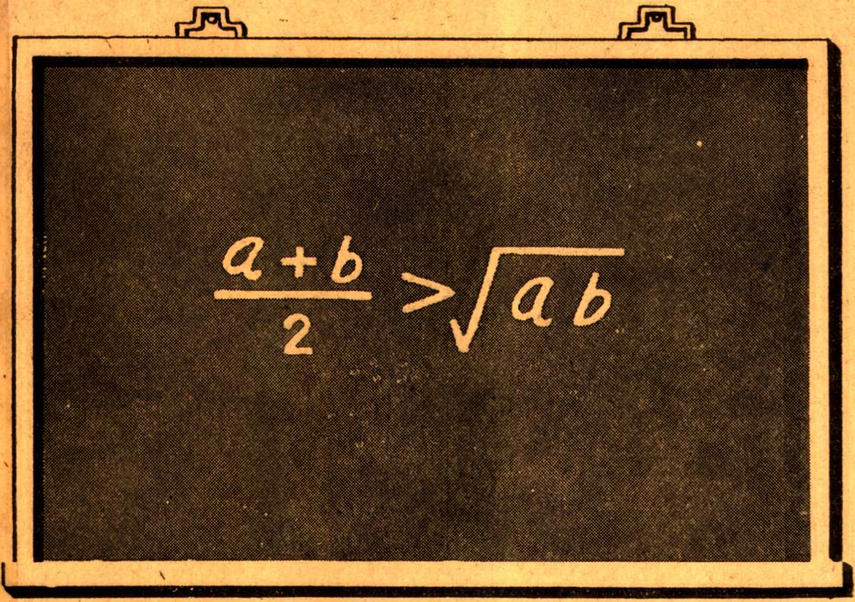


恩·伊·格里果烈夫 著

> 不等式 <

不 等 式

恩·伊·格里果烈夫 著

余元庆 奚今吾 譯

人民教育出版社

本书是根据苏联教育出版社出版的恩·伊·格里果烈夫所著的"十年級代数課程中的不等式"1956年版譯出的。

本书詳細講解了苏联中学十年級数学課程中"不等式"这个課題的教材内容:"不等式的基本性質,不等式的証明,同解不等式,一元一次不等式和一元一次不等式組的解法";"一元一次方程的討論";"二元一次方程組的討論"以及"二次三项式的討論,一元二次不等式的解法"。此外,还講解了与"不等式"这个課題密切有关的"用列出二次方程来解的应用題,并且討論所得的答案"。本书可供我国中学数学教师的参考。

Н. И. ГРИГОРЬЕВ

НЕРАВЕНСТВА

В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

10 КЛАССА

УЧПЕДГИЗ 1956

本书根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社

1956年列宁格勒版譯出

*

不 等 式

〔苏联〕 恩·伊·格里果烈夫 著

余元庆 吴今吾 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店发行

工人日报印刷厂印装

統一书号:7012·420 字数:63千

开本:787×1092 公厘 1/32 印張:3

1958年10月第一版

1959年2月第一次印刷

北京:1—11,000册

*

定价 (6) 0.26 元

目　录

工人出版社印刷厂印装·地址北京北新桥駱駝胡同四号

1. 不等式

定义。

1）两个实数或者两个代数式用符号$>$或者$<$連結起来所得的式子，叫做不等式。

2）如果实数a和b的差$a-b$是一个正数，那末数目a叫为大于数目b，并且記作$a>b$。

3）如果实数a和b的差$a-b$是一个負数，那末数目a叫为小于数目b，并且記作$a<b$。

4）在不等式$a>b$和$a<b$中，a叫做不等式的左边，b叫做不等式的右边。

5）形式是$a>b$和$c>d$的两个不等式，或者形式是$a<b$和$c<d$的两个不等式，叫做同向不等式。

6）形式是$a>b$和$c<d$的两个不等式，或者形式是$a<b$和$c>d$的两个不等式，叫做异向不等式。

注。不等式只有在实数域内才有意义，因为对于虛数說来，哪一个虛数算是大于（或者小于）另一个虛数，是不作任何規定的。

2. 不等式的基本性質

1）如果$a>b$，那末$b<a$。

把不等式的右边和左边变换，不等号的方向改变成相反的方向。

証明。

因为　$a>b$ 就是 $a-b>0$（$a-b$ 是正数），$-(b-a)>0$；所以 $b-a<0$。

根据定义得 $b<a$，这就是所要証明的。

2）如果 $a>b$ 并且 $b>c$，那末 $a>c$。

这个性质叫做不等式的傳递性。

証明。

因为　$a>b$ 就是 $a-b>0$；

　　　$b>c$ 就是 $b-c>0$；

所以　$(a-b)+(b-c)>0$——两个正数的和是一个正数；

$$a-b+b-c>0;\quad a-c>0。$$

根据定义得 $a>c$，这就是所要証明的。

3）如果 $a>b$ 并且 c 是任意实数，那末 $a+c>b+c$。

不等式的两边可以都加上一个任意实数，不等号的方向不变。

証明。

因为　$a>b$；$a-b>0$；$a-b+c-c>0$；

$$(a+c)-(b+c)>0,$$

所以

$$a+c>b+c,$$

这就是所要証明的。

推論。

$$a-c>b;\quad a-c+c>b+c;\quad a>b+c。$$

不等式的项可以把符号改成相反的符号从不等式的一边移到另一边。

4）如果 $a>b$ 并且 $c>0$，那末 $ac>bc$。

不等式的两边都乘以（或者除以）一个正数，不等号的方向不变。

証明。

因为　$a>b$；$a-b>0$，

所以　$(a-b)c>0$——两个正数的积是一个正数；

$$ac-bc>0;$$

$$ac>bc,$$

这就是所要証明的。

5）如果 $a>b$ 并且 $c<0$，那末 $ac<bc$。

不等式的两边都乘以（或者除以）一个負数，不等号的方向改变成相反的方向。

証明。

因为　$a>b$；$a-b>0$，

所以　$(a-b)c<0$——一个正数和一个負数的积是一个負数；

$$ac-bc<0;$$

$$ac<bc,$$

这就是所要証明的。

不等式的相加和相减

1）如果 $a>b$ 并且 $c>d$，那末 $a+c>b+d$。

同向不等式各边分别相加，保持原来的不等号。

証明。

因为　$a>b$；$a-b>0$；$c>d$；$c-d>0$；

所以　$(a-b)+(c-d)>0$——两个正数的和是一个正数；

$$(a+c)-(b+d)>0;$$

$$a+c>b+d,$$

这就是所要証明的。

例。

$$a)\quad \begin{array}{r} 2>-3 \\ +)\ \underline{4>\ \ 2} \\ 6>-1 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{r} -6<-4 \\ +)\ \underline{-15<-10} \\ -21<-14 \end{array}$$

2）如果 $\boldsymbol{a>b}$ 并且 $\boldsymbol{c<d}$，那末 $\boldsymbol{a-c>b-d}$。

两个异向不等式各边分别相减，保持被减的不等式的不等号。

証明。

因为　$a>b;\ a-b>0;\ c<d;\ d>c;\ d-c>0;$

所以　$(a-b)+(d-c)>0;\ (a-c)-(b-d)>0;$

$$a-c>b-d,$$

这就是所要証明的。

例。

$$a)\quad \begin{array}{r} 5>\ \ 3 \\ -)\ \underline{7<\ 10} \\ -2>-7 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{r} -6<-4 \\ -)\ \underline{-8>-10} \\ 2<\ \ 6 \end{array}$$

中学数学教学大綱中規定，只研究上面所指出的这些不等式的性質。

“不等式”这个課題的实际教学指出，补充不等式的某些性質，能够使不等式的各种式題和应用題的解法更合理。建議同学生一起来研究不等式的下面三个性質作为补充。

a）如果 $a>b,\ c>d$（a, b, c, d 都是正数），那末 $ac>bd$。

两边都是正数的同向不等式，各边分别相乘，不等号的方向

不变。

b）如果 $a>b$ 并且 $a>0, b>0$，那末 $a^n>b^n$（n 是自然数）。

两边都是正数的不等式，两边都取 n 方，不等号的方向不变。

c）如果 $a>b$ 并且 $a>0, b>0$，那末 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n是自然数）。

两边都是正数的不等式，两边取相同次数的算术根，不等号的方向不变。

这些性质的补充可以用带有适当提示的独立作业的形式教給学生，例如：利用不等式的第四个和第二个基本性質来証明性質"a"；用数学归納法来証明性質"b"；用反証法来証明性質"c"。

不等式的証明

例1。求証：两个不相等的正数的算术平均数大于它們的几何平均数。

已知：$a>0, b>0, a\neq b$。

求証：$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。 (1)

証明。

第一法（根据定义）。

要証明$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，应当証明：

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0。$$

因为，$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}>0$，

这在 $a>0, b>0$ 并且 $a\neq b$ 的时候是正确的。

所以，不等式(1)是正确的。

第二法(分析法)。

假設

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}, \text{ 则 } a+b-2\sqrt{ab}>0,$$

而 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$。这在 $a>0$, $b>0$ 并且 $a\neq b$ 的时候是很明显的，并且所有的变形都是可逆的，所以不等式(1)是正确的。

第三法(综合法)。

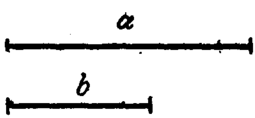
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$，在 $a>0, b>0$ 并且 $a\neq b$ 的时候是一个很明显的不等式。

也就是，$a-2\sqrt{ab}+b>0$； $a+b>2\sqrt{ab}$；

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}。$$

这就是所要証明的。

第四法(几何法)。



$a\neq b.$

图 1

在同一个图里作綫段 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{ab}$。

从直角三角形 OBD 得

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},$$

这就是所要証明的。

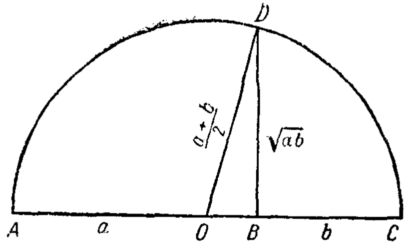


图 2

例 2。求証：如果 a, b, c 都是实数，那末就有不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc。 \qquad (2)$$

証明。

要証明

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc,$$

应当証明

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geqslant 0。$$

因为

$$(a-b)^2 \geqslant 0,\ (a-c)^2 \geqslant 0,\ (b-c)^2 \geqslant 0,$$

所以，很明显

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$

$$=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{2}$$

$$=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2} \geqslant 0。$$

不等式(2)是正确的。

例 3。求証：如果$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，并且 a, b, c, d 都是正数，

那末

$$\frac{a+b}{a}<\frac{c+d}{c}。\qquad (3)$$

証明。

假設 $$\frac{a+b}{a}<\frac{c+d}{c}。$$

因为 $$a>0,\ c>0,$$

則 $$(a+b)c<(c+d)a;$$

$$ac+bc<ac+ad;$$

$$bc<ad。$$

因为 $b>0$ 和 $d>0$, $bd>0$;

所以 $$\frac{bc}{bd}<\frac{ad}{bd};\quad \frac{c}{d}<\frac{a}{b}。$$

因为 $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ 符合已知的条件，并且所有变形都是可逆的，所以不等式(3)是正确的。

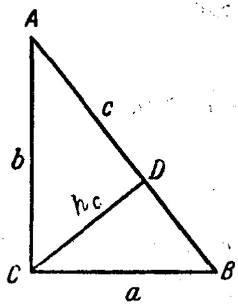


图 3

例 4。求証：在直角三角形中，向斜边所作的高与斜边的和大于这三角形的半周。

已知：$\triangle ABC$, $\angle C=90°$。

求証：$h_c+c>\frac{a+b+c}{2}$。

証明。

从直角三角形 BDC 和 ADC，根据三角形的边的性質，

$$\begin{array}{rl} & h_c>a-BD \\ +) & h_c>b-AD \\ \hline & 2h_c>a+b-(BD+AD) \end{array}$$

但 $$BD+AD=c;\quad 2h_c>a+b-c;$$

所以 $$2h_c+2c>a+b-c+2c;$$

$$h_c+c>\frac{a+b+c}{2},$$

这就是所要証明的。

例 5。决定$\sqrt{5}-\sqrt{3}$和 0.5 两式間的符号。

解。$\sqrt{5}-\sqrt{3}\vee 0.5$。

$\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$; $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\vee 0.5^2$;

$5-2\sqrt{15}+3\vee 0.25$; $7.75\vee 2\sqrt{15}$; $60.0625>60$。

因此,

$$\sqrt{5}-\sqrt{3}>0.5。$$

例 6。决定

$$\sqrt{\frac{9-2\sqrt{14}}{9}}\text{和}\frac{1}{3}(\sqrt{7}-\sqrt{2});$$

間的符号。

解。 $$\sqrt{\frac{9-2\sqrt{14}}{9}}\vee\frac{1}{3}(\sqrt{7}-\sqrt{2});$$

$$\sqrt{\frac{9-2\sqrt{14}}{9}}>0,\ \frac{1}{3}(\sqrt{7}-\sqrt{2})>0;$$

$$\frac{9-2\sqrt{14}}{9}\vee\frac{1}{9}(7-2\sqrt{14}+2);$$

$$\frac{9-2\sqrt{14}}{9}=\frac{9-2\sqrt{14}}{9}。$$

因此,

$$\sqrt{\frac{9-2\sqrt{14}}{9}}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-\sqrt{2})。$$

3. 解含有一个未知数的不等式*

定义。

1）形式是

$$f(x)>\phi(x)\text{或者}f(x)<\phi(x)$$

的不等式叫做含有一个未知数的不等式。

2）满足不等式$f(x)>\phi(x)$的x的值叫做这个不等式的解。

解不等式就是求它的所有的解的集合。

同解不等式

定义。如果不等式

$$f(x)>\phi(x) \tag{1}$$

所有的解都是不等式

$$f_1(x)>\phi_1(x) \tag{2}$$

的解，并且不等式(2)所有的解都是不等式(1)的解，那末这两个不等式叫做同解不等式或者等效不等式。

例如，不等式 $3x+2>10+x$ 和 $3x>x+8$ 是同解不等式，因为第一个不等式所有的解($x>4$) 都是第二个不等式的解，并且第二个不等式所有的解($x>4$)都是第一个不等式的解。

含有未知数的不等式同解性的定理

定理1。 如果在含有未知数的不等式的两边都加上同一个

---

* 含有未知数的不等式也叫做**条件不等式**，不含未知数的不等式叫做**绝对不等式**。

条件不等式，和方程相类似，是要把它解出，而绝对不等式是要証明它的正确性。

对于未知数的所有許可値都有意义的式子(或者任何实数)，那末所得的不等式和原来的不等式同解。

已知：$f(x)>\phi(x)$ 幷且 $F(x)$ 对于 x 的所有許可値都有意义。

求証：不等式

$$f(x)>\phi(x) \tag{1}$$

和

$$f(x)+F(x)>\phi(x)+F(x) \tag{2}$$

同解。

証明。

設数目 a 是不等式(1)的一个解，那末 $f(a)>\phi(a)$。

在所得的数値不等式的两边都加上一个数 $F(a)$，不等号的方向不变。

$$f(a)+F(a)>\phi(a)+F(a)。$$

这个数値不等式表明，$x=a$ 这个値是不等式(2)的解。

設数目 b 是不等式(2)的一个解，那末 $f(b)+F(b)>\phi(b)+F(b)$。

在所得的数値不等式的两边都加上一个数"$-F(b)$"，不等号的方向不变。

$$f(b)+F(b)-F(b)>\phi(b)+F(b)-F(b);$$

$$f(b)>\phi(b)。$$

所得的数値不等式表明，$x=b$ 这个値是不等式(1)的解。

因为第一个不等式所有的解都是第二个不等式的解幷且第二个不等式所有的解都是第一个不等式的解，所以第一个不等式和第二个不等式同解。

推論。

$$f(x)+F(x)>\phi(x);$$

$$f(x)+F(x)-F(x)>\phi(x)-F(x);$$

$$f(x)>\phi(x)-F(x)。$$

含有未知数的不等式的項可以把符号改成相反的符号从不等式的一边移到另一边。

例。

$$3x+5>2x+8;\ 3x-2x>8-5;\ x>3。$$

定理 2。 如果把含有未知数的不等式的两边都乘以(或者除以)同一个正数,那末所得的不等式和原来的不等式同解。

已知: $f(x)>\phi(x)$; $m>0$。

求証: 不等式

$$f(x)>\phi(x) \tag{1}$$

和

$$m\cdot f(x)>m\cdot\phi(x) \tag{2}$$

同解。

証明。

設数目 a 是第一个不等式的一个解, 那末 $f(a)>\phi(a)$。

把所得的数值不等式的两边都乘以正数 m, 不等号的方向不变。

$$m\cdot f(a)>m\cdot\phi(a)。$$

这个数值不等式表明; $x=a$ 这个值是第二个不等式的解。

設数目 b 是第二个不等式的一个解, 那末

$$m\cdot f(b)>m\cdot\phi(b)。$$

把所得的数值不等式的两边都除以正数 m (乘以正数 $\frac{1}{m}$),

不等号的方向不变。

$$\frac{m \cdot f(b)}{m} > \frac{m \cdot \phi(b)}{m};$$

$$f(b) > \phi(b)。$$

这个数值不等式表明，$x=b$ 这个值是第一个不等式的解。

第一个不等式和第二个不等式同解。

定理 3。 **如果把含有未知数的不等式的两边都乘以（或者除以）同一个負数并且把不等号的方向改变成相反的方向，那末所得的不等式和原来的不等式同解。**

已知：$f(x) > \phi(x)$；$m < 0$。

求証：不等式

$$f(x) > \phi(x) \quad (1)$$

和

$$m \cdot f(x) < m \cdot \phi(x) \quad (2)$$

同解。

証明。

設数目 a 是第一个不等式的一个解，那末 $f(a) > \phi(a)$。

把所得的数值不等式的两边都乘以負数 m，不等号的方向改变成相反的方向。

$$m \cdot f(a) < m \cdot \phi(a)。$$

这个数值不等式表明，$x=a$ 这个值是第二个不等式的解。

設数目 b 是第二个不等式的一个解，那末

$$m \cdot f(b) < m \cdot \phi(b)。$$

把所得的数值不等式的两边都除以負数 m，不等号的方向改变成相反的方向。