高考一举三

历年高考好题分类解读与命题衍变预测

数学

丛书主编 吴万用 王永珊
本册主编 马乾凯

北京大学 中国人民大学 清华大学 北京交通大学
北京工业大学 北京航空航天大学 北京理工大学 北京科技大学
北京化工大学 北京邮电大学 中国农业大学 北京林业大学
北京中医药大学 北京师范大学 北京外国语大学
北京广播学院 对外经济贸易大学 中央民族大学
中央音乐学院 南开大学 天津大学
天津医科大学 河北工业大学 太原理工大学
内蒙古大学 辽宁大学 大连理工大学
东北大学 大连海事大学 吉林大学
延边大学 东北师范大学
哈尔滨工业大学 哈尔滨工程大学
东北农业大学 复旦大学
同济大学
上海交通大学
华东理工大学 东华大学
上海第二医科大学
华东师范大学 上海外国语大学
上海财经大学 上海大学
南京大学 苏州大学 东南大学
南京航空航天大学 南京理工大学
中国矿业大学 河海大学 江南大学
南京农业大学 中国药科大学 南京师范大学
浙江大学 安徽大学 中国科学技术大学
厦门大学 福州大学 南昌大学 山东大学
中国海洋大学 石油大学 郑州大学 武汉大学
华中科技大学 中国地质大学 武汉理工大学
湖南大学 中南大学 湖南师范大学 中山大学
暨南大学 华南理工大学 华南师范大学 广西大学
四川大学 重庆大学 西南交通大学 电子科技大学
四川农业大学 西南财经大学 云南大学 西北大学
西安交通大学 西北工业大学 西安电子科技大学
长安大学 兰州大学 新疆大学
第二军医大学 第四军医大学 国防科学技术大学

云南教育出版社

高考一举三

历年高考好题分类解读与命题衍变预测

最富有价值的高考好题解读

最令人信服的高考等值预测

适应全国分省高考命题的最新力作

责任编辑 何 醒 张萌萌

封面设计 五明设计 Wuming design 杨会慧

ISBN 7-5415-2569-3

9 787541 525698 >

ISBN 7-5415-2569-3/G.2072

定价：19.00元

高考一举三

历年高考好题分类解读与命题衍变预测

数学

本册主编　马乾凯
编　　者　马乾凯　王丽华

云南教育出版社

图书在版编目(C I P)数据

历年高考好题分类解读与命题衍变预测.数学 / 马乾凯主编.—昆明：云南教育出版社，2004.5
（高考一举三）
Ⅰ.历… Ⅱ.马… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 032617 号

高考一举三
——历年高考好题分类解读与命题衍变预测·数学

责任编辑：何　醒　张萌萌
策　　划：何　醒　王永珊
装帧设计：五明设计　杨会慧
出版发行：云南教育出版社
社　　址：昆明市环城西路 609 号
经　　销：全国新华书店
印　　刷：沈阳新华印刷厂
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：14.25
字　　数：388 千字
版　　次：2004 年 7 月第 1 版
印　　次：2004 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1—20 000 册
书　　号：ISBN7-5415-2569-3/G·2072
定　　价：19.00 元

编委会

前言

这是一套专为准备考大学的高三毕业生设计的高考丛书。

针对高考的书已有不少，但基本上是复习指导、模拟试题、高考试题汇集等。然而，我们通过对历年高考试题进行研究、分析后发现，每年的高考试题中都有不少好题，这些好题对学生把握科学方向、启迪思路、开拓眼界都有借鉴意义，尤其是一些试题在命题立意、技巧及思路方面，对培养学生的综合素质、科学的思维方法、分析与解决问题的能力等具有积极的作用。我们认为，“好题”就是指那些或涵盖学科重点知识，或突出能力考查，或测试思维多向性，或密切联系实际，或存在易错易混知识，或题型新颖别致的优秀试题。因此，我们投入相当大的力量，从历年高考试题中精选出好题，对好题进行规范的解读，并对好题进行衍变及由此预测未来考题。我们深感这项工作的难度之大，但对我们的考生是非常有参考价值的，我们就尝试去做了，这就是我们写作这套丛书的初衷。

这套丛书有如下特点：

1.所选的好题是从历年高考试题中特别是1999年以来的试题中精心筛选的，包含了各种题型。丛书按照考点将好题分类，用题覆盖全部知识点，以题带知识，达到知识与题互动。

2.所选的好题非常精典，不论从涉及的知识点还是试题形式上，都有其典型性。这些典型试题的集合，使得考生读了心中有数，还可以达到触类旁通、举一反三的效果。

3.丛书不论是对好题的解读，还是对衍变预测题的解

前言

读，都完全遵照高考评分标准，非常规范，给学生以示范，以避免因不规范解题造成失分。

4.通过对历年高考试题的研究我们还发现，今年的试题往往都是前几年试题的衍变。将历年好题进行衍变而拟出新题，这些题很可能就是新一年的考题。这种衍变预测是十分有价值的。试题的衍变还给我们以启示，使我们对学习过程中所遇到的好题都会自行给予衍变，这种开拓性的学习将带给我们无限的乐趣和收获。

5.这套丛书的作者都是多年从事高三毕业班教学的一线特、高级教师，该书是他们教学与研究的结晶，因此它有一定的权威性。

在编写与出版过程中，我们得到了许多专家、老师以及有关人士的积极支持，在此深表谢意。我们真诚希望这套丛书能在指导中学教学与考试实践中有所作用，对读者有所帮助。由于时间较紧，可能仍有不足之处，恳请同行指教。

目录

第1部分

函数与方程的综合解析能力

高考原题

设集合 $M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【2002·全国】

解读

知识与能力解读

本小题考查了集合与子集的概念及数列中的类别化思想.

解法解读

解　在集合 M 中,$x=\frac{2k+1}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$;在集合 N 中 $x=\frac{k+2}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.故可归析出集合 M 中元素的类别应为$\frac{1}{4}$的奇数倍,同理可归析出 N 中元素的类别应为$\frac{1}{4}$的整数倍,故选 B 正确.

答案　B

易错、易混点解读

说明　若本题已知不变,求 $M\cap N=?$

有些同学在做此题时采取如下错误方法:

当$\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}$时,$k=1$,故$M\cap N=\{\frac{3}{4}\}$.

而由解法解读易知本题正确答案应为 $M\cap N=M$,产生这种错误的根本原因是类别本质不清,即集合 M 中的 k 与集合 N 中的 k 未必是同一个 k.

衍变·预测

改变试题条件

设集合 $M=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{y\mid y=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,则 M ________ N.

分析　在对集合 M、N 进行类化时,可先找其公共属性,本题中集合 M、N 的公共属性应为 1,而并非 k.

解　在集合 M 中,

(ⅰ)$x=4k+1=2\cdot(2k)+1,k\in\mathbf{Z}$

(ⅱ)$x=4k-1=4k+1-2=(4k-2)+1=2(2k-1)+1,k\in\mathbf{Z}$,故可归纳出集合 M 表示:2 的偶数倍加 1 或 2 的奇数倍加 1,即表示 2 的整数倍加 1,故填“ = ”.

答案　=

改变试题形式及条件

设集合 $M=\{x\mid x=n,n\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x\mid x=\frac{1}{2}+n,n\in\mathbf{Z}\}$,则　(　　)

A. $N\subseteq M$　　B. $N=M\cup P$

C. $N\subseteq P$　　D. $N=M\cap P$

解　在集合 M 中:$x=\frac{2n}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,集合 N 中:$x=\frac{n}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,集合 P 中:$x=\frac{2n+1}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$.选 B.

答案　B

拓展试题

等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,若$\{a_n\}$为 5,8…,$\{b_n\}$为 3,7…,且数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$各 100 项,试问其中有多少公共项?

解　$a_n=5+(n-1)\cdot3=3n+2(n\in\mathbf{N}^*)$

$b_n=3+(n-1)\cdot4=4n-1(n\in\mathbf{N}^*)$

若要为其公共项只需:$a_m=b_n$,即 $3m+2=4n-1$.

(下面要进行角标的统一,即要对其实施归一化)

$3m=4n-3$,$\therefore m=\frac{4n-3}{3}=\frac{3n-3+n}{3}$ $=(n-1)+\frac{n}{3}$,故只须 $n=3k,k\in\mathbf{Z}(b_n)$,从而 $m=4k-1,k\in\mathbf{Z}(a_m)$.

故其公共项应为$\begin{cases}a_k=12k-1(k\in\mathbf{N}^*)\\b_k=12k-1(k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$

又$\because \{a_n\},\{b_n\}$各100项,故 k 应满足:

$$\left.\begin{cases}4k-1\leqslant 100\Rightarrow k\leqslant 25\frac{1}{4}\\3k\leqslant 100\Rightarrow k\leqslant 33\frac{1}{3}\\k\in\mathbf{N}^*\Rightarrow 1\leqslant k\leqslant 25\end{cases}\right\}\Rightarrow 1\leqslant k\leqslant 25.$$

答案 25

说明

(1)对分数或分式类别化时应找其公分母.

(2)对整式的类别化时应找其常数项.

(3)对前后两集合的表述中均含 $k,k\in\mathbf{Z}$ 的,其已退化为数列问题,但 k 不是其本质属性.

高考原题

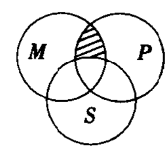
如图1-1,U 是全集,M,P,S 是 U 的3个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_U S$

D. $(M\cap P)\cup\complement_U S$



【1999·全国】

图 1-1

解读

知识与能力解读

本题考查了集合的相关概念相关运算及文氏图.

解法解读

解法一 阴影部分为 $M\cap P$ 的一部分,且位于 S 的外部,即在$\complement_U S$ 中,故选 C.

解法二 在阴影中任取一元素 a,则 $a\in M$ 且 $a\in P$ 且 $a\in U$ 且 $a\notin S$,故 $a\in(M\cap P)$且 $a\in\complement_U S$,即 $a\in(M\cap P)\cap\complement_U S$;反之,若 $a\in(M\cap P)\cap\complement_U S$ 则元素 a 必在阴影中,故选 C.

解法三 M、P、S 三个区域的公共部分位于阴影之外,故排除 A;图中阴影部分不含 S 中的元素,故排除 B;阴影部分只是 S 外部的区域$\complement_U S$ 的局部而非全部,故排除 D,综上可知 C 为正确答案.

答案 C

衍变·预测

改变试题形式及条件

已知集合 $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{a,b,c,e,f,h\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{a,e\}$,$\complement_U A\cap B=\{c,f\}$,求集合 A?

解法一 由集合的相关性质易知,

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{a,b,c,e,f,h\}$,

$\therefore A\cap B=\{d,g\}$.

又$\because (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{a,e\}$,

$\therefore A\cup B=\{b,c,d,f,g,h\}$.

而$(\complement_U A)\cap B=\{c,f\}$,$A\cap B=\{d,g\}$,

$\therefore \complement_U B\cap A=\{b,h\}$,

$\therefore A=\{b,d,g,h\}$.

解法二 利用图示法,即只须把有关集合中的元素填在图示对应的区域内,如图1-2可知集合 $A=\{b,d,g,h\}$.

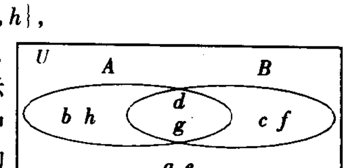


图 1-2

答案 $A=\{b,d,g,h\}$.

高考原题

已知 U 为全集,集合 M、$N \subsetneqq U$,若 $M\cap N = N$,则　(　　)

A. $\complement_U M \supseteq \complement_U N$　　B. $M \subseteq \complement_U N$　　C. $\complement_U M \subseteq \complement_U N$　　D. $M \supseteq \complement_U N$

【1995·全国·理】

解　读

知识与能力解读

本题考查了集合的基本概念、运算、性质及利用文氏图分析求解问题的能力.

解法解读

解　$M\cap N = N \Rightarrow N \subseteq M$,故可做出其文氏图如图1-3,故选C.

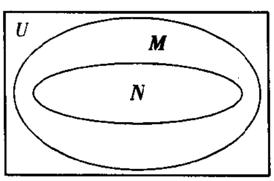


图 1-3

答案　C

易错、易混点解读

在求解集合的相关问题时应注意以下四条性质,并更应注意其形式上的区别与联系:

性质一:$\complement_U M\cap\complement_U N = \complement_U(M\cup N)$;

性质二:$\complement_U M\cup\complement_U N = \complement_U(M\cap N)$;

性质三:$M\cap N = M \Rightarrow M \subseteq N$;

性质四:$M\cup N = N \Rightarrow M \subseteq N$.

衍变·预测

改变试题形式及条件

设全集 U 及集合 A、B、E.若 $A\cup B = A\cup E$,则 B 与 E 的关系必有　(　　)

A. $B = E$　　B. $\complement_U B = \complement_U E$

C. $B\cap\complement_U A = E\cap\complement_U A$　　D. $A\cap B = A\cap E$

解　若 $A = U$,则 $A\cup B = A\cup E = U$,故 B、E 任意,从而排除A、B、D.

答案　C

拓展试题

该 M、P 是两个非空集合,定义 M 与 P 的差 $M - P = \{x|x \in M且x\notin P\}$,则 $M - (M - P) =$　(　　)

A. P　　B. $M\cap P$　　C. $M\cup P$　　D. M

解　令 $M = \{1,2\}$,$P = \{2,3\}$,则 $M - P = \{1\}$,从而 $M - (M - P) = \{2\}$,故排除C、D.

再令 $M = \{1\}$,$P = \{2\}$,则 $M - P = \{1\}$,从而 $M - (M - P) = \varnothing$,故排除A.

答案　B

高考原题

满足条件 $M\cup\{1\} = \{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【2002·北京】

解　读

知识与能力解读

本题考查了集合与并集的概念及含有 n 个元素的集合的真子集的个数的规律.

解法解读

解　由题意可知 M 只可能为$\{2,3\}$或$\{1,2,3\}$.

答案　B

说明　本题亦可等价转化为:"$\{2,3\} \subseteq M \subseteq \{1,2,3\}$,试问集合 M 的个数为?"

衍变·预测

改变试题条件及问法

集合 $S=\{a,b,c,d,e\}$，包括 $\{a,b\}$ 的 S 的子集共有（　　）

A. 2个　　B. 3个　　C. 5个　　D. 8个

解　本题可转化为："$\{a,b\}\subseteq M\subseteq\{a,b,c,d,e\}$，试问集合 M 的个数?"，而集合 M 的个数亦相当于集合 $\{c,d,e\}$ 子集的个数，即 $2^3=8$.

答案　D

拓展试题

已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$ 且集合 M 满足 $A\subsetneqq M\subseteq B$，则集合 M 的个数为?

解　本题可等价转化为求集合 $\{3,4,5,6\}$ 的非空子集的个数，即 $2^4-1=15$ 个.

答案　15.

高考原题

设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|<a\}$（a 是常数），且 $11\in B$，则（　　）

A. $\complement_U A\cup B=\mathbf{R}$　　B. $A\cup\complement_U B=\mathbf{R}$　　C. $\complement_U A\cup\complement_U B=\mathbf{R}$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

【1998·上海】

解　读

知识与能力解读

本题考查了集合的运算，一元二次不等式、含绝对值的不等式的解法及利用数轴分析解决问题的能力.

解法解读

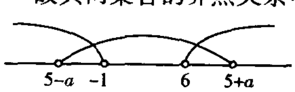
解　$11\in B$，故 $|11-5|<a$，即 $a>6$，

$\therefore B=\{x\mid 5-a<x<5+a\}$.

而 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>6\}$.

又 $\because a>6$，$\therefore 5-a<-1$，$5+a>6$.

故其两集合的界点关系可表示为



故 $A\cup B=\mathbf{R}$，故选 D.

易错、易混点解读

说明　在本题中，不能直接把集合 B 改写成 $\{x\mid 5-a\leqslant x\leqslant 5+a\}$，因为不知 a 的正负.

衍变·预测

改变试题形式及条件

已知全集 $U=\{1,3,x^2+3x+2\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，若 $\complement_U A=\{0\}$，则符合条件 x 组成的集合是______.

解　$\complement_U A=\{0\}\Rightarrow$

$$\left.\begin{cases}x^2+3x+2=0\Rightarrow x=-1\text{ 或 }x=-2\\|2x-1|=3\Rightarrow x=2\text{ 或 }x=-1\end{cases}\right\}\Rightarrow x=-1.$$

答案　$\{-1\}$.

改变试题条件

1.设集合 $A=\{3,\log_{2x}4\}$，$B=\{x,y\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B$ 为（　　）

A. $\{2,3,x,y\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{-1,1,2,3\}$　　D. $\{3,\log_{2x}4,x,y\}$

解　$\because A\cap B=2$，$\therefore 2\in A$ 且 $2\in B$，$\therefore \log_{2x}4=2$，$\therefore x=1$. $2\in B$，$\therefore y=2$，$\therefore A=\{3,2\}$，$B=\{1,2\}$，$\therefore A\cup B=\{1,2,3\}$.

答案　B

2.设集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid ax-3=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup B=A$，则实数 a 所组成的集合为______.

解　$A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$，故对 B 进行分类讨论：

i）若 $B=\varnothing$ 时，即 $a=0$ 满足题意；

ⅱ)若 $B\neq\varnothing$ 时,即 $a\neq 0$ 时,$B=\{\frac{3}{a}\}$.若要满足 $B\subseteq A$ 只需 $\frac{3}{a}\in A$,即有 $(\frac{3}{a})^2-4(\frac{3}{a})+3=0$.
解得 $a=1$ 或 $a=3$.综上 $a=0$ 或 $a=1$ 或 $a=3$.

答案　$\{0,1,3\}$.

说明　(1)在ⅱ中 $\frac{3}{a}\in A=\{1,3\}$,$\therefore a=1$ 或 $a=3$,广大同学应引起注意.(2)$\varnothing$是一切集合的子集这一性质在解题中经常被同学们忽略,故同学们应十分注意.

拓展试题

1.已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,集合 $B=\{0,|x|,y\}$ 若 $A=B$,则 $x=$ ________,$y=$ ________

解　$A=B$,又$\because 0\in B$,$\therefore 0\in A$.若 $x=0$ 或 $xy=0$ 都会导致 B 集合中元素具有互异性这一矛盾产生,故只能 $\lg(xy)=0$,$\therefore xy=1$,且 $x\neq xy(x\neq 0)$,$\therefore y\neq 1$,$\therefore |x|=1$. $x=1$ 时 $y=1$(矛盾),$\therefore x=-1,y=-1$.

答案　$-1,-1$

2.设 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0\}$,且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 P 的取值范围?

解　ⅰ)当 $A=\varnothing$时,即 $\Delta=(P+2)^2-4<0$,解得 $-4<P<0$,满足题意.

ⅱ)当 $A\neq\varnothing$时,即 $P\leqslant -4$ 或 $P\geqslant 0$ 时,设 x_1,x_2 为二次方程 $x^2+(P+2)x+1=0$ 的两实根.$x_1x_2=1>0$,说明两根同号.又因其要满足 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,故只需二次方程 $x^2+(P+2)x+1=0$ 两根皆为负.

$$\begin{cases}x_1+x_2<0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Rightarrow P>-2,\therefore P\geqslant 0.$$

综上可知 $P>-4$.

答案　$P>-4$.

创新试题

已知 $A\subseteq M=\{x|x^2-px+15=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B\subseteq N=\{x|x^2-ax-b=0,x\in\mathbf{R}\}$,且 $A\cup B=\{2,3,5\}$,$A\cap B=\{3\}$,求 $a、b、p=$?

解　$A\cap B=3$,$\therefore 3\in A$ 且 $3\in B$.

$$\left.\begin{matrix}3\in A\\A\subseteq M\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\in M,\text{由 } x_1x_2=15,\text{故 } 3x=15.$$

$\therefore x=5$,$\therefore M=\{3,5\}$.

$$\text{又}\because A\cup B=\{2,3,5\},\left.\begin{matrix}\therefore 2\in B\\\text{又}\because B\subseteq N\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{同理所得}\left.\begin{matrix}2\in N\\3\in N\end{matrix}\right\}\Rightarrow N=\{2,3\}.$$

$\because M=\{3,5\}$,$\therefore 3+5=p$,$\therefore p=8$.

$\because N=\{2,3\}$,$\therefore 2+3=a,6=-b$.

答案　$a=5,b=-6,p=8$.

高考原题

若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T$ 是　(　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

【2000·上海】

解读

知识与能力解读

本题考查了集合的表示方法及其相关运算,尤其是在运算中代表元素指代性的重要作用.

解法解读

解　依题可得,$S=\{y|y>0\}$,$T=\{y|y\geqslant -1\}$,$\therefore S\cap T=S$.

答案　A

衍变·预测

改变试题条件

设集合 $A=\{$圆$\}$,集合 $B=\{$直线$\}$,则 $A\cap B=$ ________.

解　圆不可能为直线,反之直线也不可能为圆,故填$\varnothing$.

答案　$\varnothing$

改变试题条件及问法

该集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)|y$

$\neq x+1, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$,则$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$____.

解 集合 M 表示直线 $y=x+1$ 上除$(2,3)$点以外的所有点;集合 N 表示直线 $y=x+1$ 外的所有点,而$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\{(2,3)\}$.

答案 $\{(2,3)\}$.

拓展试题

1.已知 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y\mid y=x+1, x\in A\}$,$C=\{y\mid y=x^2, x\in A\}$,若 $B=C$,求 a 的值?

解 $\because A=[-1,a]$,

$\therefore B=\{y\mid y=x+1, x\in A\}=[0,a+1]$

而抛物线 $y=x^2$ 的图像如图 1-4.

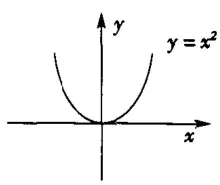


图 1-4

ⅰ)当 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 时,$B=[a^2,1]$.

若 $B=C$,

需 $0=a^2, a+1=1$

$\Rightarrow a=0$ 满足前提.

ⅱ)当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,$B=[0,1]$若 $B=C$,

则只需 $a+1=1$,即 $a=0$ 满足题意.

ⅲ)当 $a\geqslant 1$ 时,则 $B=[0,a^2]$,若 $B=C$,只需 $a+1=a^2$.

即 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).综上所述:

$\therefore a=0$ 或 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

答案 $a=0$ 或$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

说明 本题亦有更一种简法:$\because 0\in B, B=C$,$\therefore 0\in C$,$\therefore -1\leqslant a<0$ 不满足题意,故(ⅰ)可略.

2.已知集合 $M=\{0,1\}$,$N=\{x\mid x\subseteq M\}$,则 $N=?$,M 与 N 的关系又如何?

解 $N=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$,$\therefore M\in N$.

小结 虽然元素与集合之间只有属于和不属于两种关系;而集合与集合之间只有包含和不包含两种关系,但应注意其相对性.

3.已知集合 $A=\{x\mid \dfrac{12}{5-x}\in \mathbf{N}^*, x\in \mathbf{Z}\}$,则 A 中元素之和为?若集合 $A=\{y\mid y=\dfrac{12}{5-x}\in \mathbf{N}^*, x\in \mathbf{Z}\}$,则结论又如何?若集合 $A=\{y\mid y=\dfrac{12}{5-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{Z}\}$,那么结论又怎样?若 $A=\{x\mid \dfrac{12}{5-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{Z}\}$,结论又怎样?

解 设 A 中元素之和为 S,$\dfrac{12}{5-x}\in \mathbf{N}^*$,则 $5-x$ 应为 12 的正约数,故 $5-x=1,2,3,4,6,12$.

$5\times 6-S=(1+2+3+4+6+12)$,$\therefore S=2$,故 A 中元素之和为 2.

因为代表元素为 y,故 A 集合表示 12 的正约数,故 $S=1+2+3+4+6+12=28$.

表示 12 的约数,而又因其约数正、负成对出现,故 $S=0$.

A 集合表示 x,只需 $5-x$ 为 12 的约数即可.

$\therefore 5-x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$,

$\therefore 5\times 12-S=0$,$\therefore S=60$.

答案 2;28;0;60.

高考原题

设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$,$B=\{x\mid \dfrac{2x-1}{x+2}<1\}$,若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

【1999·上海】

解读

知识与能力解读

本题考查了集合与集合间的关系、利用数轴反映其关系助解题目的能力,以及绝对值不等式、分式不等式的解法.

解法解读

解 由$|x-a|<2$,得 $a-2<x<a+2$,

$\therefore A=\{x\mid a-2<x<a+2\}$.

由$\dfrac{2x-1}{x+2}<1$,得$\dfrac{x-3}{x+2}<0$,从而 $-2<x<3$,

$\therefore B=\{x\mid -2<x<3\}$.

若要使 $A\subseteq B$ 只需如图 1-5 所示,

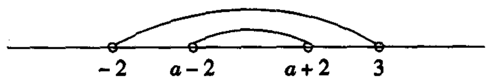


图 1-5

即应满足$\begin{cases} a-2 \geqslant -2, \\ a+2 \leqslant 3. \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant 1.$

答案 $0 \leqslant a \leqslant 1.$

衍变·预测

改变试题形式

若不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解集是$\{x|-1<x<2\}$,则不等式 $cx^2+bx+1>0$ 的解集 = ______.

解 不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解集是$\{x|-1<x<2\}$.

说明 $-1,2$ 为二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两实根,$1=-b,-2=c$.

$\therefore$ 不等式 $cx^2+bx+1>0$ 的解集即 $-2x^2-x+1>0$ 的解集,故$\{x|-1<x<\frac{1}{2}\}$.

答案 $\{x|-1<x<\frac{1}{2}\}$.

拓展试题

1.已知关于 x 的不等式$\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$的解集为$\{x|4<x<m\}$,则 $a=$ ______,$m=$ ______.

解 i)若 $a<0$ 时,当 $x=+\infty$ 时,$\sqrt{x}=+\infty$,$ax+\frac{3}{2}=-\infty$,故不等式$\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$不成立.这与解集$\{x|4<x<m\}$相矛盾,故 $a<0$ 不可能.

ii)$a=0$ 时,也与解集相矛盾,$\therefore a>0$.

$\because$ 解集为$(4,m)$,$\therefore ax+\frac{3}{2}>0$.

$\therefore$ 不等式$\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$可同解变形为

$$x>a^2x^2+3ax+\frac{9}{4}.$$

依题可知,$4,m$ 应为二次方程 $a^2x^2+(3a-1)x+\frac{9}{4}=0$ 的二实根.

$$\therefore \begin{cases} 4+m=\dfrac{1-3a}{a^2}, \\ 4m=\dfrac{9}{4a^2}. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\dfrac{1}{8}, \\ m=36. \end{cases}$$

答案 $\frac{1}{8}$,36.

2.关于 x 的不等式 $x^2-ax-6a\leqslant 0$ 有解,且解集中的任意 x_1,x_2 点满足$|x_1-x_2|\leqslant 5$,求实数 a 取值范围.

分析 本题可等价转化为二次不等式 $x^2-ax-6a\leqslant 0$,它的解集为$\{x|x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$且$|x_1-x_2|\leqslant 5$,求实数 a 的取值范围.

解 依题意可知,实数 a 只需满足:

$$\left\{\begin{matrix} \Delta=a^2-4\times(-6a)\geqslant 0 \Rightarrow a\leqslant -24 \text{或} a\geqslant 0 \\ \sqrt{(a)^2+24a}\leqslant 5 \Rightarrow -25\leqslant a\leqslant 1 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow -25\leqslant a\leqslant -24$ 或 $0\leqslant a\leqslant 1$.

综上实数 a 的取值范围为 $-25\leqslant a\leqslant -24$ 或 $0\leqslant a\leqslant 1$.

答案 $-25\leqslant a\leqslant -24$ 或 $0\leqslant a\leqslant 1$.

高考原题

如图 1-6 小圆圈表示网络的结点,结点之间的连线表示它们有网线相连,边线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量,现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递,则单位时间内传递的最大信息量是 ( )

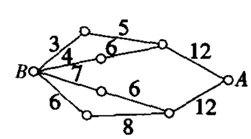


图 1-6

A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

解读

知识与能力解读

本题不用什么高中数学知识,试题新颖别致,以现代科技前沿的背景为背景,以考查学生接受信息、处理信息的能力为目标,是一道难得的优秀试题,突出考查了学生继续学习的潜能问题.只要看懂就能做对.

解法解读

解　信息从 A 出发,沿上、下两个支路传递.

沿上支到第一节点后又分为两支,由于这两支通过信息量的最大值分别是 3 和 4,且 $3+4<12$,所以沿上支传递信息量的最大值为 $3+4=7$.

同理,沿下支传递信息量的最大值为 $6+6=12$.

所以从 A 向 B 传递信息量的最大值为 $7+12=19$.

衍变・预测

改变试题条件及背景

在研究并行计算的基本算法时,有以下简单模型:

问题用计算机求 n 个不同的数 $\forall_1,\forall_2\cdots,\forall_n$ 的和 $\sum_{i=1}^{n}\forall_i=\forall_1+\forall_2+\forall_3+\cdots\forall_n$.计算开始前,$n$ 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中,每台机器存一个数.计算开始后,在一个单位时间内,每台机器至多到一台其他机器中读数据,并与自己原有数据相加得到新的数据,各台机器可同时完成以上工作.

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

为了用尽可能少的单位时间,使各台机器都得到这 n 个数的和,需要设计一种读和加的方法.比如 $n=2$ 时,一个单位时间即可完成计算,方法可用上表表示:

(1)当 $n=4$ 时,至少需要多少个单位时间可完成计算?

把你设计的方法填入下表:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2)当 $n=128$ 时,要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^{n}\forall_i$,至少需要多少个单位时间可完成计算?(结论不要求证明)

解　(1)当 $n=4$ 时,只用 2 个单位时间即可完成计算.

方法之一如下:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　果	被读机号	结　果	被读机号	结　果
1	v_1	2	v_1+v_2	3	$v_1+v_2+v_3+v_4$		
2	v_2	1	v_2+v_1	4	$v_2+v_1+v_4+v_3$		
3	v_3	4	v_3+v_4	1	$v_3+v_4+v_1+v_2$		
4	v_4	3	v_4+v_3	2	$v_4+v_3+v_2+v_1$		

(2)当 $n=128=2^7$ 时,至少需要 7 个单位时间才能完成计算.

答案　(1)略;(2)7.

高考原题

设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 中,象 $(2,1)$ 的原象是　　(　　)

A. $(3,1)$　　B. $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$　　C. $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$　　D. $(1,3)$

【2002・北京】

解读

知识与能力解读

本题考查了集合与映射的基本知识.

解法解读

解 依题可知$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

故象(2,1)的原象为$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

答案 B

衍变·预测

改变试题条件

设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}^*$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是 ( )

A.2 B.3 C.4 D.5

解 依题意,所求的原象 n 应满足方程 $2^n+n=20$,由于 2^n 与 20 都是偶数,所以选项 B、D 排除,将选项 $n=2$ 代入,排除 A.

答案 C

创新试题

1.设 $f:x\to y=2^x$ 是集合 A 到集合 B 的映射,已知集合 $B=\{0,1,2,3,4\}$,则集合 A 应满足的条件为______.

解 依题意易知,集合 A 应满足

$\varnothing \subsetneqq A\subseteq\{0,1,\log_2 3,2\}$.

2.判断下列对应哪些是从集合 A 到集合 B 的映射.

$(a)A=\mathbf{R},B=\{y|y>0\},f:x\to y=1+\dfrac{1}{|x|}$;

$(b)A=\mathbf{R},B=\{y|y>0\},f:x\to y=x^2$;

$(c)A=\{x|x\geqslant 3\},B=\{y|y\geqslant 0\},f:x\to y=\sqrt{x}$;

$(d)A=\mathbf{N}^+,B=\mathbf{Q},f:x\to y=\dfrac{1}{x}$;

$(e)A=\mathbf{Z}^+,B=\mathbf{Q},f:x\to |y|=\dfrac{1}{x}$.

分析 解决此类问题的关键是要抓住其判定条件:

①集合 A 是否可做函数的定义域;

②在定义域 A 的限制下,在对应法则 f(函数解析式)的作用下,求其值域并判断其是否为集合 B 的子集;

③∀(任意)的 x 是否对应唯一的 y.

解 (a)与①矛盾,(b)与②相矛盾,(e)与③和矛盾,而$(c)(d)$为从集合 A 到集合 B 的映射.

答案 $(c)(d)$.

高考原题

函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域是________.

【1996·上海】

解读

知识与能力解读

本题考查了具体函数定义域的求法.

具体函数定义域的求法基本类型图:

名称	函数类型	限定条件
具体函数	$f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$
	$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$g(x)\geqslant 0$
	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$	$g(x)>0$
	$f(x)=[g(x)]^0$	$g(x)\neq 0$
	$f(x)=\log_{g(x)}h(x)$	$\begin{cases}h(x)>0\\g(x)>0\\g(x)\neq 1\end{cases}$