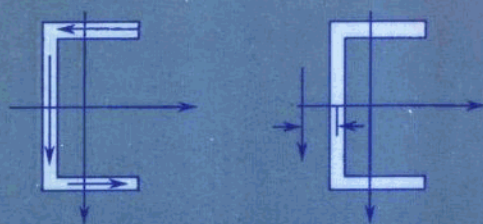
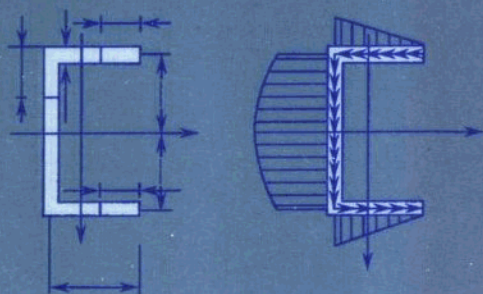


材料力学

(专题部分)

主 编 李 波 王铁良
副主编 高 宇 崔赞珠



NEUPRESS
东北大学出版社

材 料 力 学

(专题部分)

主 编 李 波 王铁良

副主编 高 宇 崔赞珠

东 北 大 学 出 版 社

• 沈 阳 •

© 李 波 王铁良 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

材料力学 (专题部分) / 李波, 王铁良主编. — 沈阳: 东北大学出版社, 2003.4
ISBN 7-81054-884-0

I. 材… II. ①李… ②王… III. 材料力学—高等学校—教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 025288 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳农业大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 184mm × 260mm

印 张: 7.75

字 数: 193 千字

出版时间: 2003 年 4 月第 1 版

印刷时间: 2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑: 秦振华 张德喜

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 18.00 元

前 言

本书内容是对多年来的教学实践经验的总结和提炼。

把材料力学课程分成两部分：材料力学和材料力学专题部分，是课程体系的一种改革。自 1996 年，经过多年的教学实践，在全体课程组的共同努力下，使该课程体系得到进一步的完善和发展。材料力学专题部分在内容上是对材料力学基本知识的扩展和加深，具有提高和选读的性质。有的内容是结合专业发展、学生毕业后的工作需求，并根据教师在工程实践中经验体会选用的。例如，弹性地基梁。本书偏重于实用性和技术性，培养学生分析和计算能力，以及解决工程实际问题的能力。

全书讲授约需 40 学时，可作为高等院校对材料力学要求较高的水利、土建和机械等类专业使用的补充教材。

本书有以下人员参与了编写：李波、王铁良、高宇、崔赞珠、董科、申广岩、孙任军、孙殿晖、苏东屏、李寿清、李学森。全书由李波、王铁良主编。姚力同志承担了全书插图的编制工作。

编者感谢沈阳农业大学教材科、沈阳农业大学水利学院及力学教研室对本书出版的支持和帮助，感谢大连理工大学材料力学教研室的帮助和指导。编写过程中，参考了大量的相关资料，将主要的参考文献已附在书后，在此向有关作者表示诚挚的感谢。由于编者水平所限，疏漏之处在所难免，深望读者给予批评指正。

编 者

2002 年 11 月

目 录

第 1 章 弯曲问题的进一步研究	1
1.1 直梁的非对称弯曲	1
1.2 开口薄壁杆件的弯曲剪应力、弯曲中心	7
1.3 挠曲线微分方程的积分	14
1.4 梁的纵横弯曲	14
习 题	18
第 2 章 能量法	21
2.1 功能原理	21
2.2 杆件的变形能	21
2.3 卡氏定理	26
2.4 虚功原理	31
2.5 单位载荷法、莫尔积分和图乘法	32
习 题	36
第 3 章 平面曲杆	39
3.1 平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力	39
3.2 中性层曲率半径的确定	43
3.3 平面曲杆在横向外力作用时的强度计算	50
3.4 平面曲杆的变形计算	51
习 题	54
第 4 章 压杆稳定问题的进一步研究	56
4.1 截面呈阶梯形变化的压杆	56
4.2 截面呈连续变化的压杆	58
4.3 压缩变形对等截面压杆临界力的影响	60
4.4 剪切变形对等截面压杆临界力的影响	62
4.5 偏心距 e 对等直压杆临界力的影响	65
4.6 初弯曲对等截面压杆挠度的影响	66
4.7 用能量法求解细长压杆的临界力	68
习 题	71

第 5 章 弹性基础梁	72
5.1 概 述	72
5.2 无限长梁	73
5.3 半无限长梁	77
5.4 有限长梁——叠加法	79
5.5 有限长梁——克雷洛夫函数法	82
习 题	90
第 6 章 动荷问题	92
6.1 概 述	92
6.2 等加速运动构件的应力和变形	92
6.3 冲击应力和变形	95
6.4 提高构件抗冲击能力的措施	99
6.5 材料的动态力学性能	100
习 题	102
习题答案	104
附 录	107
附表 1 弹性地基梁的函数表	107
附表 2 计算弹性地基上的等截面梁用的克雷洛夫函数表	109
主要参考文献	115

第1章 弯曲问题的进一步研究

1.1 直梁的非对称弯曲

本节将介绍梁不具有纵向对称平面,或者梁虽具有纵向对称平面,但外力的作用平面与该平面间有一夹角,即发生非对称弯曲时,梁横截面上弯曲正应力的确定,进而进行有关的强度计算。

1.1.1 基本概念的回顾

(1) 对称弯曲

发生对称弯曲的条件:①梁具有纵向对称面,或者说梁的横截面至少有一个对称轴;②所有横向荷载作用线都在该纵向对称面内。

变形特点:①挠曲线是纵向对称面内的平面曲线,或者说挠曲线平面与荷载作用面重合;②中性轴与荷载作用面垂直,它是弯曲变形中最基本的一种形式,在初等材料力学中所接触的弯曲变形,大多都是对称弯曲。

(2) 平面弯曲

发生条件:①梁横截面形状可以是任意的,即梁有两个纵向对称面、一个纵向对称面或没有纵向对称面,都可能发生平面弯曲;②梁上横向荷载作用在与某一形心主惯性轴平面平行且通过截面弯曲中心的纵向平面内。

变形特点:①挠曲线是一条平面曲线,其所在面与荷载作用面平行或重合;②中性轴与荷载作用面垂直。

可见,对称弯曲是平面弯曲的一种特殊情况。实际上,在初等材料力学中所研究的弯曲大多都是对称截面梁当外力作用在其纵向对称面内而发生平面弯曲时的情况。

(3) 对称弯曲梁横截面上的正应力

凡具有纵向对称平面,且外力(或其合力)作用在该纵向对称面内的细长梁,即发生对称弯曲时,其横截面上的弯曲正应力都可按下面的公式计算

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

式中 M ——横截面上的弯矩;

I_z ——横截面对中性轴 z 的惯性矩;

y ——横截面上所求应力的点到中性轴的距离。

若杆件并无纵向对称面,只要荷载通过横截面的弯曲中心,且作用面平行于形心主惯性轴平面,即发生平面弯曲时,亦可通过上式计算横截面上的正应力。

(4) 非对称弯曲

横截面形状任意的梁,其上的荷载作用面与形心主惯性轴平面不平行或者有一夹角,但荷载通过截面的弯曲中心,此时梁所产生的弯曲就是非对称弯曲。组合变形中的斜弯曲变形形

式就是一种非对称弯曲。用来确定斜弯曲梁横截面上正应力的公式,可以用于非对称弯曲梁,但在应用时需要知道或算出截面的形心主惯性轴。

变形特点:中性轴与荷载平面不垂直;挠曲线所在平面与荷载作用面不垂直。

下面将在更普遍的范围讨论非对称纯弯曲直梁的弯曲正应力。

1.1.2 非对称纯弯曲梁的正应力

(1) 广义弯曲正应力公式的推导

横截面为任意形状的直梁发生纯弯曲,设梁上载荷通过截面的弯曲中心,故直梁无扭转变形;或者,载荷对弯曲中心的力矩很小,且梁的抗扭刚度很大,扭转变形可以不计。在梁的任一横截面上只有弯矩 M ,用矢量表示如图 1-1 所示。图中, c 是截面的形心, x 轴为梁的轴线, y, z 轴为横截面上任意一对相互垂直的形心轴, M_y 和 M_z 为弯矩 M 在 y, z 轴上的分量,均用矢量表示。

实验表明,对于非对称纯弯曲梁,平面假设依然成立,且同样可以认为横截面上各点处均为单轴应力状态。设横截面的中性轴为 $n-n$,但其位置尚未确定,如图 1-2 所示。则当材料在线弹性范围内工作,且材料的拉伸与压缩弹性模量相同时,在距中性轴 $n-n$ 为 η 的任一点处的正应力为

$$\sigma = E \cdot \frac{\eta}{\rho} \quad (1-1)$$

式中 E ——材料的弹性模量;

ρ ——梁变形后中性层的曲率半径。

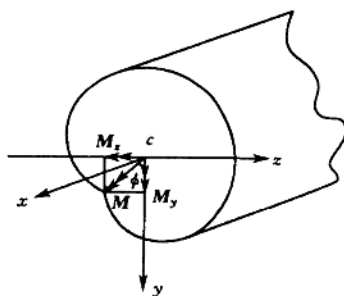


图 1-1

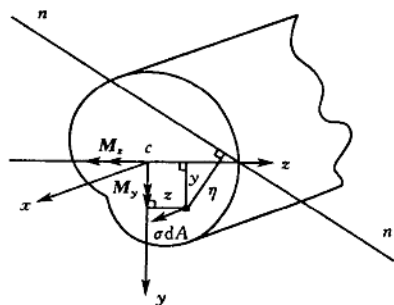


图 1-2

式(1-1)表明,非对称纯弯曲梁横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的距离成正比。可见,确定中性轴的位置是一个很重要的问题。

纯弯曲梁横截面上只有正应力,且法向内力素 σdA 构成一空间平行力系。根据力的合成原理,该力系只可能合成 3 个内力分量。由静力学关系,可得以下关系式

$$\int_A \sigma dA = N = 0 \quad (1-2)$$

$$\int_A z \sigma dA = M_y \quad (1-3)$$

$$\int_A y \sigma dA = M_z \quad (1-4)$$

将式(1-1)代入式(1-2),得

$$N = \frac{E}{\rho} \int_A \eta dA = 0$$

显然,上式中 E/ρ 不可能为零,因而必有

$$\int_A \eta dA = 0$$

则可知,在非对称纯弯曲时,中性轴 $n-n$ 通过横截面的形心,如图 1-3 所示。设中性轴 $n-n$ 与 y 轴正向夹角为 θ ,并规定自 y 轴正向逆时针量取为正。则由图 1-2 所示的几何关系可得

$$\eta = y \sin \theta - z \cos \theta$$

将上述关系式代入式(1-1),得

$$\sigma = \frac{E}{\rho} (y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (1-5)$$

将式(1-5)代入(1-3), (1-4)两式,并根据有关截面几何参数的定义,可得

$$\frac{E}{\rho} (I_{yz} \sin \theta - I_y \cos \theta) = M_y$$

$$\frac{E}{\rho} (I_z \sin \theta - I_{yz} \cos \theta) = M_z$$

联解以上两式,得

$$\frac{E}{\rho} \cos \theta = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\frac{E}{\rho} \sin \theta = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

将以上两式代入式(1-5),经整理后,即得非对称纯弯曲梁横截面上任一点处正应力的确定公式

$$\sigma = \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz}) \cdot y + (M_y I_z - M_z I_{yz}) \cdot z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (1-6)$$

式中 M_y, M_z ——弯矩矢量 M 在 y 轴和 z 轴上的分量,规定引起坐标轴正向一侧产生拉应力的弯矩为正;

I_y, I_z, I_{yz} ——横截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩及对 y, z 轴的惯性积;

y, z ——横截面上任一点在坐标系下的坐标。

式(1-6)也称为广义弯曲正应力公式。

(2) 公式的适用范围

梁在线弹性变形范围内和小变形条件下工作,梁的工作应力不能超过材料的比例极限。

式(1-6)是在直梁发生非对称纯弯曲的情况下推导而来的,但在工程实际中,对于跨长与截面高度之比较大的细长梁,也可用来计算非对称截面、横力弯曲梁横截面上的正应力。

(3) 广义弯曲正应力公式的讨论

广义弯曲正应力公式,具有一定的普遍性。对于梁,不论是否具有纵向对称平面,或外力是否作用在纵向对称平面内,只要外力作用线通过截面的弯曲中心,式(1-6)都是适用的。也

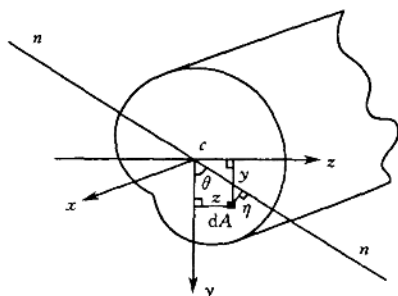


图 1-3

就是说,广义弯曲正应力公式包含了对称弯曲、平面弯曲及斜弯曲情况下的正应力计算公式。现分别讨论如下。

① 梁具有纵向对称平面,且外力作用在该纵向对称平面内,即梁发生对称弯曲的情况。这种情况下, $M_y = 0$, $M_z = M$, $I_{yz} = 0$, 代入广义弯曲正应力公式,得

$$\sigma = \frac{M_y}{I_z}$$

② 梁不具有纵向对称平面,但外力作用在(或平行于)梁的形心主惯性平面内,且通过截面的弯曲中心。即梁发生平面弯曲的情况,如图 1-4 所示的“Z”字形截面梁,图中 y, z 轴为横截面的形心主惯性轴,外力作用在该梁的形心主惯性平面内。此时, $M_y = 0$, $M_z = M$, $I_{yz} = 0$, 代入广义弯曲正应力公式,得

$$\sigma = \frac{M_y}{I_z}$$

可见,对称弯曲时的正应力公式同样适用于平面弯曲的情况。

③ 梁具有纵向对称平面,但外力的作用平面与纵向对称平面间有一夹角,且通过截面的弯曲中心。即梁发生组合变形中斜弯曲的情况。如图 1-5 所示的矩形截面梁,弯矩的矢量 M 与 y 轴的夹角为 ϕ , 则 $M_y = M \cos \phi$, $M_z = M \sin \phi$, $I_{yz} = 0$, 将各量代入广义弯曲正应力公式,得

$$\sigma = \frac{M \cos \phi}{I_y} z + \frac{M \sin \phi}{I_z} y$$

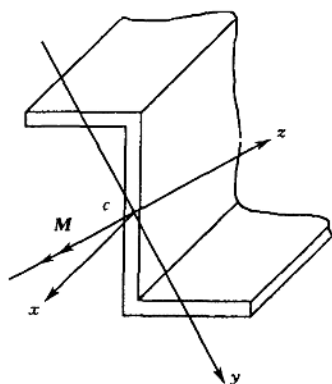


图 1-4

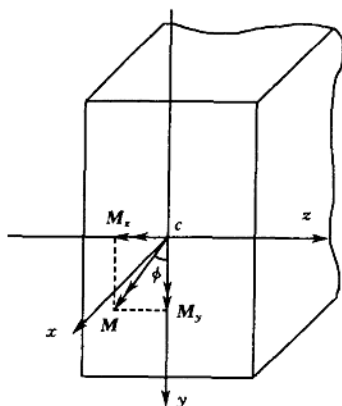


图 1-5

综上所述,广义弯曲正应力公式具有一般性,而对称弯曲、平面弯曲、斜弯曲则反映该问题的特殊性,揭示了哲学中的一般和特殊的辩证关系。

(4) 中性轴

根据中性轴的定义,令广义弯曲正应力式(1-6)等于零,并以 y_0, z_0 表示中性轴上各点的坐标,一并代入式(1-6),经整理得

$$\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot y_0 + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot z_0 = 0 \quad (1-7)$$

式(1-7)称为中性轴方程。可见,梁发生非对称弯曲时,其横截面上的中性轴是一条直线。这里,中性轴与 y 轴正向夹角为 θ ,并规定 θ 自 y 轴正向逆时针量取为正。则中性轴在 yz 坐标

系下的斜率可表示为

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{M_y I_z - M_z I_{yz}} \quad (1-8)$$

根据式(1-8)即可确定中性轴的位置。

在确定中性轴位置后,由于横截面上各点处的正应力与该点至中性轴的距离成正比,因此,横截面上的最大拉应力和最大压应力将发生在距中性轴最远的点处。对于具有棱角的横截面,其最大拉应力、最大压应力必发生在距中性轴最远的截面棱角处,如图 1-6(a)中的 D_1 和 D_2 点处。对于周边为光滑曲线的横截面,可平行于中性轴作两直线分别与横截面周边相切于 D_1 和 D_2 两点,如图 1-6(b)所示。该两点即为横截面上的最大拉应力、最大压应力点。将这两点的坐标 (y, z) 分别代入广义弯曲正应力公式,就可求得横截面上的最大拉应力和最大压应力。

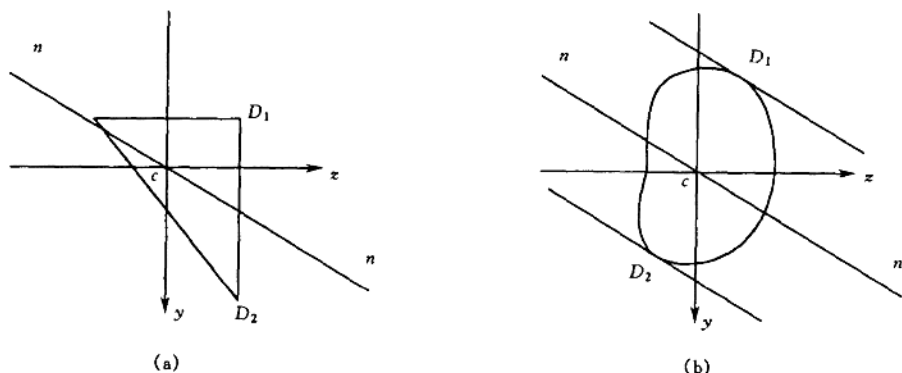


图 1-6

在确定了梁危险截面上的最大拉应力和最大压应力后,由于这两点处于单轴应力状态,因此可根据最大拉、压应力分别不得超过材料许用拉、压应力的强度条件,进行非对称弯曲梁的强度计算。

下面通过例题说明广义弯曲正应力公式的应用。

【例 1-1】 两端铰支的角钢如图 1-7(a)所示。在角钢横截面上,两翼缘的中线交点即为弯曲中心。横向力 P 通过弯曲中心,且与 y 轴的夹角为 $\frac{\pi}{18}$ 。若 $P = 4\text{kN}$,试求最大拉应力和最大压应力。

解: ① 按照荷载便于分解和截面几何参数容易确定的原则建立坐标系。取平行于角钢底边和竖边的形心轴为 z 轴和 y 轴,建立坐标系如图 1-7(b)所示,它们都不是形心主惯性轴。

② 确定截面的几何性质。截面面积 A ,形心坐标 y_c 和 z_c ,惯性矩 I_y , I_z 和惯性积 I_{yz} 分别为:

$$A = 1950 \text{ mm}^2, \quad y_c = 41.86 \text{ mm}, \quad z_c = 19.36 \text{ mm}$$

$$I_y = 1.014 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_z = 3.117 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_{yz} = -1.032 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

③ 确定危险截面上的内力。集中力 P 作用的截面 C 是危险截面,其上的弯矩 M_z 和 M_y 分别为

$$M_z = \frac{3}{5} \left(P \cos \frac{\pi}{18} \right) \times 2 = \frac{3}{5} \left(4 \times 10^3 \cos \frac{\pi}{18} \right) \times 2 = 4.727 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

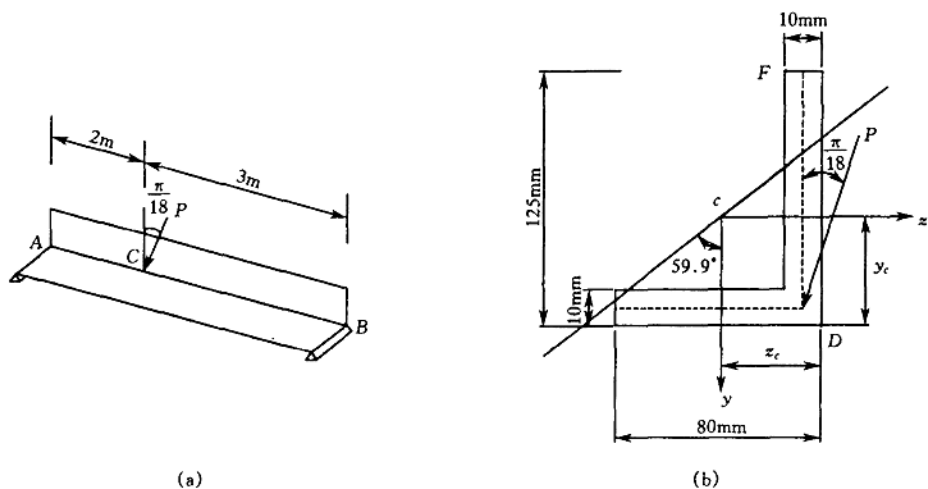


图 1-7

$$M_y = -\frac{3}{5} \left(P \sin \frac{\pi}{18} \right) \times 2 = -\frac{3}{5} \left(4 \times 10^3 \sin \frac{\pi}{18} \right) \times 2 = -0.8335 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

④ 确定中性轴的位置。将以上数据代入中性轴斜率式(1-8),得

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{M_y I_{yz} - M_z I_{zy}}{M_y I_z - M_z I_{yz}} \\ &= \frac{(-0.8335 \times 10^3) \times (-1.032 \times 10^{-6}) - 4.727 \times 10^3 \times 1.014 \times 10^{-6}}{(-0.8335 \times 10^3) \times 3.117 \times 10^{-6} - 4.727 \times 10^3 \times (-1.032 \times 10^{-6})} \\ &= -\frac{3.933}{2.280} = -1.725 \end{aligned}$$

则 $\theta = -59.9^\circ$ 。 θ 为负值表示从 y 轴正向到中性轴转向是顺时针的。

⑤ 确定危险点的在 $y_c z_c$ 坐标系下的坐标。确定中性轴的位置后,可以看出横截面上 D, F 两点离中性轴最远,则两点的应力最大。两点的坐标分别为

$$D: y_D = 41.86 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad z_D = 19.36 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$F: y_F = -83.14 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad z_F = 9.36 \times 10^{-3} \text{ m}$$

将以上各项数据代入广义弯曲正应力式(1-6)中,得

$$\begin{aligned} \sigma_D &= \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz}) \cdot y_D + (M_y I_z - M_z I_{yz}) \cdot z_D}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ &= \frac{4.727 \times 10^3 \times 1.014 \times 10^{-6} - (-0.8335 \times 10^3)(-1.032 \times 10^{-6})}{1.014 \times 10^{-6} \times 3.117 \times 10^{-6} - (-1.032 \times 10^{-6})^2} \times 41.86 \times 10^{-3} + \\ &\quad \frac{(-0.8335 \times 10^3) \times 3.117 \times 10^{-6} - 4.727 \times 10^3(-1.032 \times 10^{-6})}{1.014 \times 10^{-6} \times 3.117 \times 10^{-6} - (-1.032 \times 10^{-6})^2} \times 19.36 \times 10^{-3} \\ &= 99.6 \text{ MPa} \\ \sigma_F &= \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz}) \cdot y_F + (M_y I_z - M_z I_{yz}) \cdot z_F}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ &= \frac{4.727 \times 10^3 \times 1.014 \times 10^{-6} - (-0.8335 \times 10^3)(-1.032 \times 10^{-6})}{1.014 \times 10^{-6} \times 3.117 \times 10^{-6} - (-1.032 \times 10^{-6})^2} \times (-83.14 \times 10^{-3}) \\ &\quad + \frac{(-0.8335 \times 10^3) \times 3.117 \times 10^{-6} - 4.727 \times 10^3(-1.032 \times 10^{-6})}{1.014 \times 10^{-6} \times 3.117 \times 10^{-6} - (-1.032 \times 10^{-6})^2} \times 9.36 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$= -145.8 \text{ MPa}$$

结果为正号的正应力是拉应力,负号的正应力是压应力。如果正应力的点的位置已知,可以不必确定中性轴的位置,即可省略第④步,直接将已知点的坐标代入广义弯曲正应力公式。

1.2 开口薄壁杆件的弯曲剪应力、弯曲中心

1.2.1 问题的提出

① 初等材料力学中梁横截面剪应力公式为

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

式中 Q ——横截面上的剪力;

S_z^* ——距中性轴为 y_1 的横线以外部分的横截面面积对中性轴的静矩,由 $\int_{y_1}^{y_{\max}} y dA$ 确定,是 y_1 的函数;

I_z ——整个截面对中性轴的惯性矩;

b ——在 $y = y_1$ 处的截面宽度。

该公式对于确定不同形状截面上最大剪应力,有一定的正确性和实用性。但在确定剪应力在横截面上的分布规律时,在一些情况下是不正确的。因为在分析应力时,必须考虑梁自由表面这个条件,否则会与剪应力互等定律矛盾。如“工”字型截面梁翼缘上的剪应力分布及圆截面梁横截面上的剪应力分布,均有不合理之处。

② 前面的研究指出,当杆件有纵向对称面且载荷作用于该对称面内,杆件只发生平面弯曲。但对于非对称截面的杆件,如图 1-8 所示,一端固定的悬臂梁在相同载荷的作用下,仅因载荷作用线的位置不同而产生明显不同的变形。图 1-8(a)所示的梁上横向载荷作用于形心主惯性平面内,梁除了产生弯曲变形外还产生了扭转变形。图 1-8(b)所示的梁上横向载荷作用在平行于形心主惯性平面,而且通过某一特定点的平面内,梁仅产生弯曲变形,这一特定点称为弯曲中心。对于开口薄壁一类的杆件,如上述的槽形截面悬臂梁,抗扭刚度较小,当横向载荷不通过弯曲中心时,将引起比较严重的扭转变形,会引起较大的扭转剪应力,应尽可能避免。因此,确定这类杆件的弯曲中心有较大的实用价值,而弯曲中心的确定是与梁横截面上的剪应力分布和大小密切相关的。

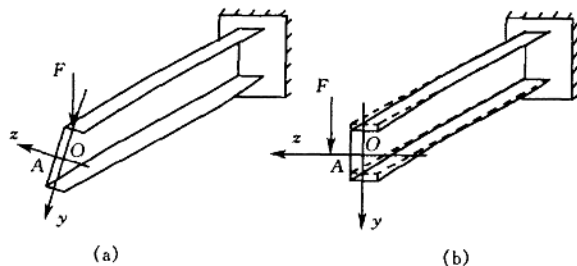


图 1-8

本节主要研究开口薄壁杆件弯曲剪应力的计算和弯曲中心的确定。

1.2.2 剪力流及其确定公式

(1) 剪力流

假定梁截面上各点的剪应力 τ 的方向与薄壁相切, 此剪应力 τ 与壁厚 t 的乘积称为剪力流 f , 即

$$f = \tau \cdot t \quad (1-9)$$

为描述剪力流, 引入任意坐标 s , 如图 1-9 所示。图中 k 是基点, 一般取薄壁的端点作为基点。并规定剪力流 f 的指向与 s 的增加方向一致时为正, 反之为负。可知, 剪力流 f 是任意坐标 s 的函数。

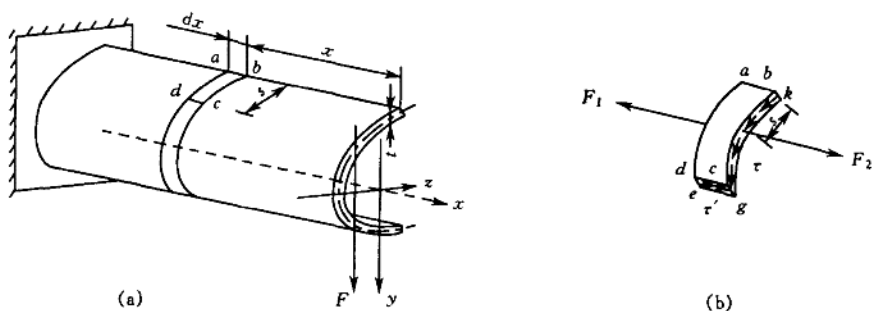


图 1-9

(2) 剪力流的确定公式

① 公式的推导。在梁发生非对称弯曲、正应力已知的前提下, 由梁的局部平衡条件导出剪力流计算公式。

图 1-9(a) 为一开口薄壁杆件, 自由端作用载荷 F , y 和 z 为横截面的形心主惯性轴。设载荷 F 平行于 y 轴, 且通过弯曲中心, 因此杆件只发生弯曲变形, 无扭转变形。横截面上的正应力仍可按式(1-6)计算。因壁厚 t 远小于横截面的其他尺寸, 故假设剪应力 τ 沿壁厚 t 大小无变化即沿壁厚均匀分布。又因杆件内侧和外侧表面均为自由表面, 且未作用有任何与表面相切的载荷, 所以横截面上的剪应力 τ 与截面的周边相切。图 1-9(b) 表示从开口薄壁截面梁中取出的长为 dx 的微段。再以垂直于截面中线的纵向平面 $dceg$ 从微段中截出一部分, 并把截出部分的横截面面积记为 $\bar{A}$ 。设截出部分的左侧面 $\bar{A}$ 上, 垂直于截面的内力是 F_1 , 截面上的弯矩为 M_y, M_z , 截面上的正应力为 $\sigma^{(1)}$; 右侧面 $\bar{A}$ 上垂直于截面的内力是 F_2 , 截面上的弯矩为 $M_y + dM_y, M_z + dM_z$, 截面上的正应力为 $\sigma^{(2)}$ 。则有下列各式:

对微段沿 x 轴的方向列平衡方程, 得

$$F_2 + \tau \cdot t \cdot dx - F_1 = 0 \quad (1-10)$$

由式(1-10)得

$$f = \tau \cdot t = \frac{-(F_2 - F_1)}{dx} \quad (1-11)$$

其中

$$F_1 = \int_{\bar{A}} \sigma^{(1)} dA$$

将广义弯曲正应力式(1-6)代入上式, 得

$$F_1 = \int_A \left[\frac{(M_z I_y - M_y I_{yz}) \cdot y + (M_y I_z - M_z I_{yz}) \cdot z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \right] dA$$

同理

$$F_2 = \int_A \sigma^{(2)} dA$$

将广义弯曲正应力式(1-6)代入上式,得

$$F_2 = \int_A \left\{ \frac{[(M_z + dM_z)I_y - (M_y + dM_y)I_{yz}] \cdot y + [(M_y + dM_y)I_z - (M_z + dM_z)I_{yz}] \cdot z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \right\} \cdot dA$$

使 F_2 减去 F_1 , 并整理得

$$F_2 - F_1 = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_A [(I_{yz} y - I_{yz} z) dM_z + (I_z z - I_{yz} y) dM_y] dA \quad (1-12)$$

又因为 $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$, $Q_z = \frac{dM_y}{dx}$, 并引入记号

$$\bar{S}_z = \int_A y dA, \quad \bar{S}_y = \int_A z dA$$

将式(1-12)及各关系和记号代入式(1-11), 整理得非对称弯曲、开口薄壁截面梁横截面上的剪力流确定公式为

$$f = \frac{Q_y (I_{yz} \bar{S}_y - I_y \bar{S}_z) + Q_z (I_{yz} \bar{S}_z - I_z \bar{S}_y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (1-13)$$

式中 f ——横截面上的剪力流;

Q_y, Q_z ——横截面上的剪力, 规定右侧截面上的剪力指向与坐标轴正向一致为正, 反之为负;

I_y, I_z, I_{yz} ——整个横截面对 y 轴、 z 轴的惯性矩和对 y, z 轴的惯性积;

$\bar{S}_y, \bar{S}_z$ ——部分截面对 y, z 轴的静矩, 是任意坐标 s 的函数。

利用式(1-13)计算时, 若计算结果为正, 则 f 的指向与 s 增加方向一致, 即指向截出面积的外部; 若计算结果为负, 则 f 的指向与 s 增加方向相反, 即指向截出面积的内部。当截面宽度 t 较大时, 式(1-13)只能求得沿宽度 t 剪应力的平均值。只有当 t 很小时, 求得的 τ 与沿截面宽度的真实剪应力才能较为一致。

式(1-13)可以确定开口薄壁截面梁发生非对称弯曲时横截面上的剪应力分布规律, 进而可以确定部分截面上及整个截面的剪力。

② 剪力流公式的讨论。当 y, z 轴是形心主惯性轴, 即 $I_{yz} = 0$ 时, 则式(1-13)可简化为

$$f = -\frac{Q_y \bar{S}_z}{I_z} - \frac{Q_z \bar{S}_y}{I_y} \quad (1-14)$$

所以

$$\tau = -\frac{Q_y \bar{S}_z}{I_z t} - \frac{Q_z \bar{S}_y}{I_y t} \quad (1-15)$$

当 y, z 轴是形心主惯性轴, 即 $I_{yz} = 0$, 且无水平方向的横向外力, 即 $Q_z = 0$ 时, 则式(1-13)可简化为

$$f = -\frac{Q_y \bar{S}_z}{I_z} \quad (1-16)$$

所以

$$\tau = -\frac{Q_y \bar{S}_z}{I_z t}, \quad (1-17)$$

式(1-17)即为材料力学中推导出的弯曲剪应力公式。负号是因为两推导过程中,剪应力的正负号规定不同。

从上面的讨论可知,在实际应用中可先根据截面的几何特征和载荷的作用特征,将公式进行相应简化,以便于计算。

【例 1-2】 如图 1-10(a)所示薄壁槽形截面梁,其壁厚 t 为常数。 y, z 轴为形心主惯性轴, b, h 和 I_z 为已知。假设剪力 Q_y 通过剪切中心,且 $Q_y > 0, Q_z = 0$ 。试确定:① 槽形截面上的剪应力分布规律;② 槽形截面的上、下翼缘和腹板上的切向内力系合力。

解:① 因为 y, z 轴是截面的形心主惯性轴,所以 $I_{yz} = 0$; 且 $Q_z = 0$ 。则式(1-13)简化为

$$f = -\frac{Q_y \bar{S}_z}{I_z} \quad (a)$$

② 确定截面的几何性质。惯性矩 I_z 为已知,故只确定部分截面对 z 轴的静矩 $\bar{S}_z$ 。

根据截面的几何形状,将截面分成三部分,分别建立任意坐标 s_1, s_2, s_3 , 如图 1-10(a)所示。则上翼缘上距右边为 s_1 的直线以右的部分面积对 z 轴的静矩为

$$\bar{S}_{z1} = t \cdot s_1 \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (b)$$

腹板上距上边为 s_2 的直线以外的面积对 z 轴的静矩为

$$\bar{S}_{z2} = -bt \cdot \frac{h}{2} - s_2 \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) \quad (c)$$

下翼缘上距右边为 s_3 的直线以右的部分面积对 z 轴的静矩为

$$\bar{S}_{z3} = t \cdot s_1 \cdot \frac{h}{2} \quad (d)$$

③ 确定剪应力分布规律。将式(b)、外力 Q_y 和惯性矩 I_z 代入式(a),得上翼缘剪力流为

$$f_1 = -\frac{Q_y \bar{S}_{z1}}{I_z} = \frac{Q_y}{I_z} \cdot \frac{th}{2} \cdot s_1$$

所以,剪应力分布规律为

$$\tau_1 = \frac{f_1}{t} = \frac{Q_y h}{2I_z} \cdot s_1$$

结果为正值,可知剪应力的方向与任意坐标 s_1 的增加方向一致,即水平向左。

同理可得腹板上的剪力流、剪应力分布规律分别为

$$f_2 = -\frac{Q_y \bar{S}_{z2}}{I_z} = \frac{Q_y}{I_z} \left(bt \cdot \frac{h}{2} + s_2 \cdot t \cdot \frac{h - s_2}{2} \right)$$

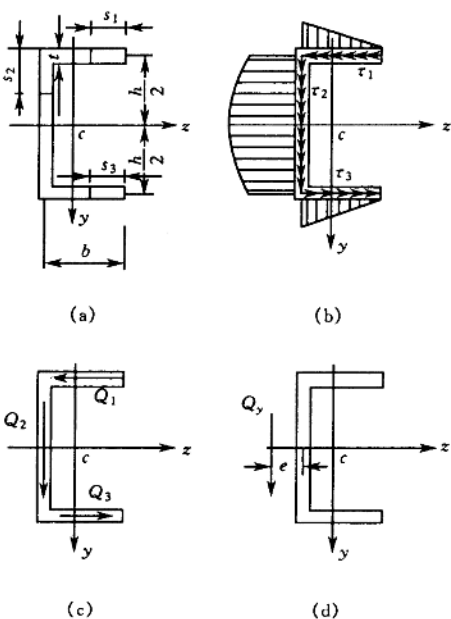


图 1-10

$$\tau_2 = \frac{f_2}{t} = \frac{Q_y}{I_z} \left(\frac{bh}{2} + \frac{h}{2} \cdot s_2 - \frac{s_2^2}{2} \right) \quad (\text{垂直向下})$$

下翼缘上的剪力流、剪应力分布规律分别为

$$f_3 = -\frac{Q_y \bar{S}_{z3}}{I_z} = -\frac{Q_y}{I_z} \cdot \frac{th}{2} \cdot s_3$$

$$\tau_3 = \frac{f_3}{t} = -\frac{Q_y h}{2I_z} \cdot s_3 \quad (\text{水平向右})$$

由以上计算可知,翼缘上的剪应力呈线性分布,腹板上的剪应力呈抛物线规律分布,如图 1-10(b)所示。

④ 确定内力系合力。设上翼缘、腹板、下翼缘上的切向内力系合力分别为 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 , 则

$$Q_1 = \int_{A_1} \tau_1 \cdot dA = \int_{s_1} f_1 \cdot ds_1 = \int_0^b \frac{Q_y h t}{2I_z} \cdot s_1 \cdot ds_1 = \frac{Q_y h b^2 t}{4I_z}$$

$$Q_2 = \int_{A_2} \tau_2 \cdot dA = \int_{s_2} f_2 \cdot ds_2 = \int_0^h \frac{Q_y}{I_z} \left(\frac{bh}{2} + \frac{hs_2}{2} - \frac{s_2^2}{2} \right) ds_2 = \frac{Q_y}{I_z} \left(\frac{bth^2}{2} + \frac{th^3}{12} \right)$$

$$Q_3 = -Q_1 = -\frac{Q_y h b^2 t}{4I_z}$$

三个力的指向如图 1-10(c)所示。

(3) 剪切中心及其位置的确定

现以槽形截面梁为例,说明确定弯曲中心的方法。设槽形截面尺寸如图 1-10(a)所示,受平行于 y 轴的外力 Q_y 作用, z 轴为中性轴。由[例 1-2]可知,槽钢上翼缘、腹板、下翼缘上的切向内力系合力 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 的方向如图 1-10(c)所示,大小分别为

$$Q_1 = \frac{Q_y h b^2 t}{4I_z} \quad (1-18)$$

$$Q_2 = \frac{Q_y}{I_z} \left(\frac{bth^2}{2} + \frac{th^3}{12} \right) \quad (1-19)$$

$$Q_3 = -Q_1 = -\frac{Q_y h b^2 t}{4I_z} \quad (1-20)$$

且槽形截面对中性轴的惯性矩为

$$I_z = 2 \left[\frac{bt^3}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 bt \right] + \frac{th^3}{12} \approx \frac{bth^2}{2} + \frac{th^3}{12}$$

将上式代入式(1-19),可得

$$Q_2 = Q_y$$

由以上分析可知,槽钢上、下翼缘上切向内力系合力 Q_1 、 Q_3 大小相等、方向相反,作用线不在一条直线上,则二力构成一力偶矩为 $Q_1 \cdot h$ 的力偶,该力偶与腹板上的剪应力合力 Q_2 进一步合成得到截面上一个总的合力(即截面上的剪力 Q_y),合力的大小等于 Q_2 ($Q_2 = Q_y$),但其作用线向左平移一个距离 e ,如图 1-10(d)所示。这个距离可以根据合力矩定理确定,即

$$Q_y \cdot e = F_1 \cdot h = \frac{Q_y h b^2 t}{4I_z} \cdot h$$

所以,截面上的剪力 Q_y 的作用线距腹板中线的距离 e 为

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4I_z} \quad (1-21)$$