



教育部高职高专规划教材

高等数学自学指导

► 赵益坤 白瑞云 主编



化学工业出版社

教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学自学指导

赵益坤 白瑞云 主编



化学工业出版社
教材出版中心

·北京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学自学指导/赵益坤, 白瑞云主编. —北京: 化学工业出版社, 2004.7

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-5025-5978-7

I. 高… II. ①赵…②白… III. 高等数学-高等学校: 技术学院-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 072208 号

教育部高职高专规划教材

高等数学自学指导

赵益坤, 白瑞云 主编

责任编辑: 张双进

责任校对: 蒋宇

封面设计: 于兵

*

化学工业出版社 出版发行
教材出版中心

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010) 64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 10 字数 267 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-5978-7/G · 1601

定 价: 15.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

素质教育和能力培养是高职高专教育的重要培养目标。数学教学要突出高职高专教育的特点，为培养“应用性专门人才”打好基础。然而，学生在校所学到的知识只不过是沧海一粟。要想适应新世纪新技术革命的时代要求，就必须具备继续获取知识的各种能力。这就需要把教学活动的主体从教师转移到学生，将教学的重心从“教”转移到“学”上；以优化智能、提高素质为核心，把教学活动的主线从单纯传授知识，转移到着重开发学生的智能上；给学生以学习的主动权和“自由度”，使学生不仅要学会，而且要会学。为了配合教学改革，我们编写了这本高等数学《自学指导》。

本书按照高职高专《高等数学》的目录顺序分章编写。每一章包括：目的要求；重点；难点；自学指导提纲与自我练习；章节小结；自测试题；习题答案六部分。这些内容都是根据教育部颁发的“高职高专高等数学课程的教学基本要求”和各章教学具体内容编写的，其中“自学指导提纲与自我练习”分节编写。每一节分为：内容提要；自学提纲；基本练习；选择练习。自学提纲是紧紧围绕中心内容、具有启发性的思考题。思考题力求层层递进，环环相扣，循序渐进；基本练习题是学生在自学基础上力所能及地能够解答的一些简单练习，而选择练习题则有一定难度，供学有余力的学生选用。另外，每个学习阶段配有阶段自测试题及其答案，为了便于自学，书后附有常用的初等数学公式。本书可作为各

种版本的高职高专《高等数学》的辅助教材。

本书由河北工业职业技术学院赵益坤、白瑞云主编，贾俊礼、王磊副主编；参加编写的有王力加、节存来、强琴英、田慧竹、宋从芝、刘卫卫，全书由主编统稿、定稿。

由于水平有限，书中难免会有缺点和错误，敬请读者多提宝贵意见。

编者

2004年6月

目 录

第一章 函数 极限 连续	1
[自学指导提纲与自我练习]	2
第一节 函数	2
第二节 数列的极限	4
第三节 函数的极限	5
第四节 极限的运算	6
第五节 无穷小与无穷大	7
第六节 两个重要极限	9
第七节 函数的连续性	10
[本章小结]	13
[自测试题]	18
[习题答案]	19
[自测试题答案]	25
第二章 导数与微分	29
[自学指导提纲与自我练习]	30
第一节 导数的概念	30
第二节 函数和、差、积、商的求导法则	32
第三节 复合函数的求导法则	33
第四节 初等函数的求导问题	34
第五节 高阶导数	35
第六节 隐函数及其求导	36
第七节 由参数方程所确定的函数的导数	37
第八节 函数的微分及其应用	38
[本章小结]	41

[自测试题]	42
[习题答案]	44
[自测试题答案]	51
第三章 导数的应用	55
[自学指导提纲与自我练习]	55
第一节 中值定理	55
第二节 洛必达法则	57
第三节 函数单调性的判定法	58
第四节 函数的极值及其求法	59
第五节 函数的最大值和最小值	60
第六节 曲线的凹凸与拐点	62
第七节 函数图形的描绘	63
*第八节 曲线的曲率	63
[本章小结]	65
[自测试题]	68
[习题答案]	69
[自测试题答案]	75
[阶段测验试题(一元函数微分学)]	80
[阶段测验试题答案]	81
第四章 不定积分	87
[自学指导提纲与自我练习]	87
第一节 不定积分的概念与性质	87
第二节 积分的基本公式和法则 直接积分法	88
第三节 第一换元积分法	90
第四节 第二换元积分法	92
第五节 分部积分法	93
*第六节 有理函数及三角函数有理式的积分	95
第七节 积分表的使用	97
[本章小结]	97

[自测试题]	101
[习题答案]	102
[自测试题答案]	106
第五章 定积分及其应用	112
[自学指导提纲与自我练习]	113
第一节 定积分的概念	113
第二节 定积分的性质	114
第三节 牛顿——莱布尼兹公式	115
第四节 定积分的换元法与分部积分法	117
第五节 广义积分	119
第六节 定积分在几何上的应用	120
第七节 定积分在物理上的应用	121
第八节 平均值	122
[本章小结]	123
[自测试题]	127
[习题答案]	128
[自测试题答案]	130
[阶段测验试题 (一元函数积分学)]	134
[阶段测验试题答案]	135
第六章 常微分方程	139
[自学指导提纲与自我练习]	140
第一节 微分方程的基本概念	140
第二节 可分离变量的微分方程	141
第三节 一阶线性微分方程	142
第四节 一阶微分方程应用举例	143
第五节 二阶线性微分方程的解的结构	144
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程	145
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程	146
[本章小结]	147

[自测试题]	149
[习题答案]	150
[自测试题答案]	154
第七章 向量代数 空间解析几何	160
[自学指导提纲与自我练习]	161
第一节 二阶及三阶行列式 空间直角坐标系	161
第二节 向量及其坐标表示	162
第三节 向量的数量积与向量积	164
第四节 平面及其方程	166
第五节 空间直线及其方程	169
第六节 二次曲面与空间曲线	172
[本章小结]	176
[自测试题]	181
[习题答案]	184
[自测试题答案]	196
第八章 多元函数微分学	199
[自学指导提纲与自我练习]	200
第一节 多元函数的概念二元函数的极限和连续性	200
第二节 偏导数	202
第三节 全微分	203
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法	204
第五节 偏导数的应用	205
[本章小结]	207
[自测试题]	215
[习题答案]	217
[自测试题答案]	225
第九章 重积分	230
[自学指导提纲与自我练习]	230

第一节	二重积分的概念与性质	230
第二节	二重积分的计算方法	232
第三节	二重积分的应用	235
[本章小结]	237
[自测试题]	240
[习题答案]	242
[自测试题答案]	250
第十章	无穷级数	253
[自学指导提纲与自我练习]	254
第一节	数项级数的概念和性质	254
第二节	正项级数及其审敛法	256
第三节	任意项级数	259
第四节	幂级数	261
第五节	函数的幂级数展开	263
第六节	傅里叶 (Fourier) 级数	264
[本章小结]	266
[自测试题]	274
[习题答案]	277
[自测试题答案]	295
[阶段测验试题]	298
[阶段测验试题答案]	300
附录	初等数学常用公式	303

第一章 函数 极限 连续

初等数学与高等数学的主要区别就在于：初等数学基本上研究常量的数学，运用的工具为算术运算（加、减、乘、除、乘方、开方），而高等数学的研究对象是变量，运用的工具是极限运算。“极限”是高等数学中一个重要的基本概念，是学习微积分的基础，它的重要性可以说，没有极限概念就没有高等数学。高等数学中其他一些重要概念都是用极限来定义的。本章在复习函数、定义域及其图形的基础上，讨论函数的极限的概念、性质及运算法则和函数的连续性问题。

【目的要求】

1. 在复习函数概念的基础上，牢固掌握五种基本初等函数的定义、性质和图像、搞清复合函数、初等函数的概念，了解函数的几种特性并学会建立较简单的函数关系式。
2. 正确理解无穷小量的定义和性质以及无穷小量与无穷大量之间的关系。
3. 正确理解极限的概念，熟练掌握极限的运算法则，培养学生对极限理论的运用和对极限运算的基本技能。
4. 正确理解函数的连续性和间断点的概念，了解初等函数的连续性，掌握求极限的几种基本方法。
5. 极限理论是以运动的、有联系的以及量变引起质变的观点来研究量的变化的一种方法，借此进行辩证唯物主义观点的培养。

【重点】

1. 极限概念及其运算法则。
2. 求极限的基本方法。

【难点】

1. 极限理论.
2. 分段函数及其连续性.

[自学指导提纲与自我练习]

第一节 函 数

一、内容提要

函数的概念；基本初等函数；复合函数；初等函数；建立函数关系.

二、自学提纲

(一) 函数的概念

1. 函数是如何定义的？何为自变量、因变量、定义域、值域？何为单值函数和多值函数？常数是函数否？

2. 函数的两个要素分别是什么？两个函数相同与否由什么来确定？

3. 如何求函数的定义域？

4. 函数与函数值分别如何表示？

5. 函数有几种表示法？分别是什么？

6. 何为分段函数？其函数值如何求？

7. 反函数是如何定义的？习惯上如何表示？其图形有何特点？

8. 函数的奇偶性、单调性、有界性、周期性分别是如何定义的？其图形有何特点？如何判断函数是否具有这些特性？

(二) 基本初等函数

1. 哪些函数为基本初等函数？它们的定义域、值域和特性各是什么？图形如何？

2. 熟记五种基本初等函数的性态和图形.

(三) 复合函数、初等函数、建立函数关系举例

1. 复合函数是如何定义的？

2. 指出下列复合函数的复合过程和定义域, 说明复合函数分解到什么程度为止?

$$(1) y = \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = \ln \sqrt{1+x};$$

$$(3) y = \lg(1 + \sqrt{1-x^2}).$$

3. $y = f[\varphi(x)]$ 与 $u = \varphi(x)$ 的定义域是否相同? 复合次序能否调换? 即 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi[f(x)]$ 是否相等? 是否任何函数都能复合在一起?

4. 初等函数是如何定义的? 哪些函数为初等函数? 分段函数是否初等函数?

5. 应用题的函数关系式如何建立? 分段函数的关系式如何进行分段?

三、基本练习

1. 下列各题中所给两个函数是否相同? 为什么?

$$(1) y = \ln x^2 \text{ 和 } y = 2 \ln x; \quad (2) y = x \text{ 和 } y = \sqrt{x^2};$$

$$(3) y = |x-1| \text{ 和 } y = \begin{cases} 1-x, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+4}; \quad (2) y = \sqrt{1-|x|};$$

$$(3) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)}.$$

3. 设 $G(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2}$, 求 $G(0)$ 、 $G(1)$ 、 $G(\sqrt{2})$ 、 $G(-\sqrt{3})$ 、 $G(-2)$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0); \quad (2) g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

$$(3) y = x(1-x).$$

5. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数, 并写出它们的定义域:

(1) $y = \sqrt{u}$ $u = x^3 + 1$;

(2) $y = \ln u$ $u = 3^v$ $v = \sin x$.

6. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y = e^{x+1}$; (2) $y = \sin \frac{3x}{2}$.

7. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体, 试将圆柱体的体积 V 表示为高 h 的函数, 并写出定义域.

8. 有三个矩形, 其高分别为 3 米、2 米、1 米, 而底皆为 1 米. 彼此相距 1 米放着 (如图 1-1 所示), 假定 x ($-\infty < x < +\infty$) 连续变动 (即直线 AB 连续地平行移动), 试将阴影部分的面积 S 表示为距离 x 的函数.

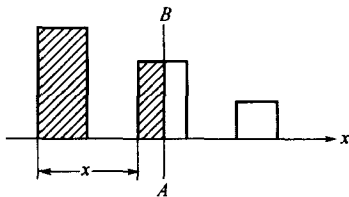


图 1-1

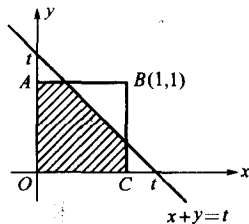


图 1-2

四、选择练习

1. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 问 (a) $f(x^2)$ 、(b) $f(\sin x)$ 、(c) $f(x+a)$ ($a > 0$)、(d) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域各是什么?

2. 如图 1-2 所示, $OABC$ 是边长为 1 的正方形, 又另有一直线 $x+y=t$, 设正方形与平面区域 $x+y < t$ 的公共部分 (图中阴影部分) 的面积为 $s(t)$, 写出 $s(t)$ 的表达式.

第二节 数列的极限

一、内容提要

数列极限定义; 数列极限的运算法则.

二、自学提纲

(一) 数列极限定义

1. 数列极限是如何定义的?
2. 观察下列数列当 $n \rightarrow \infty$ 时的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = (-1)^n \frac{1}{n}; \quad (2) x_n = 1 - \frac{1}{10^n};$$

$$(3) y_n = n(-1)^n; \quad (4) y_n = \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(5) 0, 1, 0, 1 \dots$$

3. 是否所有数列都有极限?
4. 常数数列的极限是什么?
5. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow a$ 的实质是什么? 如何用数量关系来描述?
6. 若数列收敛, 一定有界吗? 反之又如何?

(二) 数列极限的运算法则

1. 数列极限的运算法则是什?
2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 + 1}.$$

三、基本练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{8 - n^3}.$$

四、选择练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n + 1} - n^2)(n + 3);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right].$$

第三节 函数的极限

一、内容提要

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限; 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极

限；左、右极限.

二、自学提纲

1. 函数 $f(x)$ 的极限分几种情况？各是什么？
2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是如何定义的？
3. 当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $(x \rightarrow -\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是如何定义的？与 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限定义有何区别？
4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 何时极限存在？何时不存在？
5. $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是如何定义的？定义中“ x 可以不等于 x_0 ”代表何意？
6. 当 $x \rightarrow x_0$ 时，常数的极限是什么？
7. x 从左侧或从右侧趋于 x_0 如何表示？
8. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限是如何定义的？如何表示？
9. 当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限何时存在？何时不存在？
10. 分段函数交界点处的左、右极限如何求？极限如何求？
11. 当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件是什么？

三、基本练习

1. 设函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ ，画出它的图像，求出当 $x \rightarrow 0$ 时，函数的左、右极限，从而说明在 $x=0$ 时，函数的极限是否存在？
2. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ ，画出它的图像，并求当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限是否存在？

第四节 极限的运算

一、内容提要

极限运算法则.

二、自学提纲

1. 函数极限的运算法则是什么？
2. 试求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^3}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 1}{2^n + 1}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n^2};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right];$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}; \quad (9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5}.$$

3. 试找出上述题求极限的规律.

三、基本练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 5); \quad (2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

四、选择练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 + |x|}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt[3]{2+x+x}}.$$

第五节 无穷小与无穷大

一、内容提要

无穷小; 无穷大; 无穷小的比较.