：

1） μ 是连续的.

2） μ 在 0_E 处连续(这里 $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$).

3） 存在 $C\geqslant0$ 使得 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$，
$\|\mu(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\leqslant C\|x_1\|\|x_2\|\cdots\|x_n\|$.

4） μ 在集合 $B(0_{E_1},1]\times B(0_{E_2},1]\times\cdots\times B(0_{E_n},1]$ 上有界.

5） μ 在集合 $S(0_{E_1},1]\times S(0_{E_2},1]\times\cdots\times S(0_{E_n},1]$ 上有界.

Ⅱ 习题单列

1. 设(X,d)是一度量空间. f: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 是一单调上升函数使得 $f(0)=0$ 当且仅当$t=0$并且 $\forall\, t,s \in \mathbf{R}_+$, $f(t+s) \leqslant f(t)+f(s)$.

1) 证明: $f \circ d$ 是X上的一个距离.

2) 证明下述各 $d_i(i=1,2,3,4)$ 都是 X 上的距离:

$$d_1 = d^\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1),\ d_2 = \frac{d}{1+d},\ d_3 = \log(1+d),\ d_4 = \inf(d,1).$$

3) 证明: d_2 与 d_4 是等价的, 试问 d_2 与 d_4 是否等价于 d?

2. (S^n 上的测地距离) 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上定义内积$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 如下: $\forall\, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$,

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{n+1}y_{n+1},\quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle.$$

然后定义映射 s: $S^n \times S^n \to \mathbf{R}_+$ 如下: $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S^n$,

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \arccos\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \in [0,\pi].$$

1) 验证 $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

2) 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in S^n$ 是三个互异点. 令

$$a = s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ b = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}),\ c = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});$$

$$\boldsymbol{x}_y = \frac{\boldsymbol{y}-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{y}-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \boldsymbol{x}\|},\ \boldsymbol{x}_z = \frac{\boldsymbol{z}-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{z}-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \boldsymbol{x}\|};\ \alpha = s(\boldsymbol{x}_y,\boldsymbol{x}_z).$$

证明下述关系式成立:

$$\boldsymbol{y} = (\cos c)\boldsymbol{x}+(\sin c)\boldsymbol{x}_y,\quad \boldsymbol{z} = (\cos b)\boldsymbol{x}+(\sin b)\boldsymbol{x}_z;$$

$$\cos a = \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha.$$

3) 由上述关系式推出 s 是S^n 上的一个距离, 称为 S^n 上的**测地距离**.

4) 证明: s 与 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的常用度量 d_0 在 S^n 上的限制等价.

3. 设 E 是 $\mathbf{R}^3$ 的单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 赋予测地距离 s 的度量空间. $\forall\, \boldsymbol{m} \in E$, $\forall\, \rho>0$, 记 A 为E 的以$\boldsymbol{m}$ 为中心、ρ 为半径的圆. 试计算 A 的直径 $\mathrm{diam}(A)$, 并验证 $\mathrm{diam}(A)$ 不是 ρ 的单调上升的函数.

4. (超度量距离) 设 X 是一非空集合, d 是X 上一距离使得