线性代数

(第二版)

Linear Algebra

同济大学应用数学系《线性代数》编写组 编

同济大学出版社

线 性 代 数

（第二版）

同济大学应用数学系《线性代数》编写组　编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/同济大学应用数学系《线性代数》编写组编. —2版. —上海:同济大学出版社,2003.9

ISBN 7-5608-2673-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. 同… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. 0152.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 049131 号

线 性 代 数(第二版)

同济大学应用数学系《线性代数》编写组 编

责任编辑 吴凤萍 责任校对 郁 峰 封面设计 潘向蓁

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	同济大学印刷厂印刷
开 本	850mm × 1168mm 1/32
印 张	10.625
字 数	306000
印 数	6 001—14 100
版 次	2003 年 9 月第 2 版 2004 年 4 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 7 - 5608 - 2673 - 3/O · 239
定 价	12.90 元

内容提要

本书强调用列向量的形式来表示向量，突出了矩阵行初等变换的作用；十分注意《线性代数》这门课程深刻的几何背景，把向量、行列式、线性变换的几何意义都作了详细的介绍；并且把解析几何的基本内容：直角坐标系，向量的内积、外积与混合积，平面与直线，二次曲面及其分类等，使用线性代数的语言加以介绍，以利于把代数与几何有机地结合起来。

本书内容包括预备知识、矩阵代数、行列式、向量组的线性相关性、平面与直线、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值与特征向量、可对角化条件、向量的内积与欧氏空间、二次曲面及其分类、二次型等，一共分成26节，多数小节的内容安排可以在2学时内讲完。本末附有习题解答和两个附录，读者可以通过这两个附录了解和应用 Mathematica 与 Matlab 数学软件来完成“线性代数”课程中所涉及到的具体计算问题。

本书可供高等院校非数学类各专业作为工程数学的“线性代数”教材，也可供科技工作者阅读。

第二版前言

《线性代数》自 2000 年出版以来，承蒙广大读者和使用该书同行们的厚爱，提出了不少宝贵的修改意见，尤其是郭镜明教授及其他同事提出了许多具体的批评与建议，我们谨在此向有关的同志表示衷心的感谢。

再版后的《线性代数》除了改正了第一版中的印刷错误和增删了少量习题外，主要在以下两方面进行了修改。首先，我们把 Mathematica 和 Matlab 数学软件里与线性代数中的计算问题有关的命令和算法汇编成两个附录。其次，我们强调了行列式的几何意义以及它在线性变换中的几何解释。在应用计算机软件很容易计算行列式值的今天，从另外一个角度来看待行列式，并强调一下行列式的几何意义或许是有益的。

蒋志洪编写了本书的附录 1 和附录 2，其余的修订工作由叶家琛承担。

编　者

2003 年 6 月

前　言

长期以来，我们因为没有一本专门为周学时 3 的《线性代数》课程编写的教材，给相应的教学工作带来了诸多不便。现在，开设周学时 3 的《线性代数》课程的专业越来越多，编写一本合适教材的任务就摆到了议事日程上来了。根据有关的《线性代数》教学大纲的要求，结合多年来的教学实践，在应用数学系的领导和同事们的热情支持下，我们在 1997 年暑假，编写了这本教材的第一稿。经过一年的教学实践，我们又作了进一步的修订，编印了这本教材的第二稿。现在经过我们又一次的修改补充，这份教材终于与大家见面了。限于我们的水平，错误不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

本书强调了用列向量的形式来表示向量，突出了矩阵的作用，尤其把矩阵的行初等变换放在十分重要的地位。这样做，对工科各专业学生掌握线性代数的基本方法去解决一系列基本问题，例如求矩阵的逆、确定矩阵的秩和解线性方程组等等，都有好处。我们也十分注意线性代数这门课程深刻的几何背景，对向量的线性相关性、线性空间和线性变换都用较多的篇幅加以介绍，并且把解析几何的基本内容：直角坐标系，向量的内积、外积和混合积，平面与直线，二次曲面及其分类等，使用线性代数的语言加以介绍。这样的处理方法将有利于把代数和几何有机地结合起来。

章亮教授仔细地校阅了本书的初稿，提出了许多宝贵的修改意见，谨表示衷心的感谢。没有同济大学教务处和应用教学系的支持，这本教材的出版是根本不可能的，对此，也谨表示我们衷心的谢意。

本书由范麟馨编写 0～7 节的初稿，黄临文编写 8～10 节和 13～18 节的初稿，许新福编写 19～21 节的初稿，叶家琛编写 11～12 节和 22～25 节的初稿。最后由叶家琛在技术上作了统一处理。

编　者

1999 年 12 月

目　录

§0 预备知识

一、集合

定义 0.1 若干个(有限或无限)确定事物的总体称为**集合**,简称为**集**.构成集合的每一事物称为集合的**元素**.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记为 $a\in A$,若 a 不是集合 A 中的元素,则记为 $a\notin A$.

按集合中所含元素的个数为有限或无限,集合可分为**有限集**和**无限集**两大类.表示集合的方式有两种:一种叫**列举法**,即列举出这个集合的全部元素,这种方式适用于表示有限集;另一种叫**描述法**,即写出这个集合的元素所具有的特征性质,这种方法既可以用来表示有限集,也可以用来表示无限集.

例 1 $A=\{2,3\}$ 表示一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合,用的是列举法. $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 是用描述法表示平面直角坐标系里单位圆上全体点的集合.

定义 0.2 不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.

例 2 $A=\{x\mid x^2+x+1=0,x\text{ 是实数}\}$ 就是空集 $\varnothing$.

设 A,B 是两个集合,如果 A 的每个元素皆为 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$(或者 $B\supseteq A$),集合 A 总是它自身的子集.如果 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则 A 是 B 的真子集,记为 $A\subset B$.

我们约定:空集是任何集合的子集.

定义 0.3 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,那么,称 A,B 两集合相等,记为 $A=B$.

经常用到的数集有：

自然数集：$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

整数集：$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$；

有理数集：$\mathbf{Q}=\{\frac{q}{p}\mid p\neq 0,p,q\in\mathbf{Z}\}$；

实数集：$\mathbf{R}$；

复数集：$\mathbf{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{R}\}$；

显然 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

设 A,B 是两个集合，由集合 A 与 B 的公共元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$. 由 A 的一切元素与 B 的一切元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$
$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

显然有

$$A\cap B\subseteq A,\qquad A\cap B\subseteq B,$$
$$A\cup B\supseteq A,\qquad A\cup B\supseteq B.$$

关于集合的这两种运算，我们有分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\tag{0-1}$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\tag{0-2}$$

证明：我们只证明(0-1). 设 $x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in B\cup C$ 且 $x\in A$，即 $x\in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 中的一个. 若 $x\in B$，则由 $x\in A$，可得 $x\in A\cap B$. 同样，若 $x\in C$，可得 $x\in A\cap C$. 不论何种情形，皆有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即有

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

反之，若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，由于 $B\subseteq B\cup C$，$C\subseteq B\cup C$，不论何种情形，皆有 $x\in A\cap(B\cup C)$，即有

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

因此，式(0-1)成立. 式(0-2)的证明留作习题.

两个集合的交与并的概念可以推广到任意 n 个集合上去.

定义 0.4 设 A,B 是两个集合,称

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

为 A 与 B 的积.

由定义可知,$A\times B$ 是由元素对 (a,b) 组成的集合,其中第一个位置的元素 a 取自 A,第二个位置的元素 b 取自 B. 例如取定一个坐标系后,平面上的点的坐标是一对实数 (a,b),平面上所有点的坐标的集合就是 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的积,即

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}.$$

二、映射

定义 0.5 设 A,B 是两个非空集合,A 到 B 的一个**映射**指的是一个对应法则,通过这个法则,对于集合 A 中的每个元素 a,有集合 B 中一个唯一确定的元素 b 与之对应.

A 到 B 的映射,通常用 $f,g,\sigma,\cdots$ 表示,例如:

$$f:A\to B.$$

如果在映射 f 下,A 中元素 a 对应 B 中元素 b,则记为

$$f:a\mapsto b \quad 或 \quad b=f(a).$$

这时,b 叫做 a 在映射 f 之下的**像**,a 叫做 b 在 f 下的一个**原像**.

例 3 $\sigma:n\mapsto 2n,\ n\in\mathbf{Z}$,这是整数集 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 4 定义 $\sigma:a+bi\mapsto b,\ a,b\in\mathbf{R}$,这是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.

例 5 定义 $f(n)=n-1$ 即

$$f:n\mapsto n-1,\ n\in\mathbf{N},$$

则 f 并不是自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一个映射. 因为 $f(1)=1-1=0\notin\mathbf{N}$,但 f 可以看作是自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 6 设 M 是一个集合. 定义 $\sigma(a)=a,\forall a\in M$,这是 M 到 M 的一个映射,它把 M 的每个元素映射到它自身,称 σ 是集合 M 的**恒等映射**,或**单位映射**. 通常记为 $\mathbf{1}_M$ 或 id_M.

例 7 设 A,B 是两个非空集合,$x\in B$ 是 B 中一个确定的元素. 定义从 A 到 B 的映射:

$$\sigma: A \to B,\ a \longmapsto x,\ a \in A,$$

它把 A 中每个元素映到 B 中那个确定的元素 x. 通常称 σ 是 A 到 B 的**常值映射**.

回忆一下我们熟悉的函数概念,它就是从一个数集(定义域)到另一个数集(值域)的映射. 因此,映射概念是函数概念的推广,它不再局限于讨论数集之间的对应关系.

例 8 设 A 是全体中华人民共和国公民组成的集合,B 是有序 18 元数组所成的集合. 每位公民与他(她)的 18 位身份证号码之间的对应关系就定义了 A 到 B 的一个映射.

集合 A 到 B 的两个映射 σ,τ 称为相等,如果对于每一个 $a \in A$,都有 $\sigma(a)=\tau(a)$成立. 这时,记为 $\sigma=\tau$.

还可以定义映射的**合成**. 设 σ 是从集合 A 到 B 的映射,τ 是从集合 B 到 C 的映射,规定映射 σ 与 τ 的合成 $\tau\sigma$ 为

$$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)),\ a \in A,$$

即 $\tau\sigma$ 是相继施行 σ 和 τ 的结果,它把 A 中的元素 a 先映到 B 中的元素 $\sigma(a)$,再映到 C 中的元素 $\tau(\sigma(a))=(\tau\sigma)(a)$. 显然,对于集合 A 到 B 的任一映射 $\sigma: A \to B$,有

$$\mathrm{id}_B\sigma=\sigma\mathrm{id}_A.$$

设 $\sigma: A \to B$ 是集合 A 到 B 的映射,用 $\sigma(A)$表示 A 在映射 σ 下的像的全体,它称为 A 在映射 σ 下的**像集**. 显然

$$\sigma(A) \subseteq B.$$

如果 $\sigma(A)=B$,即对每一个 $b \in B$,必有一个元素 $a \in A$,使 $\sigma(a)=b$成立,那么,映射 σ 就称为**满射**. 容易验证例 4 是一个满射.

如果在映射 $\sigma: A \to B$ 下,A 中不同元素的像也一定不同,即由 $a \neq a'$,一定有 $\sigma(a) \neq \sigma(a')$(等价地,若 $\sigma(a)=\sigma(a')$,则 $a=a'$),那么映射 σ 称为**单射**. 同样可以验证,例 3 是一个单射.

既是单射又是满射的映射叫**一一映射**(或一一对应).

例 9 设 $\mathbf{C}$ 是全体复数的集合,定义

$$\sigma(a+bi)=a-bi, a, b\in\mathbf{R},$$

这是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的一一对应.

容易看出,有限集之间存在一一映射的充分必要条件是它们所含的元素个数相同,但对于无限集就不能这样说了.

关于映射概念,应注意如下几点:

(1)A 与 B 可以是同一集合,也可以是不同集合;

(2)对于 A 的每一个元素,必有 B 中一个唯一确定的元素与它对应;

(3)一般说来,B 的元素不一定都是 A 中元素的像;

(4)A 中不同元素的像可能相同.

三、代数运算

定义 0.6 设 A,B,D 是三个集合,从积集合 $A\times B$ 到 D 的一个映射 ϕ 叫做 $A\times B$ 到 D 的一个**代数运算**. 设 $a\in A, b\in B, d$ 是元素对(a, b)在映射 ϕ 下的像,我们记作

$$a\phi b=d, \qquad d\in D.$$

例 10 整数对(a,b)有唯一确定的整数 $a+b$ 与之对应. 从映射的观点看,整数的加法实际上是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个代数运算. 在这个映射下,$(a, b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的像是 a 与 b 的和 $a+b$.

例 11 实数的乘法也是一个代数运算:

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}, (a,b)\longmapsto ab.$$

例 12 空间向量的内积也是一个代数运算:

$$\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\longmapsto\mathbf{R}, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\longmapsto\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

这里

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3,\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3.$$

例 13 设 $A=\{1,2\}$，$D=\{$奇，偶$\}$，现定义映射 ϕ：

$$(1,1)\longmapsto \text{偶},\qquad (1,2)\longmapsto \text{奇},$$
$$(2,1)\longmapsto \text{奇},\qquad (2,2)\longmapsto \text{偶}.$$

$\phi: A\times A\to D$ 就是一个代数运算.

例 14 因为除数不能为零，实数的除法不能看作是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的代数运算，但可以看作是代数运算：

$$\mathbf{R}\times\{\mathbf{R}\backslash\{0\}\}\to\mathbf{R}.$$

当 A 和 B 都是有限集时，代数运算 $A\times B\to D$ 可以用运算表来表示. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，而 $a_i\phi b_j=d_{ij}\in D$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，这个代数运算可写成

ϕ	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	d_{11}	d_{12}	$\cdots$	d_{1n}
a_2	d_{21}	d_{22}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	d_{m1}	d_{m2}	$\cdots$	d_{mn}

定义 0.7 如果 ϕ 是 $A\times A\to A$ 的代数运算，那么，称 A 关于代数运算 ϕ 是封闭的，或称 A 有代数运算 ϕ.

例如，$\mathbf{N}$ 对于数的加法和乘法是封闭的，但对于减法不封闭. $\mathbf{Z}$ 对于数的加法、减法和乘法是封闭的，但对于除法不封闭. 由于除数不能为零，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 对于数的除法也是不封闭的. 当然，他们分别对于数的加法、减法和乘法封闭.

更一般地，若 ϕ 是 $A\times B\to A$ 或 $B\times A\to A$ 的代数运算，也称 A 关于代数运算 ϕ 封闭. 例如，全部实系数多项式 $f(x)$ 所成的集合 $\mathbf{R}[x]$ 对于实数与实系数多项式的乘法

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]$$

是封闭的. 这样推广以后,我们也可以把有理数域 **Q**,实数域 **R** 和复数域 **C** 对于数的除法看成是封闭的.

四、数域

定义 0.8 如果复数域的子集 $\boldsymbol{F}$ 含有数 1 和 0,且对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)四则运算封闭,那么,称 $\boldsymbol{F}$ 为一个**数域**.

由定义可知,**Q**,**R**,**C** 都是数域,而 **Z**,**N** 不是数域.

例 15 令 $\boldsymbol{P}=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 $\boldsymbol{P}$ 是一个数域.

证明 $\boldsymbol{P}$ 中含有数 1 和 0,是复数域 **C** 的一个子集,$\boldsymbol{P}$ 对于加、减法运算封闭是明显的,再验证 $\boldsymbol{P}$ 对乘、除法也封闭.

乘法:$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\boldsymbol{P}$;

除法:设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$,　即有 $a-b\sqrt{2}\neq 0$,从而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\boldsymbol{P}.$$

因此,$\boldsymbol{P}$ 是数域.

定理 0.1 任何数域都包含有理数域,即 **Q** 是最小的数域.

证明 设 $\boldsymbol{P}$ 是一个数域,由于 $\boldsymbol{P}$ 中含有 1 且对加法封闭,因此 $\boldsymbol{P}$ 包含有全体自然数,又因 $\boldsymbol{P}$ 中含有 0,由 $\boldsymbol{P}$ 对减法封闭,故 $0-n=-n$ 也都在 $\boldsymbol{P}$ 中,即 $\boldsymbol{P}$ 包含有全体整数,再由任何一个有理数皆可表达成两个整数的商以及 $\boldsymbol{P}$ 对除法封闭,即可知 $\boldsymbol{P}\supseteq\mathbf{Q}$.

注意,包含有理数域的集合不一定是数域. 例如,$A=\{$全体有理数以及$\sqrt{2}\ \}\supset\mathbf{Q}$,但 A 不是数域.

今后,我们总是用 $\boldsymbol{F}$ 来表示一个数域.

习　题

1. 证明：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2. 设 $M\subset N$，证明：$M\cap N=M, M\cup N=N$.

3. 设　$A=\{a,b,c\}, B=\{0,2,4\}$，定义

$$f:\ a\longmapsto 0, b\longmapsto 2, c\longmapsto 2,$$

f 是不是 A 到 B 的一个映射？为什么？

4. 在 $\mathbf{R}$ 上定义

$$\sigma(a)=\begin{cases}a & a\neq 1\\ b & a=1,\end{cases}$$

这里，$b^2=1$，σ 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射？为什么？

5. 设 $A=B=\mathbf{Z}, D=\{0,1\}$，定义

$$a\phi b=\begin{cases}0 & \text{若 } a+b \text{ 是偶数}\\ 1 & \text{若 } a+b \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

ϕ 是不是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 到 D 的一个代数运算？为什么？

6. 设 ρ,σ,τ 分别是集合 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的映射，试验证映射的合成满足结合律，即

$$\tau(\sigma\rho)=(\tau\sigma)\rho.$$

7. 设 $\sigma:A\rightarrow B$ 是集合 A 到 B 的一一映射，定义 $\sigma^{-1}:B\rightarrow A$ 为

$$\sigma^{-1}(b)=a, \text{当 } \sigma(a)=b \text{ 时}.$$

试验证：

(1) σ^{-1} 是集合 B 到 A 的一一映射，通常把 σ^{-1} 称为映射 σ 的**逆映射**；

(2) $\sigma^{-1}\sigma=\mathrm{id}_A, \sigma\sigma^{-1}=\mathrm{id}_B$；

(3) 若 σ,τ 分别是集合 A 到 B，B 到 C 的一一映射，则映射的合成 $\tau\sigma$ 是集合 A 到 C 的一一映射，$\sigma^{-1}\tau^{-1}$ 是 $\tau\sigma$ 的逆映射.