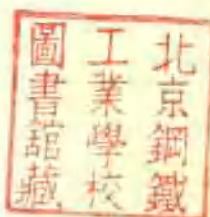


中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

材料力學

下 冊 第二分冊

Н. М. БЕЛЯЕВ 著 千光瑜等譯



商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



材 料 力 學

下 冊 第二分冊

H. M. 別遼耶夫著 干光瑜等譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別達耶夫 (Н. М. Беляев) 著“材料力學” (Сопротивление материалов) 1951 年第七版修正增訂本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版。

參加本書翻譯的為哈爾濱工業大學千光瑜(第三十五章、第三十六章)、楊文鵠(第三十七章)、梁紹敏(第三十八章)和金辰(第三十九章)等四同志,並由王光遠同志校訂。

材 料 力 學

下 冊 第二分冊

千 光 瑜 等 譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

春 明 印 書 館 印 刷

(84943B2)

1953年11月初版 版面字數151,000

印數1—20,000 定價¥7,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

下册第二分册目錄

第十篇 荷重之動荷作用

第三十五章 慣性力與振動之計算	767
§ 215 緒論	767
§ 216 在等加速運動時應力之計算	769
§ 217 旋轉圓環(飛輪輪緣)的計算	771
§ 218 平行桿和連接桿內之應力	772
§ 219 等厚之旋轉圓盤	775
§ 220 等強度圓盤	779
§ 221 共振對應力之影響	780
§ 222 振動時應力之計算	782
§ 223 振動時彈性體系之質量的考慮	785
§ 224 例題	792
第三十六章 撞擊時之應力	796
§ 225 基本原理	796
§ 226 撞擊時應力計算的一般方法	797
§ 227 撞擊時應力計算及強度校核之特例	802
§ 228 對不動平面作軸向撞擊時桿件之應力	807
§ 229 撞擊時變斷面桿內之應力	808
§ 230 從上面所得結果推出之實用結論	810
§ 231 受撞擊之彈性體系之質量的考慮	812
§ 232 例題	815
§ 233 直到破壞之撞擊實驗 撞擊試驗	818
§ 234 不同之因素對撞擊試驗之影響	821
第三十七章 在重複應力情況下材料的強度校核	825
§ 235 關於重複荷重對材料強度的影響的基本概念	825
§ 236 在重複應力情況下的強度條件之組成	827
§ 237 在對稱循環時持久極限的求法	829

§ 238 不對稱循環時的持久極限	834
§ 239 局部應力	839
§ 240 零件尺寸對持久極限的影響	846
§ 241 在重複荷重下破壞的實際例子 疲勞裂痕出現和擴展的程序	849
§ 242 實用應力的確定	854
§ 243 例題	861
§ 244 在重複應力及複雜受力狀態下之強度校核	867
§ 245 幾種防止疲勞破壞的實用方法	870
§ 246 關於材料對動荷重的抗力之問題的發展	875

第三十八章 材料的強度

§ 247 基本概念	881
§ 248 對塑性變形之抗力	882
§ 249 對破壞之抗力 斷裂和切斷	885
§ 250 強度理論	887
§ 251 廣義的馬爾強度理論	891
§ 252 達維特考夫-弗里特曼之聯合強度理論	894

第三十九章 蠕滑計算之基礎

§ 253 高溫對金屬的機械性質的影響	899
§ 254 蠕滑及鬆弛現象	900
§ 255 蠕滑及鬆弛曲線	902
§ 256 蠕滑計算之基礎	908
§ 257 蠕滑計算之例題	912

附錄(續上冊)

表5 工字形壓延斷面的屬性幾何特性

表6 槽形壓延斷面的屬性幾何特性

下冊第二分冊中俄名詞對照表

俄中名詞對照表

俄英中文度量衡單位符號對照表

俄中人名對照表

第十篇 荷重之動荷作用

第三十五章 慣性力與振動之計算

§ 215 結論

到現在為止只是在荷重的靜荷作用下我們解決了材料力學的基本問題，確定了結構部件的斷面尺寸以及選擇了這些部件的材料。

如在 § 2 內所述，當結構之一部份對另一部份傳遞壓力或在體積力的作用下這些部份之機械運動並不隨時間而改變時就是荷重的靜荷作用。在此情況下結構的每一構件在外力和應力之作用下處於平衡。

運動的不改變表示被研究之零件和這些零件的每一部份的速度沒有改變——這些構件的微小部份沒有加速度。而被研究的物體或與它鄰接的構件的微小部份有加速度時就已經表示荷重的動荷作用了。譬如，地對擋土牆的壓力就是靜荷重，因為牆和地都不運動——它們的速度不變並等於零。

同樣，被提升的荷重對吊索的作用在荷重之上升為等速度時也是靜荷作用。反之，如果荷重以加速度上升時則就為動荷作用了。蒸汽機和內燃機的連桿是承受着動荷重的，因為它們的各別的單元以變速度運動着。作為其他的對動荷重工作的結構的例子可以舉帶有對旋轉軸裝得偏心的旋轉部份的機器之基座——這些旋轉部份受到向心加速度，也可以舉蒸汽錘的桿和基座，因為當打擊時汽錘在極短的時間內失去速度，因之要給予它非常大的加速度。

從這些例子裏已經看到，在實際情形裏我們可以碰到被研究的部件或與該部件相鄰接的物體等的各種不同的加速度的形式；加速度可

以是在數值和方向上都是不變的，或僅只方向不變；也可以是符號變動的。

在變動的和符號變動的應力裏我們會遇到由於裂縫逐漸地擴展而破壞的現象——疲勞現象。在由於從相鄰零件對結構構件所傳遞的壓力而使其運動的速度急劇改變時，就是當發生撞擊現象時，在當靜荷重作用時是塑性的這種材料裏也可能顯現出脆性。所以在檢查受動荷作用時的結構零件之強度時就不但得研究這些荷重對零件內應力數值之影響，同時還要研究其對材料抵抗能力的影響。

結構零件上的各點的加速度對材料受力狀態之影響可以用下列方式來考慮。如果任何一物體以加速度運動着時，則這就意味着對該物體傳遞着（作用於該物體上）從其他物體傳過來的力（壓力）；按照作用與反作用恆等之定理，它也傳遞給這些物體相等於所作用的力而方向相反的反力，即所謂慣性力。這一說法也可以用於每一個以加速度運動着的物體的單元；這一單元將傳給材料的相鄰部份以等於這一單元的慣性力的內力。

如是，當結構部件作加速運動時，在其內部產生着附加的完全真實的應力，這些應力相當於由慣性力所引起的靜荷應力；從桿件之每一單元對材料的相鄰部份將傳遞着這樣的應力，彷彿對這一單元作用着相應的慣性力一樣。

由此得到用於求結構部件上之各點受加速度時在該部件內之應力的實用規則：必須計算這些加速度並以相應的慣性力附加於作用在被研究的結構構件的外力上。然後就像對桿件作用着靜荷重一樣地來進行計算。

這裏必須分開三種情形。如果作用於所研究的單元的外力之數值和分佈與該單元之變形無關，如果這些變形並不改變桿件運動的性質，

則其各點之加速度按剛體運動學的規則來計算，而動荷影響的考慮就變成爲相當於慣性力附加的靜荷重了。這一情形在大多數的實際的重要情況裏(除撞擊外)都會遇到。

如果在這一時候加速度將要變動，則照例將發生結構被研究部份之振動，這種振動在某種情況下會引起與變形和應力之急劇增加相聯系的共振現象。這種應力可以達到非常大的數值並將附加到以慣性力作爲靜荷重的方法所考慮的應力上去。

最後，可能會有這樣的情況(撞擊)，當加速度的數值，也就是說相應的慣性力的數值與被研究之構件的變形度有關時；在這種情況下，當計算慣性力時就須要利用材料抗力的資料了。

對於前面各種情形的強度校核方法將以例題來說明。

§ 216 在等加速運動時應力之計算

關於解決在動荷應力下強度檢驗之問題我們來從最簡單的情況開始，就是當被研究之結構部份之各點具有並不引起振動的不變的加速度；今取荷重 Q 之等加速提升作爲例子，該荷重掛在斷面面積爲 F 之鋼桿上；桿之材料的單位體積的重量等於 γ ；荷重以加速度 a cm/秒² 上升(圖 581)。試求在離開桿之下端距離爲 x 的任一斷面內的應力。將桿在該斷面處截開並觀察下面的截下部份。這一部份將以加速度 a 向上運動；就是說從桿之上部份對這一部份除了傳遞平衡其重量的力以外，還有方向向上的等於它的質量與加速度 a 之乘積的

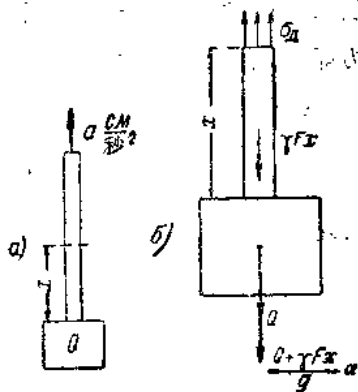


圖 581

力，即 $\frac{Q + \gamma Fx}{g} a$ ，式中 g 是重力加速度。

按照作用與反作用恆等的定理，從下部份對上部份也將傳遞着同樣的力，不過方向向下。如是，沿所截斷面而作用到下部份去的動荷應力 σ_n 將不僅要平衡靜荷重 $Q + \gamma Fx$ ，並且還要平衡附加力 $\frac{Q + \gamma Fx}{g} a$ ；要計算這些應力，必須觀察所截之下部份在 σ_n 靜荷重 $Q + \gamma Fx$ 及方向向下的慣性力 $\frac{Q + \gamma Fx}{g} a$ 等之作用下的平衡（圖 58J）。此時

$$\sigma_n = \frac{Q + \gamma Fx}{F} + \frac{Q + \gamma Fx}{gF} a = \frac{Q + \gamma Fx}{F} \left(1 + \frac{a}{g}\right);$$

分式 $\frac{Q + \gamma Fx}{F}$ 就是在所截斷面上的靜荷應力 σ_c ；所以

$$\sigma_n = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g}\right), \quad (35.1)$$

亦即動荷應力等於靜荷應力乘一係數 $1 + \frac{a}{g}$ 。這一數值叫做動荷係數 K_n ：

$$\sigma_n = K_n \sigma_c. \quad (35.2)$$

用於動荷應力的公式的這一形式說明了為什麼我們首先把注意力放在在荷重之靜荷作用下的應力的計算；在極大多數的情形裏，動荷應力都可以通過靜荷應力乘一動荷係數的方法來表示。

強度條件得到下面的形式：

$$\sigma_{n \max} = \sigma_{c \max} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = K_n \sigma_{c \max} \leq [\sigma].$$

由此得：

$$\sigma_{c \max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_n}. \quad (35.3)$$

如是，在許多情形裏，只要將實用應力用除法除以動荷係數 K_n 使其降低後就可以用靜荷計算來代替動荷計算。

處在這樣的情況下，就是當在計算時如果動荷係數在理論上的求法覺得困難時，那就不得不利用在實驗裏所得到的數值。例如就是這樣來考慮作用於橋樑的暫時荷重的動荷性。

§ 217 旋轉圓環(飛輪輪緣)的計算

現在來研究旋轉得很快的等斷面環(圖 582, a)的應力計算作為第二個例子。如果不考慮輻條的影響則飛輪的輪緣就是處在這種近似的情況下。

以 F 代表環之橫斷面面積；
 γ —材料單位體積之重量； n —單位時間內的轉數； ω —旋轉之角速度； D —環軸之直徑。

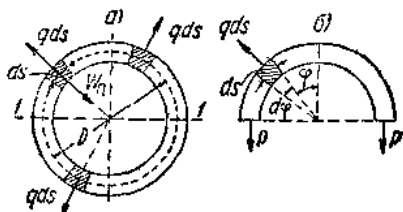


圖 582

截出長為 ds 之環的單元。在環旋轉時，這一單元以等角速度 ω 沿圓週運動着。角加速度 ε 等於零，所以單元之切線加速度等於 $w_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0$ ；而單元之輻向(向心的)加速度等於 $w_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ 及方向向着環心。欲計算應力 σ_n ，必須對所取之每一單元作用上它的慣性力。這力之方向向外並等於

$$w_n = \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = qds,$$

其中 q 是作用於輪緣的單位長度上的慣性力之密度。如是，在環內分佈着這樣的應力，彷彿該環在單位長度上受到密度為 q 的輻向荷重之作用(圖 582, b)。拉伸輪緣的力 P 等於(§ 20)：

$$P = \frac{Dq}{2}.$$

應力 σ_n 等於：

$$\sigma_a = \frac{P}{F} = \frac{Dg}{2F} = \frac{DF\gamma}{2qk'} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

其中 $v = \omega \frac{D}{2}$ 是環上各點的圓週速度。如是，在飛輪輪緣內的應力僅與材料單位體積之重量及輪緣各部份之線速度有關。為了體驗這些應力之數值有多少大，我們用下列數據來計算一下：

$$n = 360 \text{ 轉/每分}; \quad D = 4\text{m}; \quad \gamma = 7.5 \text{ g/cm}^3.$$

$$\text{每秒之角速度 } \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 12\pi; \text{ 應力等於:}$$

$$\sigma_a = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} = \frac{7.5 \cdot 144\pi^2 \cdot 16 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^8 \cdot 981} = 435 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 218 平行桿和連接桿內之應力

現在來檢查聯接機車二軸（圖 583）之平行桿 AB 的強度；從機車的機器傳遞旋轉力矩到主動軸 O_1 上。

在 A 和 B 兩點，平行桿藉柱形鉸之助連接在車輪上，距離 AO_2 和

BO_1 等於 r ，車輪直徑為 D ，平行桿之長為 l ，機車以等速度 v 運動着。

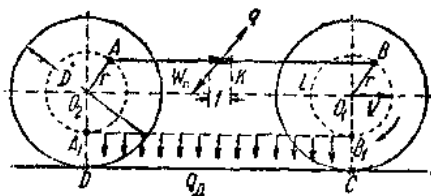


圖 583

因為平行桿運動着，所以在對它作強度校核時首先必須確定該運動是否有加速度，亦

即解決一個純粹運動學的問題。平行桿本身與機車之間有相對運動，並與它一起以速度 v 作牽連運動。

因為牽連運動是等速度的前進運動，所以加速度只會在相對運動裏才有。因為在這一運動裏平行桿之二點 A 和 B 是相同地運動着，它們在同一平面內畫着半徑為 r 的圓周，所以這一運動是平面的和前進

的運動，因之，所有平行桿之各點和點 A 及 B 一樣有着同樣的速度和加速度。

點 A 與第二個輪子一起運動着，同時畫着半徑為 r 的圓週。在機車等速運動時，輪子旋轉的角速度 ω 也是不變的，即角加速度等於零，而因之，點 A 之切線加速度也等於零，即 $w_t = 0$ ；剩下的是方向由 A 向 O_2 並等於 $\omega^2 r$ 之向心加速度 w_n 。平行桿之任一點，例如 K ，也受到相同的加速度，其方向平行於 $O_2 A$ 。

欲校核平行桿之強度必須在它自身重量上再加上以慣性力作為荷重的荷重。在平行桿之每一單位長度上將作用着慣性力

$$q = \frac{1 \cdot F \cdot \gamma}{g} w_n = \frac{F \gamma}{g} \omega^2 r;$$

這一慣性力的方向與加速度的方向相反並與半徑 $O_2 A$ 平行。

在圖中所示的平行桿的位置下，它自身的重量引起與由慣性力所引起的彎曲之方向相反的彎曲。平行桿最危險的位置是最下面的位置 $A_1 B_1$ ，這時二種荷重作用在同一方向上。此時在平行桿之單位長度上所作用的總荷重 q_A 將等於：

$$q_A = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r = \gamma F \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

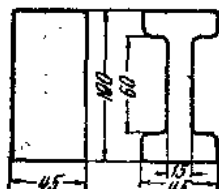


圖 584

須要把平行桿看作像鉸支於 A, B 二點並受均佈荷重 q_A 之作用的樑一樣。最大彎矩在跨度中央：

$$M_{\max} = \frac{q_A l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

在這一斷面上之最大應力

$$\sigma_{A \max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W} \frac{\gamma l^2}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

例 184. 以下列數據來研究平行桿之二種橫斷面：(a) 長方形斷面，(b) 工字斷面（圖 584）：

$$\omega = 30 \text{ 1/秒}, \gamma = 7.86 \text{ g/cm}^3, r = 50 \text{ cm 及 } l = 150 \text{ cm}。$$

在此情況下

$$\frac{\gamma l^3}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right] = \frac{0.00786 \cdot 150^3}{8} \left[1 + \frac{50 \cdot 30^2}{9.81} \right] = 1036 \text{ kg/cm}。$$

對於長方形斷面：

$$F = 10 \cdot 4.5 = 45 \text{ cm}^2, \quad W = \frac{4.5 \cdot 10^3}{6} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{F}{W} = \frac{45}{75} = 0.6 \text{ 1/cm 及 } \sigma_{R \max} = 0.6 \cdot 1036 = 622 \text{ kg/cm}^2。$$

對於工字斷面：

$$F = 10 \cdot 4.5 - 2 \cdot 6 \cdot 1.5 = 27 \text{ cm}^2, \quad W = \frac{4.5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 1.5 \cdot 6^3}{12 \cdot 5} = 64.2 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{F}{W} = \frac{27}{64.2} = 0.42 \text{ 1/cm 及 } \sigma_{R \max} = 0.42 \cdot 1036 = 435 \text{ kg/cm}^2。$$

如是，雖然斷面的斷面係數減少（差不多 15%）了，但由於平行桿重量的顯著減少，所以在第二種情形裏，最大應力還是減少了幾乎三分之一。

除了彎曲以外平行桿還受到將輪 O_1 之旋轉傳到輪 O_2 去的力 P 之作用而產生的壓縮或拉伸。在 A_1B_1 位置時，平行桿受壓縮。此時，如果不計撓度對彎矩值之影響，就得到強度條件：

$$\sigma_{\max} = \left\{ \frac{P}{F} + \frac{\gamma F l^3}{8W} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right] \right\} \leq [\sigma]。$$

除了強度校核外，平行桿還應該作穩定之校核，像對一個兩端鉸支的桿件而校核其在荷重 q_R 所產生的彎曲平面內的穩定，以及像對兩端固定之桿件而校核其在垂直平面內之穩定。在第一種情形裏在計算柔度時應該用最大的慣性半徑，而在第二種情形裏則用最小的慣性半徑。

同樣的辦法也可以用來計算連接桿 AB ，該連接桿在 A 點與以角速度 ω 繞 O 點旋轉的曲拐相連接（圖 585）。在曲拐以等角速度旋轉時，連接桿之 A 點只受到一向心加速度，而 B 點只受到一切線加速度。連接桿上所有位在 A 點和 B 點之間的各點兩種加速度都有。在這裏

若限於考慮僅由於向心加速度而產生在連接桿內的慣性力時，我們可以來研究這樣的一個位置就是連接桿與曲拐垂直時的位置，此時 A 點的向心加速度的方向與連接桿之中心軸垂直。我們假設

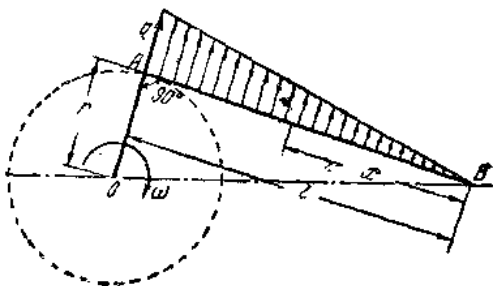


圖 585

離心慣性力 q 到處都與連接桿之中心軸垂直並按照直線規則隨長度從 A 點之 $q=q_0$ 改變到 B 點之 $q=0$ 。這一假設當連接桿之長度與曲拐之長度相比越大時則越接近於真實情況。連接桿將看作像放置在 A 及 B 二鉸座上的樑 AB 一樣。當 $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ (x 從 B 點開始算起) 時彎矩達到最大值，等於(參閱 § 73)：

$$M_{\max} = -\frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}。$$

因為 $q_0 = \frac{F \cdot \gamma \cdot 1}{g} \omega^2 r$ 及 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$ ，所以

$$\sigma_{\max} = -\frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3} W} = -\frac{F \gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3} W g}。$$

§ 219 等厚之旋轉圓盤

關於快速旋轉之軸和圓盤的應力和變形是一個極有興趣的問題。蒸汽渦輪軸旋轉之高速度伴隨着在軸和圓盤內之非常大的離心力之出現。由這些離心力所引起的應力對圓盤之旋轉軸對稱地分佈着。

現在來研究一個關於計算等厚圓盤之最簡單的問題。這種圓盤的計算奠定了計算任何形狀之圓盤的某些近似方法的基礎。將應用在推求厚壁圓筒 (§ 197) 之公式時所得到的某些結果。假設沿圓盤的厚度上(採用單位厚度)，其應力 σ_r 和 σ_z 不改變；軸向應力 σ_z 將認為等於零。

立出以二個子午斷面和二個同心圓柱體表面在圓盤上截取之單元 AB 的平衡條件(圖

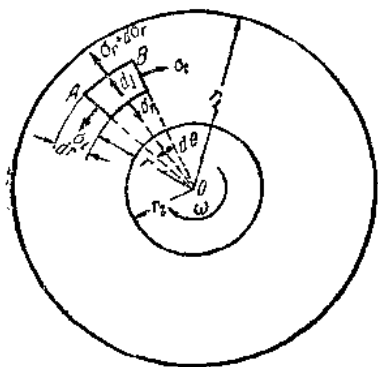


圖 586

586)。在此情況下，除了作用在單元 AB 側面上的力以外還須注意到慣性力

$$dj = \omega^2 r \frac{\gamma r \cdot 1 \cdot dr d\theta}{g},$$

其方向由圓心沿半徑指向圓盤之外緣。代替在 § 197 裏所推出來的方程式 (82.1) 可得：

$$\sigma_r - \sigma_t + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = 0. \quad (35.4)$$

在該節裏的方程式 (32.1) (變形協調條件) 在這一問題上仍舊有效，即

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\mu}{r} (\sigma_r - \sigma_t). \quad (35.5)$$

將從 (35.4) 裏得到的差值 $\sigma_r - \sigma_t$ 代到這一方程式裏之後便得：

$$\frac{d\sigma_t}{dr} = - \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1+\mu}{g} \gamma \omega^2 r. \quad (35.6)$$

將方程 (35.4) 對 r 微分並將由公式 (35.6) 裏所得到的值來代替 $\frac{d\sigma_t}{dr}$ 去代入後就得一線性微分方程式

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{3+\mu}{g} \gamma \omega^2 r = 0$$

或

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) \right] + \frac{3+\mu}{g} \gamma \omega^2 r = 0.$$

將此方程積分，就得：

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r^2. \quad (35.7)$$

從 (35.4) 和 (35.7) 得出

$$\sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8g} \gamma \omega^2 r^2. \quad (35.8)$$

在公式 (35.7) 和 (35.8) 裏 A 和 B 是積分常數，它們可以從圓盤週邊之條件求得。在求這二個常數時可研究二種情況：(1) 在中心有孔之圓盤，(2) 實體圓盤。這裏首先我們將假設圓盤週邊上是沒有外力的。

對於有中心孔之圓盤，應力 σ_r 在當 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 時 (圖 586) 都應該等於零。週邊上的這些條件當把它們代入公式 (35.7) 後就引導出下面的方程式：

$$A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_2^2 = 0$$

及

$$A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = 0,$$

由此
$$A = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 (r_1^2 + r_2^2), \quad B = -\frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 r_2^2.$$

將 A 和 B 之值代入公式 (35.7) 及 (35.8) 裏後, 可得:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right)$$

和
$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left[(3+\mu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu) r^2 \right].$$

爲了簡單起見令 $\frac{r_2}{r_1} = \alpha, \quad \frac{r}{r_1} = \rho, \quad \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = p$ 及 $\frac{1+3\mu}{3+\mu} = m,$

就可以寫成

$$\sigma_r = p \left[1 + \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right] \quad (35.9)$$

和

$$\sigma_t = p \left[1 + \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m \rho^2 \right]. \quad (35.10)$$

我們可以看到當 $\rho=1$ 及 $\rho=\alpha$ 時, 即在圓盤之內邊緣和外邊緣上, 應力 σ_r 變成零; 當 ρ 在 1 和 α 之間時應力 σ_r 爲正, 同時也不難看到當 $\rho = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$ 時達到最大值。此時

$$(\sigma_r)_{\max} = p(1-\alpha)^2. \quad (35.11)$$

應力 σ_t 在任何 ρ 值下也都是正的, 而在 $\rho=\alpha$ 的圓盤之內沿達到最大值:

$$(\sigma_t)_{\max} = p[2 + (1-m)\alpha^2]. \quad (35.12)$$

將 (35.11) 和 (35.12) 比較一下, 可看出 $(\sigma_t)_{\max}$ 永遠大於 $(\sigma_r)_{\max}$ 。所以在校核圓盤之強度時, 不論根據最大切應力理論也好或者根據能量理論也好強度條件都應該寫成這樣:

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 [2 + (1-m)\alpha^2] \leq [\sigma]. \quad (35.13)$$

在圖 587 上繪着在 $\mu=0.3$ 時對於從 0 到 1 之不同 α 值的 $\sigma_t^0 = \frac{\sigma_t}{p}$ 值沿圓盤半徑改變之曲線。在該圖上也繪着當 $\alpha=0.2$ 時的 $\sigma_r^0 = \frac{\sigma_r}{p}$ 的曲線。可以看到, 應力 σ_t (35.12) 之最大值 (在圓盤之內沿) 在圓孔半徑 (即 α 之值) 改變時很少變動 (曲線 ab)。當 $\alpha \approx 0$ 時, 即中心圓孔之半徑非常小時, 在圓孔之邊沿發生應力 σ_t 之急劇變化——應力集中 (曲線 acd)。此時

$$(\sigma_t)_{\max} = 2p = \frac{3+\mu}{4g} \gamma \omega^2 r_1^2. \quad (35.14)$$

對於非常薄的圓環, 當 $r_1 \approx r_2$ 及 $\alpha \approx 1$ 時,

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 r_1^2}{g}, \quad (35.15)$$

這正與 § 217 裏的結論吻合。在此情況下, 最大應力 σ_t (35.15) 比具有非常小之圓孔的