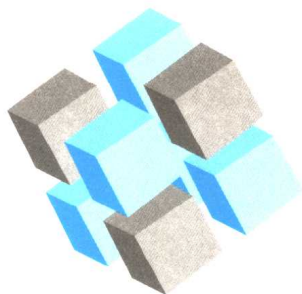


Mathematics Education

数学教育改革论

SHUXUE JIAOYU
GAIGELUN

赵雄辉 著



湖南大学出版社

G633.602
Z330

Mathematics Education

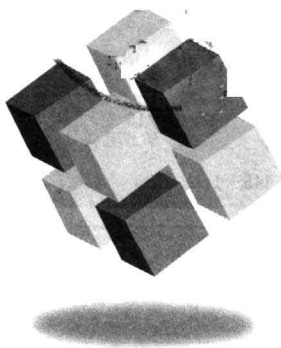
G633.602

Z330

数学教育改革论

SHUXUE JIAOYU
GAIGELUN

赵雄辉 著



湖南大学出版社
951924

图书在版编目(CIP)数据

数学教育改革论/赵雄辉著. —长沙:湖南大学出版社, 2003. 6

ISBN 7-81053-645-1

I. 数... II. 赵... III. 数学课—教学研究
—中小学 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039542 号

数学教育改革论

Shuxue Jiaoyu Gaige Lun

赵雄辉 著

-
- | | |
|-------------------------------|-----------------|
| ☐ 责任编辑 | 罗素蓉 |
| ☐ 特约编辑 | 袁作兴 |
| ☐ 封面设计 | 吴顺辉 |
| ☐ 出版发行 | 湖南大学出版社 |
| | 社址 长沙市岳麓山 |
| | 电话 0731-8821691 |
| | 邮码 410082 |
| | 0731-8822264 |
| ☐ 经 销 | 湖南省新华书店 |
| ☐ 印 装 | 望城县湘江印刷厂 |
-

- | | | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--|------|-----------------------------|-------|
| ☐ 开本 | 850×1168 32 开 | ☐ 印张 | 16.5 | ☐ 字数 | 400 千 |
| ☐ 版次 | 2003 年 6 月第 1 版 | ☐ 2003 年 6 月第 1 次印刷 | | | |
| ☐ 印数 | 1—3 000 册 | | | | |
| ☐ 书号 | ISBN 7-81053-645-1/G·185 | | | | |
| ☐ 定价 | 22.00 元 | | | | |
-

(湖南大学版图书凡有印装差错, 请向承印厂调换)

序

返璞归真，话说数学教育

张孝达

赵雄辉先生在对 21 世纪中国数学教育的探索研究中，在与广大的数学教师、教学研究人员交流研讨中，深感要使以《全日制义务教育数学课程标准》的颁布和新教材实验为标志的新一轮数学教育改革能顺利、健康地发展，需要做广泛的宣传，架设理论与实践的桥梁，于是他花了数年的时间，写作了这本《数学教育改革论》。他要我为此书作序，由于近几年来我参与初中数学教材的研究、编写和实验，对数学教育也有一些思考，所以就答应把一些想法写出来，权以为序。

数学教育为什么要改革？是因为数学教育存在不少问题。有问题，才要改革。我国的数学教育，自改革开放以来，在理论和实践上，都取得了巨大的进展，成绩喜人。但无庸讳言，也还存在着不容忽视的问题。我以为，主要有两大问题：

第一，存在相当比例数学不及格的学生，并且有的学生因此而性情压抑，甚至厌学辍学。这在义务教育已经基本普及，并提出要“基本普及高中阶段教育”的现代社会，的确是一个必须尽快地加以解决的问题。

到底学生数学不及格原因何在？是学生没有“数学头脑”，是天生的“差生”？如果真是这样，那么普及中等教育就失去

了根本的根据。从我国 20 年来大面积提高初中数学教学质量的经验来看，所有智力正常的人都能学会现代社会所必需的数学。而有些学生之所以不能及格，是由于课程内容、教学要求和教学方法还有问题，不能适应所有学生的数学学习。另一方面，绝大部分学生包括数学成绩较好的学生，缺乏实践能力和创新意识。因此数学教育必须进行改革。

第二，数学教育不适应现代社会发展的需要。许多变化与数学教育息息相关：数学及数学的应用有了很大发展；科学技术、特别是计算机技术的飞速发展，把我们带进了信息化社会、知识经济的时代；经济、生产的发展，不仅来自科学技术，而且还依靠经营管理，更依靠发明创造；每个人都能切身感受到的，我们的生活发生了意想不到的变化；等等。这些都促进了教育事业的发展，促进了教育观念、教育目标、教育内容与方法的更新与改革。在此背景下我国数学教育的状况又如何呢？上世纪初为适应工业化需要而兴起的改革运动并未完成，发端于上世纪中叶因高科技竞争引起的“新数运动”而后发展为适应信息社会需要的改革，总的说来研究不足，影响不大。因而存在内容偏繁偏老，要求偏高，方法偏旧等缺陷，加上升学的激烈竞争，不仅把内容引向枝节，而且在教学方法上搞题型教学、模拟考试，更加剧了繁琐偏怪，使学生成了解题机器，不知道数学是什么，学数学有什么用和怎样学数学、做数学，这种状况，更要求我们进行改革。

那么数学教育要改什么，怎么改呢？

针对上述存在的问题，我以为以下三个方面是急需改革的。

1. 内容现代化。要使数学课程的内容和要求适应现代社会的需要，为此，要加强数学与现实的联系，从学生熟悉的事物中、已有的经验和知识中抽象出数学问题，形成数学概念和原理，然后应用于实际；要增加现代社会需要的内容，比如计

算器、线性规划、概率、矩阵、图论等初步知识；要删减过繁而以后并无多大应用的形式运演和证明，以及不必要的枝节和重复内容。当然，内容现代化是一项巨大工程，既需要国家组织力量、加大投入，也需要一线教师积极参与校本课程的开发与建设。

2. 结构层次化。数学课程内容和要求，在初中阶段就应该有所区分。我国在近十年来分层教学的实践已经证明了这一点。但由于我国长期实行一个大纲、一套教材，统一考试，加之升学竞争，高要求已不自觉地形成了教学的一种习惯。“因材施教”在实际教学中很少认真实行，对“差生”、甚至“双差生”的称呼不以为奇。为了改变这种状况，初中阶段就应明确为所有学生都应学习的基本数学内容，它是现代社会每一个公民生活、工作和学习所必需的；同时，又有满足各人不同爱好和特长发展需要的选学内容，这是实现“造就数以亿计的高素质劳动者、数以千万计专门人才和一大批拔尖创新人才”的需要。不过，这样做是有实际困难的，比如我国大班额就是困难之一。但它太重要了。必须认识到我国是一个人口大国，我们必须通过教育把它变成人口资源强国，使人人成为对国家有所贡献的人，尽量减少国家要为其付出的人。要实现层次化，还要尽快通过国家制定政策，改变以考试分数为评价学生的惟一标准、以升学率作为评价教师标准的做法。我相信，随着全面建设小康社会的进展，它是能够实现的。

3. 数学课堂教学要以学生自主探究为主要形式。这是既能学好“双基”又能培养实践能力、创新意识的一种教学形式，目前已受到了广泛的重视，成了教学改革的重点。在进一步谈这个问题之前，有必要先谈谈数学教育的本身。

数学教育是什么？数学教育首先是数学的教育，同时，它又是教育的数学。总结数学教育成功的历史经验，是否能处理好二者的关系对数学教育的发展至关重要。

关于数学的教育，先要问数学是什么？对这个问题现在说法很多，但我以为，至少对基础教育阶段来说，还是恩格斯的说得对，就是数学是关于数量和空间关系的科学。如果可以补充一句，那就是加上研究这种关系的方法和观念。因而数学教育在于使学生获得关于数量和空间关系的基础知识，以及研究这些关系的基本方法和观念。这是理解自然和洞察社会所不可或缺的一个方面。前面提到的把数学引向细枝末节的技巧，做大量繁琐偏怪习题的演算和证明，致使多数学生不知数学是什么，就是因为不自觉地忽视甚至忘了数学的这个本质属性。

而要认识教育的数学，就要问教育是什么？现在说法也很多。我以为，教育就是把一个自然人变成一个社会人，使一个人与生俱来的性向（情感和意志）和潜能（体能和智能）得以发挥，培养发展成为能自立于社会，能与他人相处的人。也就是要使他学会谋生，学会处世。当然，随着社会的发展，谋生处世的内容和教育的方式，也会不断地变化。因此，作为教育的数学，既要适应当代社会发展的需要，也要顺应性格和潜能发展的规律。前面提到的目前教育中存在的问题就是因为不自觉地忽视甚至淡忘了教育的这个本质属性。比如，“课堂中心、教材中心、教师中心”曾经是指导教学的原则，现在看来，它显然与教育的本质是不相符的，但它仍然实际指挥着我们的教学，无形地阻碍着实践的改革，使得一些重要的观念难以形成和实践，如以学生的发展为本，学生是学习的主体，教学不仅是知识结果的教学更重要的是知识发生发展过程的教学等观念就难以形成和实践。

有了上面的认识，我们不难理解教师引导、学生探究的教学形式，它既能使学生掌握基础知识、基本技能，又能培养创新意识和能力。而要搞好探究教学，必须抓住数学教育的基本。

一要抓住数量和空间的关系。凡物皆数，可能有点夸张，不过数学是研究数量和空间关系的，那么数学教育就应该紧紧抓住这个基本，培养学生用数量和空间关系的眼光去观察事物，用数量和空间关系的头脑去思考事物，从而发现事物中的数量和空间关系的问题并解决问题。

在中小学里，数量关系是“和、差、积、商、幂、指、对”，以及特殊的“倍、比、比例”，从运算来说，就是“加、减、乘、除、乘方、开方和对数”；再是数量间相等和不等（大于、小于）的大小关系，在这些关系中有加法和乘法的运算律，指数和对数的运算性质，有等量性质和不等量性质。代数就是研究事物中有哪些数量、这些数量是什么关系、通过运算变形而解决问题。

空间形式，在几何里就是反映事物形状的种种图形，其关系就是图形的形状、大小和位置关系。图形的基本元素是点线面，其基本量是长度和角度（几何里只讲线段和角的大小），几何就是通过基本元素和基本量研究图形的形状、大小和位置关系。其中的基本关系，一般地，形状表示为定义，大小和位置表示为公理和定理，并用它们解决问题。专门研究图形边角关系的为三角，把点量化（应该说数化）来研究空间关系就是解析几何。

数学探究教学，首先是引导学生去观察、去分析现实生活中学生熟悉的、感兴趣的事物，比如物价、运动、图形和数本身等，探索其中的数量、形状，以及它们的关系，并让学生学会用数学语言，特别是符号语言来表示这种关系；其次，就是引导学生运用关系及其性质解决问题。

二要抓住数学的基本思想方法。比较、分析、综合、抽象、概括、归纳、演绎和类比都是重要的思维方法。具体到数学中，字母表示数，换元法，特殊到一般、一般到特殊，由正

命题到逆、否、逆否命题，化归法（消元和降次），执果求因的分析法和执因求果的综合法，猜想、尝试等发散思维和直觉思维方法，等等这些思想方法对创新能力的发展是极其重要的。但一般地说，思想方法不是直接教给学生而能学到的，它主要是通过实际使用逐渐领会而掌握的。这也是教学要强调在教师引导下由学生自主探索的一个主要原因。俗话说，授人以鱼，不如授人以渔。其实“渔”也不是“授”而得的，还是在师父指点之下自己去渔，从而渔鱼双得。

上面只是就数学教育改革几个基本问题的一些思考。在思考数学教育存在的种种问题和解决这些问题的过程中，我想到了要返璞归真，只有抓住了数学教育的本质，才能提纲挈领，以简驭繁，高屋建瓴，洞察事物，搞好改革。

在《数学教育改革论》中对许多问题有更细致的探讨。该书对数学教育的历史进行了简要的回顾，对我国 20 世纪的数学教育目标进行了分析，对改革中继承与发展、保持民族特色与跟上国际趋势的关系做了说明。全书在历史回顾和数学教育名家思想研究的基础上，结合新一轮的基础教育课程改革，探讨了现代教育理念下我国义务教育阶段中小学数学课程目标、教材建设、学习方式、课堂教学、解题教学、教学评价等方面的改革问题和数学教师素质与成长问题。相信这些探索对教师理解和实践《数学课程标准》会有所帮助，也祝愿大家伴随着《数学教育改革论》，培养出符合时代要求的人才，并成为完善修改《数学课程标准》的参与者，在数学教育改革中成长。

2003 年 3 月于北京

目 次

序 返璞归真，话说数学教育	张孝达
---------------------	-----

第 1 章 数学教育的历史回顾	(1)
-----------------------	-----

第 1 节 中国古代的数学教育	(1)
-----------------------	-----

第 2 节 中国近代数学教育历史略述	(10)
--------------------------	------

第 3 节 中国现代数学教育历史略述	(17)
--------------------------	------

第 4 节 新中国的小学 and 初中数学教育	(26)
-------------------------------	------

第 5 节 数学教育改革的国际性浪潮	(52)
--------------------------	------

第 6 节 国际数学教育大会	(63)
----------------------	------

第 2 章 数学教育目标分析	(72)
----------------------	------

第 1 节 解放前我国数学教育目标的演变	(72)
----------------------------	------

第 2 节 新中国数学教育目的的演变	(81)
--------------------------	------

第 3 节 义务教育数学课程目标	(96)
------------------------	------

第 4 节 部分国家与地区的数学课程目标	(108)
----------------------------	-------

第 5 节 数学教育目标的制定	(122)
-----------------------	-------

第 3 章 数学课程与教材改革	(128)
-----------------------	-------

第 1 节 名家论数学课程建设	(129)
-----------------------	-------

第 2 节 影响数学课程改革的因素	(136)
-------------------------	-------

第 3 节 义务教育《数学课程标准》述评	(148)
----------------------------	-------

第4节	数学教材的编写·····	(165)
第5节	数学课程资源的开发·····	(183)
第4章	数学学习方式的转变·····	(191)
第1节	学习与学习方式·····	(191)
第2节	数学学习的特点·····	(206)
第3节	在“做数学”中学数学·····	(214)
第4节	在“教数学”中学数学·····	(226)
第5节	名家谈数学学习·····	(231)
第6节	数学学习方法的训练·····	(237)
第5章	数学课堂教学的改革·····	(249)
第1节	名家论数学教学原则·····	(250)
第2节	数学教学的基本模式·····	(259)
第3节	数学教学模式的构建·····	(276)
第4节	课堂教学情境的创设·····	(290)
第5节	数学课堂教学的艺术·····	(308)
第6节	计算机技术在数学教学中的应用·····	(325)
第6章	数学教育中的“问题解决”·····	(337)
第1节	问题与“问题解决”·····	(337)
第2节	波利亚的“问题解决”思想·····	(345)
第3节	通法与妙解的教学·····	(354)
第4节	合情推理及其教学·····	(362)
第5节	开放性问题的教学·····	(377)
第6节	实践与综合应用问题的教学·····	(393)

第 7 章 数学教学评价改革	(406)
第 1 节 数学教育评价的基本理论.....	(406)
第 2 节 数学课堂教学的评价.....	(412)
第 3 节 学生数学学习的评价.....	(427)
第 4 节 学生数学学业的多元评定.....	(438)
第 8 章 数学教师的素质与成长	(451)
第 1 节 名家论数学教师.....	(452)
第 2 节 数学教育兴趣与技能.....	(460)
第 3 节 数学教师的角色转变.....	(468)
第 4 节 数学教师的创造性工作.....	(478)
第 5 节 数学教师素质评价.....	(488)
第 6 节 名家经历对数学教师成长的启示.....	(495)
后 记	(511)

第1章 数学教育的历史回顾

数学教育源远流长，早在四五千年前，就有了数学教育的萌芽。古埃及大约在公元前 2500 年的古王国时期就在学校中教授数学知识，古希腊的雅典教育在公元前 6 世纪就给统治阶级的子弟传授几何与算术。我国“夏商之际，数学教育已具雏形，西周已粗具规模，春秋战国时期已经定型，数学成为学校必修课之一”。^① 考察数学教育（本书主要是指小学和初中阶段）的历史，了解其发展线索，把握先辈们数学教育的思想与方法的精华，有利于我们继承优良传统，更好地认清改革的方向，使古老的数学教育焕发出新的活力，使改革行进得更加稳健。

第1节 中国古代的数学教育

我国是一个文明古国，数学教育有着悠久的历史，自从有了数学知识的积累起，就在生活和生产中开始了数学知识的教学。

早在商代（约公元前 17 世纪初～约前 11 世纪），我国就有了完整的十进位值制记数法，并在劳动中予以传授。

西周（约公元前 11 世纪～前 771 年）时期，官学之中

^① 马忠林主编，《数学教育史》，广西教育出版社，2001 年，第 3 页。

“教之六艺”：礼、乐、射、御、书、数，其中“数”包括后来属于数学、天文、历法、占卜等方面的知识，“数学知识”作为“小艺”、“技艺”乃是当时教学的主要内容之一。这一时期的数学学习内容主要是十进制记数、记日、算筹计算等方法。算筹的使用和十进位值制记数法奠定了我国古代以计算为中心的数学教育基本框架。

到汉代（公元前 206 年～公元 220 年），官学和私学都有数学教学，其教育内容开始体系化、规范化。被誉为我国第一本数学教材的《九章算术》，在西汉末年已经成书并在教学中使用，而且在西方科学东来之前它长期是我国和近邻国家的传统数学教科书。

魏、晋、南北朝时期，中国社会矛盾尖锐，战争不断。但数学有明显的发展和进步，出现了像祖冲之（公元 429 年～500 年）、祖暅、刘徽（3 世纪）等一批数学家，编写出了如《缀术》《孙子算经》《五曹算经》《夏侯阳算经》《海岛算经》《张丘建算经》《五经算术》等算学教材，数学教学的水平极大地得到了提高。

隋唐五代（公元 581 年～960 年），政治稳定，经济繁荣。推行科举制度，中央机构设立国子寺（607 年改为国子监），掌管朝廷教育工作，国子寺下设国子学、太学、四门学、书学、算学，把算学列为基本的国学之一。隋代国家开设的数学专科学校是世界上最早的算学专科，唐朝初期还颁发了全国统一的教科书，即李风淳等人校编的《算经十书》。该书十分重视数学基本概念和基本技能的教学，开展统一的算学考试，在科举中开设“明算”科，使数学好的人也可以考中做官。在此种制度下，官学、私学、家学、经学都有数学传授，甚至和尚道士也传授“数术”，数学教育得以空前发展，使我国的数学教育进入了正规阶段，算学制度和教材还传入日本、朝鲜等

国。

到宋、元时期，数学发展到了高潮，数学教育也进入了兴盛时期，特别是印刷术的出现，《算经十书》等教科书的重印刊行，大大促进了数学教育的广泛发展。宋代的算学教育由于政府重视，规模比以前扩大，课程设置增加，考试严格，管理制度也完善了许多。宋代以朝廷的名义专门颁发了“算学令”和“算学格”，这是中国有文字记载的第一部由政府颁布的数学教学章程，它详细规定了教学内容、要求、教师与学生的编制、考试内容等。宋元时期还出现了秦九韶、杨辉（南宋）、贾宪（11世纪中叶）、李冶（公元1192年~1279年）、朱世杰等大数学家，并且授徒讲学。另外，在经学教育、手工艺教育、天文历法教育中都要教授数学知识，民间实用数学普及较广，出现了许多歌谣式的数学算题和算法口诀。

但是，从明朝（公元1368年~1644年）开始，封建统治者实施高度中央集权化的专制统治，导致高度的文化专制。中央官学国子监不再设算学，数学不被重视，甚至认为数学是“邪技淫巧”，宋元时期的一些重要数学成果都失传了。不过珠算方法得到普及，在商业中广泛应用。清代前期算学有所恢复，特别是康熙和乾隆年间，由于皇帝对数学的重视，数学教育有了较为顺利的发展，西方数学逐步传入，出现不少优秀的私立数学教育教学点。

古代的数学教学不能用现代的学校、课程、教学概念来衡量。在教学形式上，国家只设立一些相当于高等教育的太学以及类似的学校（如西周的官学），普通教育主要是民间自行实施（如民间私塾、家传、学者设馆收徒、师傅教徒弟的形式），例如朱世杰、李冶、杨辉等都是杰出的数学教育家。他们一方面研究数学，另一方面编写教科书，私办学堂，亲自讲课，传授数学知识，培养出了大批数学人才。在教学内容方面，古代

的中小学数学教学内容主要是数数、简单的测量、筹算,《九章算术》是当时的大学数学教材而不是启蒙数学教材。到1582年,意大利传教士利玛窦来中国传教后,与李之藻编译了《同文算指》,西方笔算整数四则运算介绍入中国。后来,1607年,徐光启与利玛窦又合译《几何原本》,西学才逐步引进并传开。

总观我国古代三千年(周代至公元1840年)的数学教育,从传世的教科书及有关史料记载分析,下面几个方面是古代数学教育思想中突出的部分。^①

一、坚持由浅入深、循序渐进的教学原则

古人贯彻由浅入深、循序渐进的原则,首先体现在数学教科书的编写之中。如《九章算术》各章的内容基本上都遵守从易到难,由简到繁,从特殊到一般的编排次序。以第八章《方程》为例,全章共18个题。内容是讲解线性方程组的解法,第一、二题,方程的系数和解法中均只涉及自然数;第三题出现了零,解答过程中用到“正负术”(有理数加减法则);第四至第八题涉及零和负数;第十一、十二题涉及分数及其运算;第十四至第十七题为四元方程组;第十八题为五元方程组。(第十三题“五家共井”是六元不定方程组)。

教科书的编写中,不仅注意了每章节整体内容的排列次序,而且为了教学的需要,常常在教授一本较难的著作之前,专门补写和讲授一些基础教材作为预备。李冶研究天元术,著有《测圆海镜》一书,在教学中他发现这本书过于高深不适于

^① 本节以下部分参考:赵雄辉,中国古代数学教育思想,《数学教师》,1989年第10期。

粗知数学的人学习，同时，他看到当时的数学书中，没有适合于初学者的教材，就特意写了一本深入浅出的介绍天元术的教材《益古演段》。

朱世杰一生周游四方二十余年，广收门徒，以教学为生。为了教学，他在作《四元玉鉴》（建立四元高次方程理论，1303年刊行）之前，特写了《算学启蒙》（1299年）一书，其启蒙之意就是为学《四元玉鉴》打基础，此书“由浅近以至通变，循序而进，其理易见”。

杨辉认为《九章算术》等书，“无启蒙之术，初学病之”，于是就编了许多内容浅显的教科书，而且在《算法通变本末》中的“习算纲目”里的内容安排强调由浅入深，循序渐进。他自己在教学中，总是让学生由简单的算法开始，逐步接触比较复杂的内容。可见他注重循序渐进原则在数学教学中的运用。

二、提倡启发式教学

启发式教学为孔子所首创。孔子说，“不愤不启，不悱不发，举一隅不以三隅反，则不复也”（《论语·述而》）。其“启发”主要指教学的适时性和巧妙性。孔子的这些思想为后世数学教育家所接受和运用，不少教数学者主张让学生独立思考，教师在关键处予以启发，做到“道而弗牵，强而弗抑，开而弗达”。赵爽说“凡教之道，…，愤之悱之，然后启发”，这样才能“举一隅，使反之以三”。杨辉说：“好学君子自能触类旁通，何必尽传”，“好事者得之，自可引而申之，必发其余，岂小补哉。”这表明杨辉赞成教学中以学生为主体，适当启发，不应教师细讲无遗。