普通高等教育“十五”国家级规划教材

文科数学基础

陈吉象　主　编
陈吉象　戴　瑛　郑弃冰　吴忠华　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

文科数学基础

陈吉象 主编

陈吉象 戴 瑛 郑奔冰 吴忠华 编

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是编者在多年教学实践基础上，针对文科大学生特点设计编写的高等学校教材，同时以《文科数学基础》为蓝本，研制了配套的网络课程．内容包括离散的线性代数、连续的微积分、随机的概率统计，最后由逻辑初步与若干适合文科学生的数学实验案例结尾．书中附有部分习题答案或提示，以供参考．可供文科学生或对数学有同等要求的读者使用．

图书在版编目（CIP）数据

文科数学基础／陈吉象主编．—北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7－04－011889－0

Ⅰ．文…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 037495 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京二二〇七工厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2003 年 8 月第 1 版
印　张	31.75	印　次	2003 年 8 月第 1 次印刷
字　数	590 000	定　价	32.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

数学对于自然科学的巨大作用是不言而喻的，它是构筑现代物质文明的重要基石．然而数学对于社会与人文科学（我们所说的文科不包括经济管理类）的作用，数学对于现代人整体素质的意义，却是逐渐被人们所认识的．随着知识经济时代的来临，社会经济领域中许多研究对象的数量化趋势越发加强，计算机的广泛普及并深入到人们生活工作中的各个角落，诸如此类现象，向人们提出了一个迫切的问题：每个要想成为有较高文明素养的现代人，应当具备一定的数学素质，因此数学教育对于文科大学生来说，应该是必不可少的了．

事实上，21世纪资源、环境、人口等的压力，知识和信息的大爆炸，越来越短周期的技术更新等等，正在向我们发起严峻的挑战，对学生的应变能力与思维素质的培养，已被提到首要的地位．大学生在大学的几年只是终生学习最重要的一个基础台阶，他们应该在教师的帮助和校园环境的陶冶下，通过适当的知识载体，不断地、自觉地学习和提高自身选择、吸取、整理和创造知识的能力．数学正是这样一个重要的不可或缺的载体．

文科与理科终究有所区别，这不仅在于学科本身，还在于学生素质的差异．不少文科学生由于数学基础（包括数学知识与数学思维能力）较理科学生差一些（当然，少数文科学生也有很好的数学基础），对数学缺乏兴趣，学习数学的动力不足．对于文科学生的数学教育必须考虑到这些．

20世纪80年代后期，南开大学曾自编过文科数学讲义，1995、1999年分别出版过两种文科数学教材．根据多年来的教学实践，同时吸取了许多兄弟院校的经验，我们对原有教材进行了修改和补充，在教育部现代远程教育资源建设委员会和高等教育出版社的支持下，制作了《文科数学基础网络课程》，本书基本上是该网络课件的配套文字教材，可以作为文科专业的本科数学课教材．下面有几点说明：

1．关于选材．现代数学分支五花八门，极其繁多，对于文科学生来说，尤其要抓住主要的基础性部分．现代数学总体上可以理解为离散、连续和随机三个门类，又通过逻辑互相关联，因此我们选取了离散的线性代数、连续的微积分、随机的概率与数理统计，然后是逻辑初步，最后用数学实验作为结尾．

2. 关于数学实验. 教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革”课题组在20世纪90年代提出了设想,并在1998年10月教育部“数学教育研讨班”(香山会议)上正式公布了方案,把数学实验作为理科非数学专业高等数学课程的一部分. 我们以为,文科学生选学一点适当的数学实验,通过亲自动手,可以提高他们对数学的兴趣,有助于培养数学素质. 另一方面,通过数学实验,了解Mathematica软件的基本功能与使用方法,有助于掌握《文科数学基础网络课程》中的有关操作. 因此我们把数学实验作为本书的最后一章.

3. 关于层次. 教材内容(包括习题)一般分两个层次,凡是带*的内容与习题应当作为提高与选学的,当然要根据实际情况来掌握.

4. 关于习题. 本书前四章每一节后都配有较多数量的习题,教师可根据实际情况选用. 对于学生来说,学数学不做习题是不行的,但也要根据自己的实际进行练习. 我们建议读者在有条件时做适当数量的习题,对于微积分的计算题来说,可利用《文科数学基础网络课程》中的“智能练习”,按照Mathematica软件的输入规则录入自己做的练习,系统就会作出判断,指出有没有错误,错在哪里.

5. 关于课时建议. 第一、二、三、四各章分别用18、50、60、8学时,第五章选学.

本书由陈吉象主编,第一、三章分别由郑弃冰、戴瑛编写,陈吉象编写了第二、四章,第五章数学实验由陈吉象和吴忠华共同编写. 南开大学数学科学学院的领导,以及吴越恩、温媛、高敏芬、陈学民等老师为本书的完成都做出了贡献,作者在此表示衷心的感谢! 最后还要感谢高等教育出版社的徐刚、李艳馥等老师的支持和帮助!

编者

2003年1月

目　　录

1 线性代数

本章要求了解线性代数的一些基础知识，了解矩阵的基本概念和简单运算，运用初等变换求矩阵的秩，会计算行列式的值，并能解一般的线性方程组.

1.1 矩阵及其初等变换

教 学 要 求

本节要求读者从线性方程组的求解导出矩阵、初等变换和秩的定义. 要求掌握矩阵的基本概念，熟练运用初等变换将矩阵化成阶梯形，从而掌握求矩阵的秩的方法，并能求出一般线性方程组的解.

1. 熟悉矩阵、初等变换和秩的定义.
2. 熟练运用初等变换将矩阵化成阶梯形，掌握求矩阵的秩.
3. 能求出一般线性方程组的解.

知 识 点

1. n 元线性方程组.
2. 矩阵的定义和应用.
3. 初等变换和矩阵的秩.

1.1.1 n 元线性方程组

1. n 元线性方程组

在自然科学与社会经济领域中，常常会碰到线性方程组的问题，它的解决方法构成了现代数学最基础也是结果最完整的一套理论：线性代数. 所谓线性，是指方程组中包含的变量(未知数)都是一次的.

定义 我们将以下包含 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 m 个线性方程的方程

组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n **元线性方程组**. 若 $b_1=0, b_2=0, \cdots, b_m=0$,则称方程组为**齐次(线性)方程组**. 满足方程组的数组 $x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_n=c_n$ 称为方程组的**(特)解**. 若方程组有不止一个解,则称所有解的共同的表达式为**通解**. 若两个方程组有相同的非空解集合,则称两个方程组为**同解方程组**.

2. 阶梯形方程组

对于一般的线性方程组,我们很难直接断定是否有解,但有些特殊类型的方程组我们则很容易求出其解. 例如以下的上三角形方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_{ii}\neq 0, i=1,\cdots,n$. 我们很容易从第 n 个方程中解出 x_n,再将解出的 x_n 代入第 $n-1$ 个方程后就可解出 x_{n-1},如此反复即可解出每一个 x_i.

定义 上三角形方程组或将上三角形方程组去掉若干个方程后所得到的方程组,称为**阶梯形方程组**. 通过以下的具体例子来说明阶梯形方程组是怎样求通解的.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ \qquad\qquad\qquad a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{35}x_5 = b_3. \end{cases}$$

该方程组是将五元上三角形方程组去掉第二和第四个方程后得到的,于是令 $x_2=c_1$ 和 $x_4=c_2$,其中 c_1, c_2 为任意的常数,再将所有的任意常数都移到方程的右端,又得到一个三元上三角形的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{15}x_5 = b_1 - a_{12}c_1 - a_{14}c_2, \\ \qquad\quad a_{23}x_3 + a_{25}x_5 = b_2 - a_{24}c_2, \\ \qquad\qquad\qquad a_{35}x_5 = b_3. \end{cases}$$

于是上面阶梯形方程组所有的解(带有两个任意常数 c_1, c_2 的通解),就可通过上三角形的方程组的解法解出来了.

需要事先指出的是所有的线性方程组最终都可以化为同解的阶梯形方程组,这个过程也可以用下面要定义的矩阵及其变换来实现.

1.1.2 矩阵的定义和应用

1. 矩阵的定义

当我们处理大量数据的时候,就需要矩阵的概念了. 所谓矩阵,就是一个数表,但是这个数表已除去了数据的来源和意义,只有一个由数字构成的矩形的方阵. 比如,下面是一个单位人员构成的图表:

	主任	副主任	工程师	工人	临时工
厂办	1	2	1	3	无
第一车间	1	1	5	52	2
第二车间	1	2	9	150	3
第三车间	1	1	4	19	无

把上面表中的文字说明部分去掉,并把缺省的项目填成数字 0,就得到了一个只有数字的数表

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 52 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 150 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 19 & 0 \end{bmatrix},$$

这种数表就称为矩阵.

定义 我们将形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的矩形数表,称为 $m \times n$ 阶**矩阵**,其中 m 与 n 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数,矩阵中的第 i 行与第 j 列($1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$)处的 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**第 i 行第 j 列元素**, a_{ij} 的第一个下标 i 是行的序号,第二个下标 j 是列的序号. 当 $m = n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 特别称为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**. 当 $m = n = 1$ 时,矩阵就是一个数,不再加括号表示.

注意,在数学理论当中,一个矩阵中的 $m \times n$ 个元素可以是数(整数,实数或复数),也可以是其他研究对象(例如函数、文字、甚至更小的矩阵等等),本课程只讲元素是实数的矩阵.

由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行构成的 $1 \times n$ 阶矩阵

$$R_i\boldsymbol{A} = [\, a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in} \,]$$

(注意元素间只需留出空隙,并不用逗号分开)称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个**行(向量)**.

同理，$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列（向量）是 $m\times 1$ 阶矩阵

$$C_j\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}.$$

这样，$\boldsymbol{A}$ 又可表示成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}R_1\boldsymbol{A}\\R_2\boldsymbol{A}\\\vdots\\R_m\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=[\,C_1\boldsymbol{A}\ C_2\boldsymbol{A}\ \cdots\ C_n\boldsymbol{A}\,].$$

一般用大写的黑体拉丁字母表示矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等，有时矩阵也可以简写成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$.

两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$ 称为**相等**的，如果 $a_{ij}=b_{ij}$ $(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 注意，行数或列数不等的矩阵绝不能相等.

例 1.1.1

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 的 mn 个元素均为 0，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{mn}$，常简记作 $\boldsymbol{O}$，而不标明下标 mn.

如果把 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 的第 i 行改为第 i 列，第 j 列改为第 j 行，就可得到一个新的 $n\times m$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置（矩阵）**，具体表示如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

显然，n 阶方阵的转置仍是 n 阶方阵，而且对任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

2. 系数矩阵和增广矩阵

矩阵理论的应用，最常见也是最重要的就是解线性方程组. 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

由方程组左端 mn 个系数(缺省的算 0)相互位置不变所得到的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**,方程组右端的 m 个已知参数组成 $m\times 1$ 阶矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 合在一起共同构成的 $m\times(n+1)$阶矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的**增广矩阵**.

显然,上述方程组与相应的矩阵(列数大于 1)之间有一一对应. 因而,我们可以将方程组的问题转化为矩阵的问题.

例 1.1.2 三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8, \\ \qquad 5x_2+2x_3=-4, \\ -2x_1 \qquad -3x_3=2 \end{cases}$$

的系数矩阵与增广矩阵分别是

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.1.3 初等变换和矩阵的秩

1. 初等变换

我们知道方程组与列数超过 1 的矩阵之间通过增广矩阵有一一对应,当用消元法解线性方程组时,同解的方程组之间对应的增广矩阵又有什么样的变化呢? 还是先回到具体的例子中来. 三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8, & ① \\ \qquad 5x_2+2x_3=-4, & ② \\ -2x_1 \qquad -3x_3=2 & ③ \end{cases}$$

的增广矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

该方程组的消元解法如下：

先用③式加上①式的 2 倍，即可消去③式中的未知数 x_1，得到一个同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, & ① \\ \quad 5x_2 + 2x_3 = -4, & ② \\ \quad 4x_2 - 9x_3 = 18, & ④ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -9 & 18 \end{bmatrix}.$$

再用④式减去②式的$\frac{4}{5}$倍，又得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, & ① \\ \quad 5x_2 + 2x_3 = -4, & ② \\ \quad -\frac{53}{5}x_3 = \frac{106}{5}, & ⑤ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{53}{5} & \frac{106}{5} \end{bmatrix}.$$

再在方程⑤的两边乘以$-\frac{5}{53}$，又得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, & ① \\ \quad 5x_2 + 2x_3 = -4, & ② \\ \quad x_3 = -2, & ⑤ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

然后再将 $x_3 = -2$ 代入②式可得 $x_2 = 0$，最后将 $x_2 = 0, x_3 = -2$ 代入①式即得方程组解 $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -2$.

以上增广矩阵的变化就是矩阵的初等行变换. 除去这些行变换外，还有一种很有用的行变换是交换矩阵的两行，相当于交换两个方程的次序. 综合以上三种变换，我们有以下定义.

定义 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行的下列三种变换称为 $\boldsymbol{A}$ 的**初等行变换**：

(1) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行，记作 $R_i \leftrightarrow R_j$；

(2) 用一个非零实数 c 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，即用该数乘以该行的每个元素，所得各数按原来次序作为同一行的元素，记作 $R_i \cdot c$；

(3) 用一实数 c 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行(如(2)中所述)后，再加到 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上，记作 $R_i + R_j \cdot c$(称为第 i 行加上第 j 行的 c 倍)，当 $c<0$ 时，也记作 $R_i - R_j \cdot (-c)$.

当上述三种变换中的行改为列时，我们称为 $\boldsymbol{A}$ 的三种**初等列变换**. 六种变换统称为**初等变换**.

例 1.1.3 令 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} x+y+z+2w+3 & 2x-2y+2z-w \\ 3x-4z+1 & -x+y-z-3 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} x+2z+w & x-z+3w+4 \\ 2x-3y-4z+3w+2 & -x+8y-4z-2w-6 \end{bmatrix},$$

求 x, y, z, w，使得 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$.

解 根据矩阵相等的定义，x, y, z 与 w 必须满足

$$\begin{cases} x+y+z+2w+3 = x+2z+w, \\ 2x-2y+2z-w = x-z+3w+4, \\ 3x-4z+1 = 2x-3y-4z+3w+2, \\ -x+y-z-3 = -x+8y-4z-2w-6. \end{cases}$$

整理得 x, y, z, w 满足的线性方程组

$$\begin{cases} \quad\ \ y - \ z + \ w = -3, \\ x-2y+3z-4w = 4, \\ x+3y \qquad -3w = 1, \\ \quad -7y+3z+2w = -3. \end{cases}$$

现用矩阵的初等行变换来求此方程组的解. 该方程组的增广矩阵是

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

因第一行第一列的元素为 0，因此将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的第一、二两行交换，使得第一行第一列的元素不为 0，这样就可以通过如下的行变换把矩阵化为第一列只有一个非零元(处在第一行，最好取为 1)的矩阵. 然后保持第一行不动，只对矩阵第二行以后的元素做初等行变换. 此时如果第二列处在第二行之后的元素不都为 0，则把由第二行和第二列以后的元素构成的小一阶的矩阵再重复实行上述变换；如果第二列的处在第二行以后的元素全为 0，则直接从第三列的处在第二行之后的元素进行同样的处理. 反复进行这个过程，我们就可以通过初等行变换将一个矩阵化为上三角形方程组的增广矩阵，然后就很容易把方程组的解求出来.

$$\overline{A}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-3&1\\0&-7&3&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&1&-3\\0&-7&3&2&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+R_2\cdot 7]{R_3-R_2\cdot 5}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&-4&9&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\cdot\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&-4&9&-24\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3\cdot 4}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+R_4\cdot 2]{\substack{R_1+R_4\cdot 4\\R_2-R_4}}\begin{bmatrix}1&-2&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3\cdot 3}\begin{bmatrix}1&-2&0&0&-14\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\cdot 2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

由此解得 $x=8,y=-3,z=-6,w=0$.

2. 阶梯形矩阵

我们知道阶梯形(包括上三角形)方程组的通解很容易求,那么阶梯形方程组的增广矩阵又有什么特征呢?

定义 矩阵中每一行第一个非零元素(称为该行的非零首元)必在上一行非零首元的右下方,称这样的矩阵为**阶梯形矩阵**.

很显然,阶梯形方程组的增广矩阵都为阶梯形矩阵,但是阶梯形矩阵可能对应一个没有解的方程组. 比如矩阵$[0\quad 1]$就对应一个矛盾的方程.

例 1.1.4 设

$$(1)\begin{bmatrix}0&2&-1&5\\0&0&3&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad (2)\begin{bmatrix}0&2&-1&5\\0&0&3&-3\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

$$(3)\begin{bmatrix}1&0&3&0&5\\0&2&0&0&4\\0&0&-2&2&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix},\qquad (4)\begin{bmatrix}1&0&3&0&5\\0&2&0&0&4\\0&0&-2&2&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix},$$

其中(1),(2),(4)是阶梯形矩阵;而(3)不是,因为其第 5 行非零首元 3 不在上一行非零首元 -1 的右下方,而是在 -1 的正下方.

定理 1.1.1 任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可经有限次初等行变换化为阶梯形,虽然化成

的阶梯形矩阵不惟一,但所有化成的阶梯形矩阵都具有相同个数的非零行(即该行至少有一个元素不为零),称这个数为矩阵 A 的秩,记作 $r(A)$.

略去此定理的一般证明,用一个具体实例来说明定理的结论.

例 1.1.5 将下列矩阵化为阶梯形:

$$A=\begin{bmatrix}0&3&2&-1&5\\1&-1&0&0&3\\2&7&3&0&6\\0&-2&5&1&0\end{bmatrix}.$$

解

$$A\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&3&2&-1&5\\2&7&3&0&6\\0&-2&5&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\cdot 2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&3&2&-1&5\\0&9&3&0&0\\0&-2&5&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_4}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&9&3&0&0\\0&-2&5&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4+R_2\cdot 2]{R_3-R_2\cdot 9}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&-60&0&-45\\0&0&19&1&10\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\cdot\left(-\frac{1}{60}\right)}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&1&0&\frac{3}{4}\\0&0&19&1&10\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4-R_3\cdot 19}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&1&0&\frac{3}{4}\\0&0&0&1&-\frac{17}{4}\end{bmatrix}=B\ .$$

最后的矩阵 B 是阶梯形了.

如果对上述 B 再施行两个行变换:$R_2-R_3\cdot 7$ 及 R_1+R_2,即得更简单的阶梯形矩阵 $C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{11}{4}\\0&1&0&0&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{3}{4}\\0&0&0&1&-\frac{17}{4}\end{bmatrix}$,再进一步,对 C 施行四个初等列变换:$C_5-C_1\cdot\frac{11}{4}$,即将第一列的 $-\frac{11}{4}$ 倍加到第五列上,及 $C_5+C_2\cdot\frac{1}{4}$,$C_5-C_3\cdot\frac{3}{4}$,$C_5+C_4\cdot\frac{17}{4}$,又可将 C 化成所谓标准形矩阵,即

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

3. 标准形矩阵的定义

定义 如果 $m\times n$ 阶矩阵 $(a_{ij})_{mn}$ 满足 $a_{ii}=1,i=1,\cdots,r$（其中 r 不大于 m 和 n），除此以外所有元素均为 0，则称该矩阵为**标准形矩阵**. 标准形矩阵的秩显然等于其非零元的个数.

从以上的例子中不难看出，每个矩阵都可经有限次初等变换化为标准形. 可以证明的是标准形的得到与施行怎样的初等变换（不管是行变换还是列变换）无关，即所有矩阵的标准形都与原矩阵具有相同的秩.

例 1.1.6 把矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{bmatrix}$ 化为阶梯形，并求 A 的秩及标准形.

解

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&8&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2\cdot 2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

此即 A 的一个阶梯形矩阵，且因其有 2 个非零行（第 1 行与第 2 行），故 $r(A)=2$，且 A 的标准形是

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

需要注意的是，矩阵 A 化成的阶梯形不是惟一的，而标准形是惟一的，标准形就是一个特殊的阶梯形.

习 题 1.1

1.1.1 判断下列矩阵是否为阶梯形矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&2&-5\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\3&0&0\\-2&2&-4\end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix}2&-5&0\\0&-3&1\\0&0&4\end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$； (5) $\begin{bmatrix}1&6&0&3\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$； (6) $\begin{bmatrix}1&7&1&2\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.