向量和空间解析几何初步

吕学礼 张爱和 郭思旭 著

人民教育出版社

向量和空间解析几何初步

吕学礼　张爱和　郭思旭　著

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

向量和空间解析几何初步/吕学礼，张爱和，郭思旭
编著. —北京：人民教育出版社，2002
ISBN 7-107-15158-4

Ⅰ. 向...
Ⅱ. ①吕... ②张... ③郭...
Ⅲ. ①向量（数学）—高中—课外读物②空间几何：解析几何—高中—课外读物
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 006266 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http：//www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：4.75　字数：120 千字
定价：9.20 元

前 言

吕学礼先生曾设想写一本“三度向量和立体解析几何初步”的小册子，目的是“使中学生在学过平面解析几何与二维向量的基础上进一步开拓眼界，并为以后学习偏导数及重积分等预先作好一些准备”．在此设想下，构建了这本小册子大致的结构和框架，并撰写了第一章“空间点的直角坐标”和第二章“空间直线的方向余弦与方向数”的初稿．

吕学礼先生不幸于1995年去世．为了完成吕先生的遗愿，人民教育出版社和汪娟华女士委托我们二人完成这项工作，在本书完稿时汪娟华女士也已不幸去世．本书的出版是对吕学礼先生的怀念，同时也是完成汪娟华女士的遗愿．

由于吕先生设想的这本小册子的出版是在20世纪的70年代末或80年代初，现在已进入21世纪，中学的教学情况发生了变化．为了适应减轻学生负担，进行素质教育的要求，我们对吕先生的设想和小册子的结构及框架作了调整．

调整后的小册子，未改变吕先生为中学生编写一本课外读物的目的，即为了扩大中学生的知识面，并为进入大学的学习作一些准备的设想，但在内容和结构上作了较大的变动．把原来的重点放在立体解析几何上改为放在向量的概念和向量的运算上，而立体解析几何的内容则是侧重于应用向量运算来研究空间的平面和直线；在编写思想上，试图改变一切都在笛卡儿直角坐标系下进行运算的思

想，努力运用脱离坐标的向量运算，而建立坐标系仅是作为向量运算坐标表示的一种方法；此外，增加了一个附录（附录Ⅰ）：关于大学中与向量有关的课程简介，其目的是使中学生了解向量的后续课程及应用，并不要求看懂它．只要求知道就可以了.

感谢人民教育出版社和汪娟华女士给我们二人写作此书的机会．由于我们二人的学识水平有限，不足之处在所难免，敬请各位老师及读者不吝指正.

张爱和　郭思旭

2001年元月

目 录

第一章 向 量

§1.1 向量的概念

什么是向量

在物理中碰到许多的量，如长度，质量，温度，面积，体积，功，能量等，这些量，只要它的单位选定后，用一个数值就可完全确定. 这样的量称为**标量**.

在物理中还有许多的量，如力，位移，速度，加速度，电场强度，磁场强度等，当它们的单位选定后，用一个数值可以决定它们的大小，但不能完全确定这样的量.

例如，一物体 A，受一力 $\boldsymbol{F}$ 的作用（图 1－1）. 这里仅知道力 $\boldsymbol{F}$ 的大小是不够的，还要知道力 $\boldsymbol{F}$ 是怎样作用于物体 A 的. 因为物体 A 受不同方向的力的作用，其结果是不同的. 从图 1－1 中看，同样大小的力，从左边作用，A 就向右移动；从下边作用，A 就向上移动. 因此，对力来讲，仅知道它的大小是不够的，还必须知道它的方向.

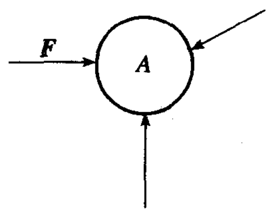


图 1－1

在物理课本中有这样的实验（图 1－2），圆盘在力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 的作用下处于平衡状态. 这四个力的力矩分别为 M_1、M_2、M_3、M_4. 使圆盘向顺时针方向转动的力矩，与使圆盘向逆时针方向转动的力矩是相等的. 即有

$$M_1+M_2=M_3+M_4.$$

就是说力矩也是有方向的. M_1、M_2 使圆盘向顺时针方向转动，而 M_3、M_4 使圆盘向反时针方向转动.

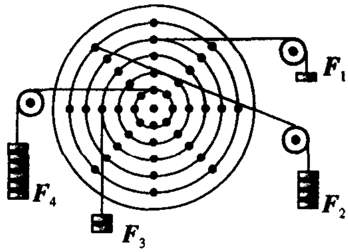


图 1－2

在物理中学到的电场强度，比如一个正电荷 Q 产生的电场，设在点 A 的点电荷 $+q$ 受到这个电场的作用力为 $\boldsymbol{F}$，它的大小为 F，在点 A 的电场强度 $\boldsymbol{E}$，它的大小 E 是 F 与 q 的比值，即

$$E=\frac{F}{q}.$$

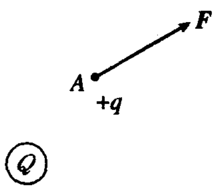


图 1－3

点 A 的电场强度除了大小外，还有方向，它的方向就是力 $\boldsymbol{F}$ 的方向.

除以上的例子外，还可举出许多具有方向的量. 因此，有必要对这样既有大小、又有方向的量的共同性质进行研究. 我们把这样的量统称为向量.

定义 既有大小又有方向的量称为**向量**，也称为**矢量**.

向量的几何表示

为了进一步研究向量，在几何上用线段 AB 的端点 B 处加上一个箭头的有向线段来表示向量. 取一单位长度表示该量的单位后，有向线段的长就表示该向量的大小，而有向线段的方向就是该向量的方向，并记为 $\overrightarrow{AB}$，有时也常用一个黑体大写字母 $\boldsymbol{F}$，或黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，…来表示. A 称为向量 $\overrightarrow{AB}$（或向量 $\boldsymbol{a}$）的始点（或起点），B 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点；向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小记为 $|\overrightarrow{AB}|$

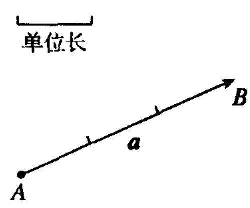


图 1－4

（或 $|\boldsymbol{a}|$），$|\overrightarrow{AB}|$ 称为向量$\overrightarrow{AB}$的模.

例如，设有大小为 5 N（牛顿）的力 $\boldsymbol{F}$，先取一个线段 AB，表示力的单位 1 N，然后取带箭头的有向线段$\overrightarrow{CD}$，CD 的长为 $5AB$，其方向为 $\boldsymbol{F}$ 的方向．这样，力 $\boldsymbol{F}$ 就用$\overrightarrow{CD}$来表示.

在实际中碰到的向量，有下列几种类型：

有的向量具有固定的位置，即具有固定始点和终点的向量．例如作用在有些物体某一点的力，作用点不同，它的效果是不一样的，这样的向量称为固定向量．有的向量，它的始点在与它有相同方向的直线上任何一点时，它的效果是相同的，这样的向量称为滑动向量．还有一种向量，仅需考虑它的大小和方向，无固定的始点，这种向量称为自由向量.

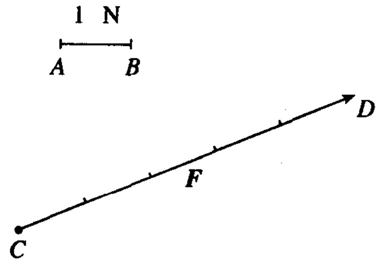


图 1-5

我们在一般情况下考虑的都是自由向量，如要固定它的始点时，都作说明.

向量的相等

定义 具有相同的方向和模的向量称为相等的向量.

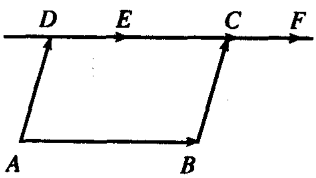


图 1-6

设有平行四边形 $ABCD$（图 1-6），向量$\overrightarrow{AB}$可平行移动到$\overrightarrow{DC}$，我们称$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DC}$具有相同的方向．不仅$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{AB}$具有相同方向，在 DC 直线上的任何与$\overrightarrow{DC}$方向相同的向量，如$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DF}$都称为与$\overrightarrow{AB}$有相同方向的向量．由于$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{AB}$不仅方向相同，而且模也相等，

即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，根据定义，此时称$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$为相等的向量，记为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

由此，我们把向量经过平行移动后所得到的向量都看作为与原向量是同一个向量. 如图 1－6 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，它的意思是说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，或 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反.

反向量

定义 模相等方向相反的两个向量称互为反向量.

图 1－6 中，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$，有相等的模，但方向相反，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$就互为反向量，记为$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量也记为$-\boldsymbol{a}$.

单位向量

定义 模为 1 的向量称为单位向量.

零向量

定义 模为零的向量称为零向量.

零向量的引进完全是进行向量运算的需要. 零向量是向量中唯一的方向不确定的向量，是始点与终点为同一点的向量. 为区别于数值 0，我们用黑体的阿拉伯数字 $\mathbf{0}$ 表示.

例 1 设有正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（图 1－7），在它的各个边和棱中，以一个顶点为始点，另一个顶点为终点所得的向量中，不相等的向量共有几个？

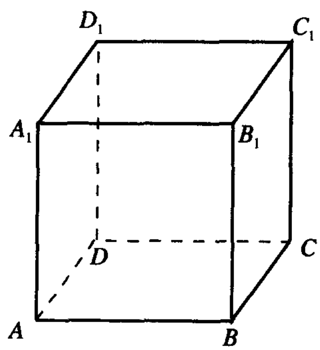


图 1－7

解 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各

棱和边的向量有：

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$，以及它们的反向量$-\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{BA}$，$-\overrightarrow{BC}$或$\overrightarrow{CB}$，$-\overrightarrow{CD}$或$\overrightarrow{DC}$，$-\overrightarrow{DA}$或$\overrightarrow{AD}$；

$\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{CC_1}$，$\overrightarrow{DD_1}$以及它们的反向量；

$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{C_1D_1}$，$\overrightarrow{D_1A_1}$以及它们的反向量.

由于

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DD_1},$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD},$$

所以，不相等的向量为

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{AA_1}$$

以及它们的反向量

$$\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{A_1A},$$

共有 6 个不相等的向量.

例 2 在直角三角形 ABC（图 1－8）中，已知 $AB=3$，$AC=4$，求向量$\overrightarrow{BC}$及它的反向量$\overrightarrow{CB}$的模.

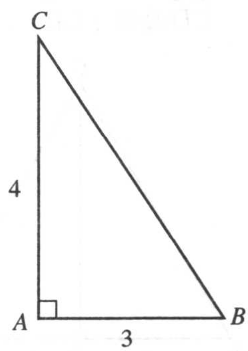


图 1－8

解 由于 $AB=3$，$AC=4$，从而有

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

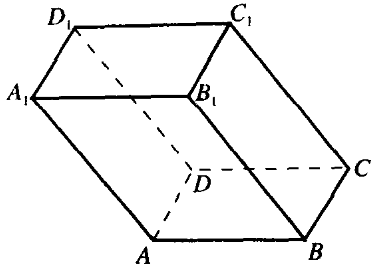
因此，有

$$|\overrightarrow{BC}|=5,\quad |-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CB}|=5.$$

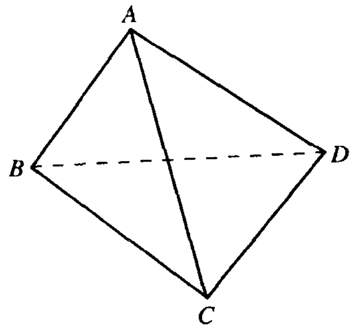
习题 1.1

1. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中写出各个棱和边的以一个

顶点为始点另一个顶点为终点的所有向量，它们之中有几个不相等的向量？



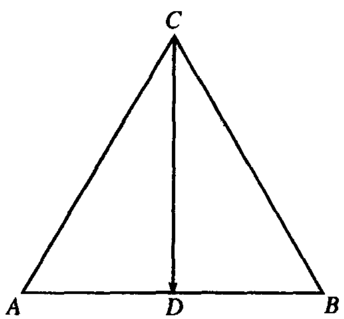
（第 1 题）



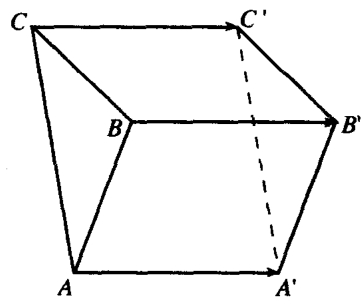
（第 2 题）

2. 在正四面体 $ABCD$ 中，对其所有的棱写出以一个顶点为始点，另一个顶点为终点的所有的向量. 这些向量中有没有相等的向量？

3. 在正三角形 ABC 中，其边长 $AB=3$. 求 AB 边上的中线向量 $\overrightarrow{CD}$ 的模 $|\overrightarrow{CD}|$.



（第 3 题）



（第 4 题）

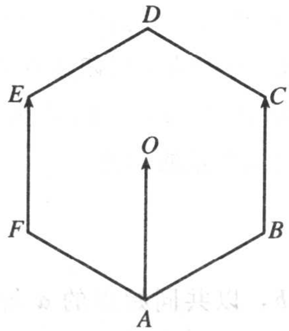
4. 设在空间中有$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$，满足条件$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

求证：(1) $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$；

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$.

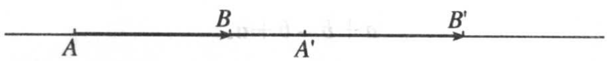
5. 正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O，求证：

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}.$$



（第 5 题）

6. 设一直线上有点 A、A'、B、B'，并且有 $AA'=BB'$，求证：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.



（第 6 题）

§1.2　向量的加法和减法

在物理中有个实验，见图 1－9，用力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 将重物 G 挂起来使其达到平衡．对同一个重物 G 也可以用力 $\boldsymbol{F}$ 将它挂起来使其达

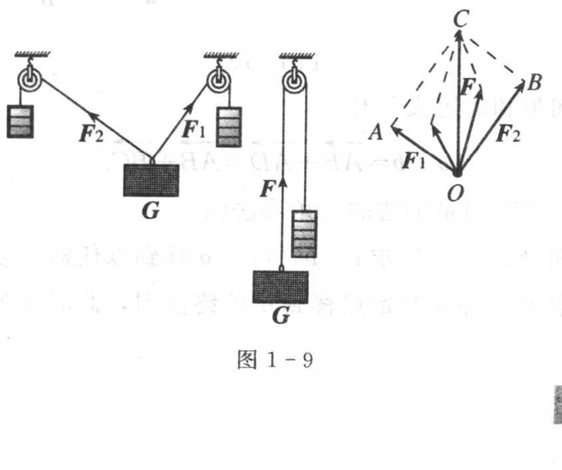


图 1－9

到平衡. 将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}$ 平行移动到同一个始点 O，我们发现，$\boldsymbol{F}$ 的终点正好是以 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 为边的平行四边形的另一个顶点. 在物理上，称 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的分解，或分力.

由此，我们可以定义向量的加法.

向量的加法

定义 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，以共同始点的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边组成平行四边形，以共同始点为始点的平行四边形对角线向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1－10）.

由定义可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的次序无关，即有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

这样由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 叫做向量加法的平行四边形法则.

在平行四边形 $ABCD$（图 1－10）中，根据向量相等的定义，有

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},$$

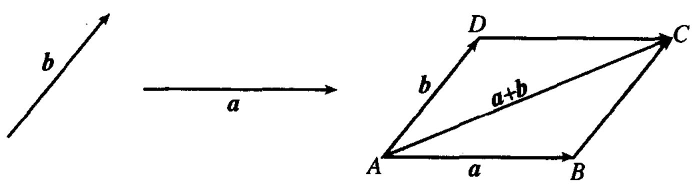


图 1－10

根据两个向量和的定义，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

因此，又有向量加法的三角形法则：

设有向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，欲求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，可将 $\boldsymbol{a}$ 移到以任何一点 O 为始点，得 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B，将 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B，此时 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 C，以 $\boldsymbol{a}$ 的始点 O 为始点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 C 为终点的向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

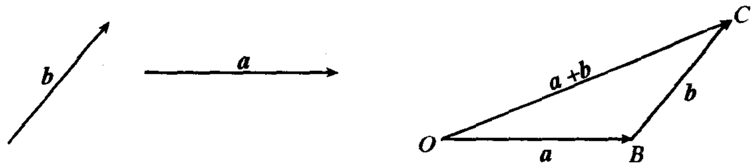


图 1－11

由于平行四边形的对边平行且相等，这两个法则所得的结果是相同的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，例如 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{b}$ 的始点与终点重合. 在图 1－11 中就有 C 与 B 重合，此时有$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，即有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}.$$

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，那么有 O、B、C 在同一直线上（图 1－12），此时有

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

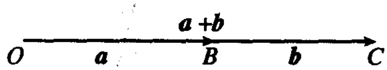


图 1－12

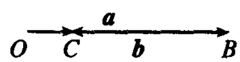


图 1－13

且有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反（图 1－13），那么有

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|;$$

若 $|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$（图 1－14），则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且

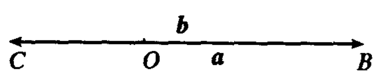


图 1－14

$$|a+b|=|b|-|a|.$$

把以上几种情况合起来，即有，若 $a /\!/ b$，则和向量 $a+b$ 有如下情况：

①若 a、b 同向，$a+b$ 方向与 a、b 方向一致，且 $|a+b|=|a|+|b|$；

②若 a、b 方向相反，且 $|a|>|b|$，则 $a+b$ 与 a 同向，且 $|a+b|=|a|-|b|$；

③若 a、b 方向相反，且 $|a|<|b|$，则 $a+b$ 与 b 同向，且 $|a+b|=|b|-|a|$.

若三个向量 a、b、c 相加，就可以 a 的终点为 b 的始点，以 b 的终点为 c 的始点，最后以 a 的始点为始点，以 c 的终点为终点的向量就是 $a+b+c$（图 1-15).

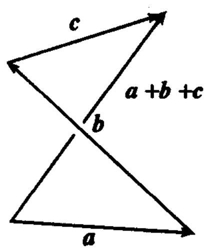


图 1-15

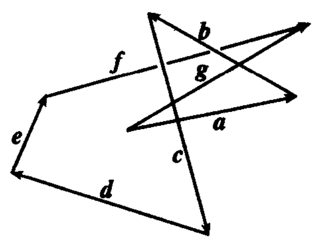


图 1-16

对多个向量相加，也可用同样方法得到（图 1-16）：

$$a+b+c+d+e+f=g.$$

定理 三个向量 a、b、c，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

证明 见图 1-17，设 $a=\overrightarrow{OB}, b=\overrightarrow{BC}, c=\overrightarrow{CD}$.

于是

$$a+b=\overrightarrow{OC}, b+c=\overrightarrow{BD},$$

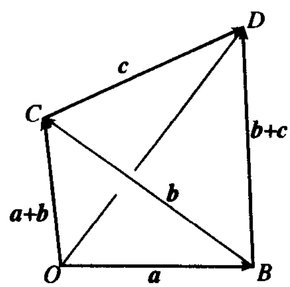


图 1-17