大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

线性代数
课程学习及考研辅导

徐仲 主编

- 知识要点
- 例题精讲
- 考点研究
- 强化训练

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学课程辅导与应试系列丛书

线性代数
课程学习及考研辅导

徐 仲 主编
张凯院 陆 全 冷国伟 吕全义 编

天津大学出版社

内容提要

本书分六章，包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型．同时，将线性代数的主要内容按知识点分类，归纳出有代表性的一些小专题，通过对大量典型例题进行分析和求解，揭示了线性代数的解题方法和技巧，使学生可以举一反三，通过阅读与练习提高运算能力，增强分析问题、解决问题和应试的能力．

本书可作为理工科及经济学科的大学生学习线性代数的指导书，可供报考硕士研究生的读者复习应考之用，也可供有关的教师及科技工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数课程学习及考研辅导/徐仲主编．—天津：天津大学出版社，2003.10

ISBN 7-5618-1853-X

Ⅰ.线…　Ⅱ.徐…　Ⅲ.线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 096304 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
网　　址　www.tjup.com
电　　话　营销部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　170mm × 240mm
印　　张　14
字　　数　424 千
版　　次　2003 年 10 月第 1 版
印　　次　2003 年 10 月第 1 次
印　　数　1－3 000
定　　价　18.00 元

大学课程辅导与应试系列丛书
编纂指导委员会

（按姓氏笔画排列）

前　　言

线性代数是高等院校理工科及经济学科的一门重要基础课,也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门主要课程.这门课程不仅是学习后续课程的基础,也是在各个学科领域进行理论研究和实践工作的必要基础,而且对培养学生抽象思维和逻辑推理能力、综合分析和解决问题的能力以及运算能力都起着重要的作用.

为了帮助学生学好线性代数课程,加深对所学内容的理解和掌握,提高其综合运用知识解决实际问题的能力以及帮助学生有效地备考,我们结合多年来的教学经验和考研辅导反馈的信息编写了本书.

本书按教育部制定的《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)中有关线性代数的要求顺序按章编写,包括:行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型共六章.每一章由以下五部分内容组成.

一、知识要点.将主要概念和结论进行了简明扼要的叙述和归纳,许多内容通过图表形式直观而醒目地给出.概括了本章的知识结构网络,指出了重点与难点.

二、例题精讲.根据线性代数各部分内容的知识点归纳出一些小专题,系统讲述了求解方法,并通过对典型例题的分析、解答及说明,揭示了线性代数的解题方法和技巧,贯穿了知识结构的前后呼应,使学生可以举一反三,取得事半功倍的效果.

三、考点研究.根据《数学考试大纲》列出了相应章节的考试内容与考试要求,通过图表列出了1987年至2002年硕士研究生入学考试数学(一、二、三、四)中线性代数部分的考点及分值,并进行了考点分析,以帮助学生在学习过程中少走弯路.还汇集了历年考研线性代数试题,并给出了相应的解答.

四、强化训练.根据课程考试和考研内容,精选了难度适中的一些题目,以巩固加深学生对基本概念的理解,增强解决问题的能力.

五、点拨与答案.给出了强化训练部分的习题的题解及提示,使学生可以检验对所学知识的掌握程度.

为了让学生了解硕士研究生入学考试数学试题中线性代数所占的比例及试题类型、深度及广度,本书在例题精讲及强化训练中编入了大部分工学类考研(数学(一)、(二))的线性代数试题,而在历年试题研读中给出了经济类考研(数学(三)(四))的全部线性代数试题,这些试题采用“年份—题类—分数”标

识,如98—3—08表示1998年研究生入学数学(三)的考题,且该题在卷面上所占分数为8分.

本书由徐仲主编,参加编写的还有西北工业大学的张凯院、陆全、冷国伟、吕全义.

对于书中的不妥或疏漏之处,敬请读者指正.

编者

2003年8月

目　录

第一章 行 列 式

一、知识要点

1.基本概念

(1)由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 构成的一个有序数组 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 称为一个 n **阶排列**.

(2)在一个排列中若一个较大的数排在一个较小的数左边,就称这两个数构成一个**逆序**.

(3)一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中所有逆序的总和称为这个排列的**逆序数**,记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$;逆序数为奇(偶)数的排列称为**奇(偶)排列**.

(4)n **阶行列式**定义为

$$D(\text{或 } D_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中元素第 2 下标(列下标)的全体 n 阶排列求和,共有 $n!$ 项.

(5)行列式的行列互换所得的行列式称为原行列式的**转置行列式**,记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{的转置行列式为 } D^{\mathrm{T}}(\text{或 } D')=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6)将 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划掉,剩余的元素按原位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij};而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

2.重要结论与公式

1)排列的性质

性质 1	交换排列中某两个的位置得到新的排列,这一变换称为**对换**.对换改变排列的奇偶性.
性质 2	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 个不同的 n 级排列,其中奇、偶排列的个数各占 $\frac{n!}{2}$.
性质 3	任一 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与标准排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,且所做对换的次数与排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

2)对角线法则

对于 2 阶与 3 阶行列式,可以采用对角线法则来记它所代表的数:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\underline{a_{11}a_{22}}-\underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

即实线上 2 个(3 个)元素的乘积取正号,虚线上 2 个(3 个)元素的乘积取负号,再求其代数和就是行列式的值.

注 计算 3 阶以上的行列式时不能采用对角线法则.

3)一些特殊行列式

(1)	上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$
(2)	次三角行列式的值是次对角线元素的乘积并添加适当符号,即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$
(3)	分块三角行列式化为低阶行列式的乘积 $\left\vert\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right\vert = \left\vert\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right\vert = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ $\left\vert\begin{array}{ccc:ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ \hdashline b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{array}\right\vert = \left\vert\begin{array}{ccc:ccc} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ \hdashline b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right\vert = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$
(4)	范德蒙德(Vandermonde)行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) = \begin{matrix} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ \times (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \\ \times \cdots \\ \times (x_n - x_{n-1}) \end{matrix}$

4)行列式的性质

性质 1	行列式与其转置行列式的值相等
性质 2	两行(列)互换位置,行列式的值变号
推论	两行(列)相同,行列式的值为零
性质 3	某行(列)的公因子可以提到行列式符号外
推论	某行(列)元素全为零,行列式的值为零
性质 4	两行(列)对应元素成比例,行列式的值为零
性质 5	某行(列)的所有元素是两个数的和,则行列式可以写成两个行列式之和,这两个行列式相应行(列)的元素分别为两个加数之一,其余行(列)元素与原行列式相同
性质 6	某行(列)各元素加上另一行(列)对应元素的倍数,行列式的值不变

注 交换行列式的第 i 行和第 j 行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;交换第 i 列和第 j 列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$. 行列式第 i 行提出公因子 k 记为 $r_i \div k$;第 i 列提出公因子 k 记为 $c_i \div k$. 行列式第 i 行加上第 j 行的 k 倍记为 $r_i + kr_j$;第 i 列加上第 j 列的 k 倍记为 $c_i + kc_j$.

5)行列式按行(列)展开定理

定理 行列式的值等于它的某一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

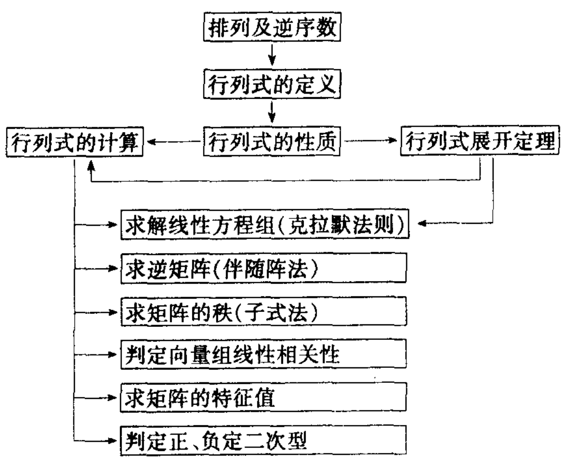
其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 行列式中某一行(列)的每个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

3.知识网络图



4.重点与难点

会应用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式是本章的重点.要求熟练正确地计算3阶、4阶行列式,也要会计算一些简单的 n 阶行列式的值.

掌握计算行列式的方法和技巧是本章的难点.行列式计算的方法较多,技巧性较强,要掌握得较好,首先必须具体地分析所求行列式的特点、元素的规律性,针对其特征采用适当的方法;其次是要不断总结、积累经验,且应不断提高运算能力.

二、例题精讲

1.逆序数与行列式定义

行列式的定义对初学者来说是一个难点,但考试大纲要求并不高,只要"了解"即可.对于用逆序数给出的行列式的定义,应抓住如下四条:

(1) n 阶排列的总数是 $n!$ 个,故 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项;

(2)每项是取自不同行,不同列的 n 个元素的乘积;

(3)在行下标按自然顺序排列的前提下,每项前面的正负号取决于列下标组成的排列的逆序数的奇偶性,其中一半取正号另一半取负号;

(4)行列式的值是一个数.

例1.1 求 $2n$ 阶排列 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 的逆序数.

分析 在求排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数时,可以从第2个数开始,依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数) τ_i,则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n$.

解 可看出,该排列的前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 之间也不构成逆序,只有前后 n 个数之间才构成逆序,因此排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n+\tau_{n+1}+\tau_{n+2}+\cdots+\tau_{2n}\\&=0+0+\cdots+0+0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

例1.2 如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 I,求排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数.

分析 如果设原排列中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 τ_1,则比 j_1 小的数的个数为 $(n-1)-\tau_1$,于是新排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 $(n-1)-\tau_1$;同理,设原排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 τ_2,则比 j_2 小的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$,则新排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$;依次类推,设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k,则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k)-\tau_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

解 设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k,则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k)-\tau_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$.因为 $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=I$,所以排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=\sum_{k=1}^{n}[(n-k)-\tau_k]=[(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0]-(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-I\end{aligned}$$

例1.3 写出5阶行列式中含有因子 $a_{13}a_{32}$ 并带正号的所有项.

分析 应先找出5阶行列式中含有 $a_{13}a_{32}$ 的不同行列的5个元素乘积项,再根据逆序数的正负确定所求的项.

解 5阶行列式中含有 $a_{13}a_{32}$ 的项为

$$(-1)^{\tau(3j_2 2 j_4 j_5)} a_{13} a_{2j_2} a_{32} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

其中 $j_2 j_4 j_5$ 是 1,4,5 这三个数构成的全排列,相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(31245)} a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} a_{55} = a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} a_{55}$$
$$(-1)^{\tau(31254)} a_{13} a_{21} a_{32} a_{45} a_{54} = -a_{13} a_{21} a_{32} a_{45} a_{54}$$
$$(-1)^{\tau(34215)} a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} a_{55} = -a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} a_{55}$$
$$(-1)^{\tau(34251)} a_{13} a_{24} a_{32} a_{45} a_{51} = a_{13} a_{24} a_{32} a_{45} a_{51}$$
$$(-1)^{\tau(35241)} a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51} = -a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51}$$
$$(-1)^{\tau(35214)} a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54} = a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}$$

故 5 阶行列式中含因子 $a_{13} a_{32}$ 并带正号的所有项为

$$a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} a_{55}, \quad a_{13} a_{24} a_{32} a_{45} a_{51}, \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}$$

例 1.4 试求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数,其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ x & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$$

分析 根据行列式的定义,在 4 阶行列式的展开式的 24 项中,找出含 x^4 与 x^3 的项,即可确定 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 在表示 $f(x)$ 的 4 阶行列式中,位于不同行不同列的 4 个元素乘积含 x^4 的项只有 1 项

$$(-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} = (-1)^1 5x \cdot x \cdot x \cdot (-3x) = 15x^4$$

而含 x^3 的项有 2 项

$$(-1)^{\tau(2314)} a_{12} a_{23} a_{31} a_{44} = (-1)^2 1 \cdot x \cdot x \cdot (-3x) = -3x^3$$
$$(-1)^{\tau(4321)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = (-1)^6 3 \cdot x \cdot x \cdot x = 3x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 15, x^3 的系数为 0.

例 1.5 用定义计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

分析 由定义, n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项,且每一项是由位于不同行不同列的 n 个元素的乘积并添加适当的符号构成的,若这 n 个元素中有某一元素为零,则该乘积项为零.对于含零元素较多的行列式可以用定义进行计算,此时只要求出行列式展开式中的所有非零乘积项就可以求得该行列式的值.

解 依行列式的定义,其一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

可知,仅当 $j_1 = n-1, j_2 = n-2, \cdots, j_{n-1} = 1, j_n = n$ 时,对应的项才不为零,故有

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\,1\,n]} a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn} \\ &= (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+0} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n! \end{aligned}$$

例 1.6 设 $a_{ij}(x)(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 均可导,证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1}(x) & a_{i-1,2}(x) & \cdots & a_{i-1,n}(x) \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ a_{i+1,1}(x) & a_{i+1,2}(x) & \cdots & a_{i+1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

证 利用 n 阶行列式的定义,有

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[a_{1j_1}(x)a_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x)] \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_{1j_1}(x)\cdots a_{i-1,j_{i-1}}(x)a'_{ij_i}(x)a_{i+1,j_{i+1}}(x)\cdots a_{nj_n}(x)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(x)\cdots a_{i-1,j_{i-1}}(x)a'_{ij_i}(x)a_{i+1,j_{i+1}}(x)\cdots a_{nj_n}(x)\Big] \\
&= \text{右边}
\end{aligned}$$

例 1.7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$.

分析 可利用对角线法则先求出分子与分母的 3 阶行列式,再利用洛必达法则求极限,也可利用例 1.6 的结果,直接利用洛必达法则,即对分子与分母的行列式求导数.

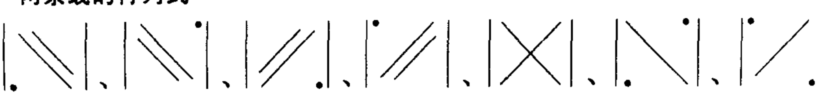
解 所求极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式,利用例 1.6 的结果,由洛必达法则得.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ \cos x & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-1} = 4$$

2. 行列式的计算

除了较简单的行列式可以用定义直接计算外,一般行列式计算的主要方法是利用行列式的性质做恒等变形化简,使行列式中出现较多的零元素,然后直接计算(如对上(下)三角形列式)或利用按行(列)展开定理降低行列式的阶数.在化简时,必须根据行列式的特点和元素的规律性,采取适当的次序和步骤来进行,因此首先观察研究行列式元素的规律性是重要的.以下对一些典型类型的行列式,举例说明其求解方法与技巧,读者主要是领会其思路,并将这种思路应用到其他的习题中去.每个例子都有若干种解法,这里一般只给出一种,其他方法请读者考虑.

1)类型一 两条线的行列式

对于形如  的所谓

两条线的行列式,可以直接展开降阶.

例 1.8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

解 按第 1 列展开得

$$D_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$$

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

解 按第 1 列展开得

$$D_n = b \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} + a(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b^2 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a^n$$

$$= b^2(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} a^{n-2} + (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-2}(a^2 - b^2)$$

注 对于三角行列式和次三角行列式,可直接套用有关的结果,上题即对 $n-1$ 阶和 $n-2$ 阶的次对角行列式套用了相应的结果.

例 1.10 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & a_1 \quad b_1 & & & \\ & & & c_1 \quad d_1 & & & \\ & & \iddots & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

解 按第 1 行展开得