普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学系列教材

大学数学

5

Mathematics

湖南大学数学与计量经济学院组编

主编　李董辉　曾金平

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学系列教材

大学数学

（五）

湖南大学数学与计量经济学院组编

主　编　李董辉　曾金平

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学数学五/李董辉，曾金平主编．—北京：高等教育出版社，2003.1
ISBN 7-04-011689-8

Ⅰ．大… Ⅱ．①李…②曾… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 081919 号

责任编辑 文小西 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马静如 **责任校对** 存 怡 **责任印制** 韩 刚

出版发行 高等教育出版社 **购书热线** 010—64054588
社　　址 北京市东城区沙滩后街 55 号 **免费咨询** 800—810—0598
邮政编码 100009 **网　　址** http://www.hep.edu.cn
传　　真 010—64014048 http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 高等教育出版社印刷厂

开　　本 787×960 1/16 **版　　次** 2003 年 1 月第 1 版
印　　张 18.5 **印　　次** 2003 年 1 月第 1 次印刷
字　　数 310 000 **定　　价** 19.60 元

内容简介

大学数学系列教材(共五册)是普通高等教育“十五”国家级规划教材,本书是其中的第五册,内容分为数值计算方法与数学模型实验两个部分.第一部分为高等数学中的数值方法介绍,包括方程(组)的直接与迭代法(切线法、消元法、同时代换法、逐次代换法)、函数的插值与逼近(一次与二次 Lagrange 插值、三次 Hermite 插值、三次样条函数插值、最小二乘逼近)、微积分近似计算(梯形求积公式、辛普森求积公式)、微分方程初(边)值问题数值解简介(欧拉折线法等)、优化问题的典型算法(黄金分割法、单纯形法、最速下降法、变尺度法)等内容.第二部分则结合数学软件(如 MATLAB5.3)和一些简单的数学模型给出一些数学模型实验.数学模型实验由基本数学实验和综合数学实验组成.从第三章至第六章,我们均以一小节的篇幅介绍与相应章节内容有关的基本数学实验;在最后一章,我们给出几个综合性较强的数学实验.

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材,也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

大学数学系列教材

湖南大学数学与计量经济学院组编
总主编 刘楚中 **副总主编** 黄立宏

《大学数学》(一) 主编 黄立宏 戴斌祥
《大学数学》(二) 主编 曾金平 李晓沛
《大学数学》(三) 主编 刘楚中 曹定华
《大学数学》(四) 主编 杨湘豫 邓爱珍
《大学数学》(五) 主编 李董辉 曾金平
《大学数学习题集》(附习题解答)
主编 刘陶文 彭亚新

前　言

大学数学系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续.

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵.在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求.在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养.教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务.本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性.本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精练、符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.本系列教材适合大学非数学类理工科本科生，以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用.本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

本系列教材包括《大学数学(一)》(含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等)、《大学数学(二)》(含代数与几何等)、《大学数学(三)》(含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)、《大学数学(四)》(含概率论、数理统计等)、《大学数学(五)》(含数值计算、数学建模、计算机与数学等)、《大学

数学习题集》(附习题解答).整套教材由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编.本册大学数学(五)由李董辉、曾金平主编,参加编写的人员有马传秀.

本系列教材编写得到湖南大学教务处的大力支持,在此表示衷心感谢.

湖南大学《大学数学》教材编写组

2002年2月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址：

电　话：(010)84043279　13801081108
传　真：(010)64033424
E - mail：dd@hep.com.cn
地　址：北京市东城区沙滩后街55号
邮　编：100009

目　录

绪　言

随着计算机技术的迅速发展与广泛应用,计算机已经对人类社会的全部生活(包括物质生活和文化生活)产生了巨大的影响,以至被称为“改变社会的机器”.同样,它也给计算数学的飞跃发展带来了前所未有的契机.随计算数学和计算机技术的发展而日益兴起的计算科学(计算数学与仿真、图像处理、统计分析等等)已经深入渗透于自然科学、工程技术、经济管理以至人文科学各个领域.有人称计算科学是继伽利略与牛顿创立的理论研究与实验研究两大科学方法后的第三种科学研究方法,并以前所未有之势推动着技术革命.

这样的形势自然而然反映到我们对21世纪人才的训练与培养上来,并对数学课程的改革提出了新的要求.数学素质是数学知识和能力的综合体现.数学素质除了包括抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、数学运算能力外,还应包括数学建模能力与数值计算能力(含数据处理能力),即会“用数学”解决实际问题,会用计算机进行科学计算,这样,就产生了“数学实验”这门课程.

“数学实验”是高等学校迎接21世纪数学教育改革的一门新课程.其目的是让学生学会独立使用各种先进的计算工具(算法、软件等)和信息传播手段,来解决一些典型的数学模型问题.中科院院士姜伯驹先生曾指出:“应当试验组织数学实验课程,在教师的指导下,探索某些理论或应用课题,学生的新鲜想法借助数学软件可以迅速实现,在失败和成功中得到真知.这种方式,变被动的灌输为主动的参与,有利于培养学生的独立工作能力和创新能力.创新,是国家兴旺发达的不竭动力,是一个民族进步的灵魂.培养创新能力是21世纪对教育提出的艰巨任务.这需要迅速转变过去继承性的教育模式,树立创新性教育的观念,把素质教育提高到一个新水平.”缘于此,近些年来,“数学实验”已成为各个大学探索性的数学课程并逐步成为大学数学课程的重要组成部分.

在以往的工科基础课中,数学课只有理论教学课、习题课,而没有实验课.数学的习题课,对于巩固课堂教学内容一直起着重要的作用.然而,习题课不能解决数学教学和计算机等信息技术的结合问题,也就难以将学生的素质教育提高一个层次.“数学实验”课与过去的课堂教育是截然不同的,它把教师讲授—记忆—测验的传统学习模式,变成 Sounders Maclane 提出的过程:直觉—

探视—出错—思考—猜想—证明.将信息的单向交流,变成多向交流.数学实验课也与习题课不同,它的每个试验不仅有一定的实际的或测量的背景,而且有明确的试验目的.在实验课老师的指导下,学生动脑也动手,并使用计算机软件和编程技术,解决实践中提出的问题,师生共同实现数学实验的总体化目标.因此,开设“数学实验”课程一方面可以在数学教学中对学生加强“用数学”的教育,培养学生用数学知识解决实际问题的意识和能力;另一方面此课程将数学教学与计算机应用结合起来,培养学生进行数值计算与数据处理的能力;更重要的是通过 Sounders Maclane 的学习模式的训练,培养学生的创新意识,这无疑对学生的数学素质的培养颇有益处.

然而,到目前为止,“数学实验”这门课程仍在建设之中.该课程的内容和方法,在国内外已经且还正在进行大量的研究和尝试,对它的定位、内容选取和教学方式等诸方面仍存在有不同的理解和多样的选择.我们将“数学实验”纳入大学数学系列教材,所采取的方式仅仅是一种尝试,还须进行不断的实践和探索.由于编者水平有限,一定有不少缺点和错误,愿在大家的帮助下逐步完善.

本书的内容分为数值计算方法与数学模型实验两个部分.第一部分为高等数学中的数值方法介绍,包括方程(组)的直接与迭代解法(切线法、消元法、同时代换法、逐次代换法)、函数的插值与逼近(一次与二次 Lagrange 插值、三次 Hermite 插值、三次样条函数插值、最小二乘逼近)、微积分近似计算(梯形求积公式、辛普森求积公式)、微分方程初(边)值问题数值解简介(欧拉折线法等)、优化问题的典型算法(黄金分割法、单纯形法、最速下降法、变尺度法)等内容.第二部分则结合数学软件(如 MATLAB 5.3)和一些简单的数学模型给出一些数学模型实验.数学模型实验由基本数学实验和综合数学实验组成.从第三章至第六章,我们均以一小节的篇幅介绍与相应章节内容有关的基本数学实验;在最后一章,我们给出几个综合性较强的数学实验.

本书作为大学数学系列教材之一,其目的在于使学生能运用计算机求解各种数学模型问题的数值解答.一方面,通过介绍各种数值方法,使学生理解用计算机求解数学问题的基本数学原理.另一方面,通过介绍 MATLAB 软件和各种数学实验,使学生掌握基本的数学建模方法和常用的数值方法,为以后进行科学计算奠定坚实的基础.

第一章　引　　言

第一节　科学计算与数学实验

数学是研究数与形的科学.其中研究如何利用计算工具,求出数学问题的数值解答的学问,就是计算数学.由此可见,计算数学的前身可追溯到人类文明萌发时期的算学和测绘术.因此,它是数学中最古老的部分.但是,在电子计算机出现以前,由于计算工具的笨拙和数值计算的繁复,往往使人退避三舍,致使计算数学学科在较长的一段时期内发展相当缓慢.

电子计算机被人们视为20世纪最伟大的科学技术发明之一.它的诞生和发展,使得现代计算数学得以繁荣并成为一门现代意义下的新兴学科——科学计算.随着计算机的不断更新换代和计算技术的飞跃发展,科学计算已经渗透到了社会生活和科学技术的各个领域,从而产生了一系列与之密切相关的边缘性学科.比如,计算流体力学、计算气动力学、计算量子化学、计算生物学、计算地质力学、计算气象力学(数值天气预报)、计算材料学、计算天文力学、自动控制与优化计算等等.

借助于科学计算手段,人们突破了实验和理论科学方法的局限,进一步提高了对自然界和社会的认知能力.就拿CT扫描技术来说.CT即X射线计算机层析摄影仪(Computer Tomograghy)是基于不同的物质有不同的X射线衰减系数的原理.也即说,如果能够确定人体衰减系数的分布,就能够重建其断层或三维图像.CT正是基于此原理通过进行数值计算来实现这一转换的.大家都知道CT技术给人类带来的巨大福音.它被称为20世纪医学奇迹.其理论首创者美国科学家柯马克(A.M.Cormark)和制造第一个CT机的英国科学家霍洪斯非尔特(C.N.Hounsfield)于1979年获得了诺贝尔医学和生理学奖.再拿最近于1998年获得诺贝尔化学奖的美国加州大学圣巴巴拉分校的物理系教授科恩和美国西北大学化学系教授波普尔来讲,他们以对量子化学理论上的开创性贡献而荣获此殊荣.科恩是在理论上简化了原子键合作用的数学描述,从而为简化原子键的计算打下了不可或缺的基础.而在剑桥大学获得数学博士学位的英国学者波普尔(常自称为数学家)则着眼于将计算机应用于化学.他建立了一整套计算量子化学方法.特别是自20世纪70年代以来,波普尔等人

还发明了各种大分子的计算方法,并将它们编制成计算机程序.他们的工作开创了计算化学的新时代.马克思的那个“数学在化学中的应用几乎等于零”的年代早已过去.数学,尤其是当今信息时代中的计算科学,已经深入渗透到各个科学领域里的方方面面,发挥着不可取代的作用.因此,计算科学当之无愧的成为继实验和理论两大科学方法之后的第三大科学方法.

一般来说,要寻求某个生产活动或者科学实践中产生的实际问题的数值解答,需经过如下几个步骤:

- 建立一个能够较客观、真实地反映实际问题的数学模型;
- 确定解决该数学模型的有效数值计算方法;
- 利用某种编程语言编制程序;
- 上机调试和计算,打印出计算结果(可能是数值方式,也可能是图形形式);
- 分析结果是否合理,若有必要,再对数学模型或算法进行修正,直至得到可信的结果.

上述各个步骤正是“数学实验”课程要求学生掌握的几个基本环节.其核心和理论基础便是计算数学.因此,本书中我们将内容分为数值计算方法与数学模型实验两个部分,同时将 MATLAB 软件作为实现数学实验的软件环境.为此,在第二章,我们专门介绍 MATLAB5.3 的入门知识;从第三章到第六章,我们分别介绍高等数学中的各种数值方法和相应内容的数学实验.在第七章,我们将给出一些综合性数学实验内容,其中部分来自大学生数学模型竞赛题.

第二节 几个例子

本节我们给出几个典型例子,使得我们能够理解数学实验课程的必要性.

一、来自经济中的优化问题

在人类进行各项经济活动时,人们要完成某一件事情,往往要受到各种主客观条件(如人力、物力、财力、空间和时间等)的限制.因此,人们只能在遵从这些主客观条件下寻求某种意义上的最优(如收益最大、产出最高、耗材最少、时间最省等).以数学的语言来讲,即是寻求某种函数(我们称为效益函数或目标函数),在满足某种约束条件(往往可用一系列等式与不等式组表示)下达到极值.因此,我们可用如下标准的数学模型:

$$\min f(x), \tag{1.2.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} h(x) = 0, \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

进行描述.我们称上述数学模型问题为约束优化问题或数学规划问题.在此优化模型中,目标函数 $f(x)$ 是关于多维变量 x 的实值函数,等式组 $h(x)=0$ 称为等式约束,不等式组 $g(x)\leqslant 0$ 称为不等式约束.当等式约束和不等式约束都不存在时,优化问题变成了无约束优化问题.而当目标函数为线性函数,约束也为线性约束时,优化模型变成了线性规划问题.

例如,某工厂有生产 A、B 两种产品的能力.生产一公斤 A 产品需要 3 天,成本为 50 元.而生产一公斤 B 产品则需要 5 天,成本为 35 元.如果该工厂现有资金 1000 元,每公斤 A 产品可盈利 20 元,而每公斤 B 产品可盈利 25 元.在只有 40 天生产时间的情况下,应如何安排生产计划,以获得最大的效益?

我们设 x,y 分别为计划生产 A 产品和 B 产品的公斤数,则可建立如下线性规划模型:

$$\max f(x,y) = 20x + 25y, \tag{1.2.2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x + 5y \leqslant 40, \\ 50x + 35y \leqslant 1000, \\ x, y \geqslant 0. \end{cases}$$

上述数学模型是一个线性规划问题.对于此问题,怎样求得其数值解答呢? 事实上,在优化模型中,线性规划是应用最为广泛的一个分支.其理论最完善、方法最成熟.同时,许多非线性规划问题的计算方法也要借助于线性规划算法求解.另一个事实是,求解线性规划问题在当今世界上所有较大型的计算机运行时间所占比例最大.其中,数学规划著名学者丹齐格(Dantzig)先生于 1947 年发明的单纯形法最具有划时代意义.单纯形法的思想其实很简单,即将线性约束条件看成一个多面体,然后从一个顶点出发,按照某种规则,转移到另一个顶点,直至目标函数不能减少为止(在理论上,目标函数定能在此多面体的某一个顶点上达到最优).有人称单纯形法是 20 世纪取得经济效益最大的计算方法.它给无数个竞争者带来了巨大的成功和财富.单纯形法的具体内容我们将在本书的第六章予以介绍.

二、简单的投入产出分析

投入产出分析是研究国民经济各个部门之间相互依存关系的一种数学方法.这种方法目前为经济学家所利用,以分析各种经济实体的投入产出水平并进行相应的决策和预测.

国民经济各个部门的联系可用部门联系平衡表(投入产出表)来表示.一般来说,横行表示在报告期间内诸部门的总产品流向各个部门的去向,纵列表示诸部门作为消费者或投入者的作用.下面是五个部门之间的一个投入产出表.

表 1.2.1 投入产出表

部门 部门间流量 部门		消耗部门(投入)					最终产品				总产品 x_i
		农业 x_{i1}	采掘业 x_{i2}	制造业 x_{i3}	电力业 x_{i4}	运输业 x_{i5}	消费	积累	出口	合计 y_i	
生产部门(产出)	农业 x_{1j}	15	0	20	0	10				80	125
	采掘业 x_{2j}	0	0	0	0	0				40	40
	制造业 x_{3j}	10	0	25	15	5				45	100
	电力业 x_{4j}	5	15	15	0	15				25	75
	运输业 x_{5j}	5	10	15	0	5				15	50
进口 u_j		15	0	10	30	5					
净产品价值	工资										
	纯收入										
	合计 z_j	75	15	15	30	10					
总产品价值 x_j		125	40	100	75	50					

下面我们分析一下上述投入产出表的具体含义.首先,每个部门在表格中都出现两次,一次作为投入部门,一次作为产出部门.每一行的各个元素表示在报告期内,某个部门的总产出的流向.例如,第一行表示农业的总产出为125个单位,其中15个单位用于农业本身的消耗,20个单位用于制造业,10个单位用于运输业.最终产品是指退出本期生产过程的产品,包括集体和个人消费、积累和出口等.因此应有关系式

$$15+0+20+0+10+80=125,$$

即

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+y_1=x_1.$$

一般地,我们有

$$\sum_j x_{ij}+y_i=x_i,\ i=1,2,\cdots,5. \tag{1.2.3}$$

表的每一列的各个元素表示某个部门作为消费者和投入者的作用.例如,

第一列表明，为了生产125个单位的总产出，农业消耗了自己生产的15个单位（例如种子等），消耗制造业10个单位（如化肥农药等），消耗电力业5个单位，运输业5个单位，再加上进口消费的15个单位，便是农业部门的总耗费．因此，总产出与总耗费之差就得到农业部门创造的产品价值：

$$125-(15+0+10+5+5+15)=75;$$

即成立

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+u_1+z_1=x_1.$$

由于农业部门为生产125个单位的总产出，需内耗15个单位．这可以理解为每生产一个单位农产品，就需要$\frac{15}{125}=0.12$个单位的农产品．以此类推，还需要消耗制造业$\frac{10}{125}=0.08$个单位，电力业$\frac{5}{125}=0.04$个单位以及运输业$\frac{5}{125}=0.04$个单位．这样就得到了一个生产技术系数矩阵，也称为直接消耗系数矩阵：

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix}\frac{15}{125}&\frac{0}{40}&\frac{20}{100}&\frac{0}{75}&\frac{10}{50}\\\frac{0}{125}&\frac{0}{40}&\frac{0}{100}&\frac{0}{75}&\frac{0}{50}\\\frac{10}{125}&\frac{0}{40}&\frac{25}{100}&\frac{15}{75}&\frac{5}{50}\\\frac{5}{125}&\frac{15}{40}&\frac{15}{100}&\frac{0}{75}&\frac{15}{50}\\\frac{5}{125}&\frac{10}{40}&\frac{15}{100}&\frac{0}{75}&\frac{5}{50}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.12&0&0.2&0&0.2\\0&0&0&0&0\\0.08&0&0.25&0.20&0.10\\0.04&0.375&0.15&0&0.30\\0.04&0.25&0.15&0&0.10\end{bmatrix},$$

其中$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$．因此由(1.2.3)得

$$x_i-\sum_j a_{ij}x_j=y_i,\quad i=1,2,\cdots,5.$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y},\text{或}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y},\tag{1.2.4}$$