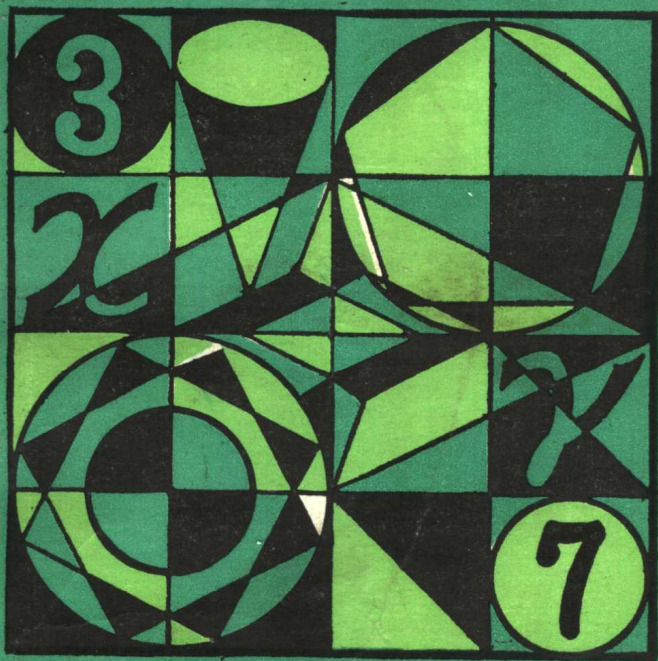


G634.606

初中数学题解百法集锦

蒋金镛 编著



北京师范学院出版社

初中数学题解百法集锦

蒋金镛 编著

北京师范学院出

1990年·北

内容简介:

本书作者长期从事中学数学教学及教学研究工作。本书介绍了初中数学(代数及几何)的百余种巧解习题方法,对中学生拓宽解题思路,培养多向思维能力是很有益处的,是中学生的良师益友。

初中数学题解百法集锦

蒋金镛 编著

北京师范学院出版社出版

(北京阜成门外花园村)

全国各地新华书店经销 三河科教印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 5.25 字数: 102千
1990年10月北京第一版 1990年10月北京第一次印刷

印数: 1—31000册

ISBN 7-81014-494-4/G·417

定价: 1.75元

目 录

一、初中代数巧解法	1
(一)巧解方程四十法	1
1. 一元二次方程简化求根公式法	1
2. 巧用乘法公式法	2
3. 巧用“非负数法”	3
4. 借用定义域法	6
5. 借用实数的基本性质法	7
6. 借用方程的根的定义直观定根法	9
7. 降次法	10
8. 利用巧除法	11
9. 借用约数定义法	11
10. 巧用根有“1”法	12
11. 利用算术根定义法	14
12. 常元法	15
13. 算术平均值代换法	16
14. 三角法	17
15. 缩小方程有解范围法	18
16. 共轭根式法	19
17. 借用不等式性质法	20
18. 巧用中间变量法	21
19. 两点间的距离公式法	21
20. 换元法	22
21. 巧用韦达定理法	24
22. 利用合分比定理法	25

23. 借用“ $a^{\log_a N} = N (a > 0, a \neq 1, N > 0)$ ”法	26
24. 借用根的判别式法	27
25. 配凑法	27
26. 凑“1”法	28
27. 巧用“1”法	28
28. 利用辅助方程法	30
29. 善用隐含条件法	31
30. 巧用“ $y = mx$ ”法	31
31. 巧用“ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ”法	33
32. 运用算术平方根定义法	36
33. 巧用“说明式”法	37
34. 巧用“ $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ ”法	38
35. 巧拆分子分母法	39
36. 巧用综合除法	40
37. 应用绝对值定义法	41
38. 运用表格法	41
39. 角尺法	46
40. 图象法	48
(二)巧解代数式求值问题十五法	50
1. 巧用字母替换法	50
2. 巧用公式法	51
3. 巧用定比法	51
4. 巧用非负数性质法	51
5. 归一法	52
6. 巧用基本概念法	53
7. 巧用观察法	53
8. 因式分解法——提取公因式法	54
9. 巧用恒等式法	54

10. 巧拆相消法	55
11. 首尾结合法 (即高斯法)	55
12. 借助三角公式法	56
13. 借助幂及对数法则法	56
14. 借助平均数公式法	56
15. 借用整体代入法	57
(三) 数的大小比较九法	58
1. 平方法	58
2. 作差法	59
3. 求商法	59
4. 归一法	60
5. 分子、分母有理化法	60
6. 选取介值传递比较法	61
7. 反证法	62
8. 对数法	62
9. 放缩法	62
(四) 不等式证法十二种	63
1. 比较法	63
2. 配方法	64
3. 巧用“1”法	65
4. 同向相加法	65
5. 倒推法	66
6. 平方法	66
7. 代入法	67
8. 反证法	67
9. 三角法	67
10. 几何证法	68
11. 同向相乘法	68
12. 综合分析法	69

(五)特殊三角形判定五法	69
1. 方程性质法	69
2. 正弦定理法	70
3. 余弦定理法	70
4. 借用非负数性质法	71
5. 三角形面积公式法	71

二、平面几何证法四十八种

1. 综合法	73
2. 分析法	74
3. 反证法	75
4. 同一法	76
5. 穷举法	77
6. 基本图形分析法	79
7. 联想定义、概念法	81
8. 活用三角形内角和定理法	82
9. 利用平行四边形性质法	84
10. 利用平行切割定理法	85
11. 相似形法	88
12. 利用合线段比、积定理法	91
13. 利用垂径定理证法	92
14. 利用弦长定理法	94
15. 巧用托勒密逆定理证法	95
16. 利用三角形外心、内心、重心、垂心法	97
17. 添作辅助圆法	100
18. 利用设辅助未知角法	102
19. 等积法	104
20. 轴对称法	106
21. 投影法	108

22. 旋转法	109
23. 割补法	111
24. 补形法	112
25. 重叠法	113
26. 借用特殊类题法	115
27. 巧用 $Rt\triangle$ 的 R 与 r 公式法	117
28. 运用正弦定理法	119
29. 利用余弦定理法	121
30. 线段参数法	124
31. 代数法	125
32. 运用方程法	127
33. 平移法	129
34. 动点位置探索法	131
35. 三点定位法	133
36. 巧用待定点法	135
37. 解析法	138
38. 全等法	140
39. 利用邻补角相等证法	142
40. 利用射影定理证法	143
41. 利用圆幂定理证法	144
42. 四点共圆法	146
43. 利用三角形中线长公式法	147
44. 对折法	150
45. 勾股定理法	150
46. 向量证法	151
47. 三角法	151
48. 添作辅助线法十五种	154

一、初中代数巧解法

不论是求代数式的值、解方程，还是比较数的大小、解证不等式，都是中学数学基础知识的重点内容。即使初中学习阶段，数学也是题型广，思路活，灵巧性大，涉及知识面广的，因而，解法也是特别多的。我们除了要熟悉数学的常规解法外，还应努力掌握和了解数学的一些特殊解法，这样才能巩固课本知识，扩大解题思路，提高解题能力，激发创新欲望。为此，将介绍巧解方程四十法，巧求代数式的值十五法，数的大小比较九法和不等式证法十二种，供大家参考。当然，任何题目，“解无定法”。我们对某种数学解题方法不能机械地生搬硬套，只能具体问题具体分析。只要我们独立思考，潜心探索，在全面理解和掌握有关概念、定理、公式和基本的常规解法的基础上，认真观察题型特点，灵活应用所学知识，发挥自己的想象力，就一定会探求到更多更好的巧解方法。

(一)巧解方程四十法

1. 一元二次方程简化求根公式法

初中课本里介绍了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的各种解法，其中有一个公式法，即 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

$$(b^2 - 4ac \geq 0).$$

当 $b = 2k$ (k 是整数、分数, 甚至是不带分母的二次根式) 时, 可以用一个简便的求根公式求解.

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (k^2 - ac \geq 0).\end{aligned}$$

例1 解方程 $5x^2 - 8x - 21 = 0$

解: $\because a = 5, k = -4, c = -21,$

$$k^2 - ac = (-4)^2 - 5 \times (-21) = 16 + 105 = 121 > 0.$$

$$\therefore x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{121}}{5}$$

$$\therefore x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{7}{5}.$$

2. 巧用乘法公式法

乘法公式不仅在化简, 求值, 恒等变形, 因式分解, 分母有理化等各类题目中有广泛应用, 而且在解方程中也颇有用处.

例1 解方程 $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$

分析: 这一方程如果按 x 的多项式展开, 将有四次方出现, 但若细心观察, 不难发现, 此题可应用乘法公式巧解.

由于 $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 故设出 $u = x - 1$
 $v = x^2 + x + 1$, 那么, 原方程可变形为 $7u^2 + 13uv - 2v^2 = 0$.

这样解得 $\frac{u}{v} = \frac{1}{7}$ 或者 $\frac{u}{v} = -2$, 将 $u = x - 1$ 和 $v = x^2 + x + 1$

($\neq 0$) 代入, 即可得出 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 与 $2x^2 + 3x + 1 = 0$. 前者

解出 $x=2$ 与 4 ，后者解出 $x=-1$ 与 $-\frac{1}{2}$ 。原方程有四个根：

$x_1=2, x_2=4, x_3=-1, x_4=-\frac{1}{2}$ 。解此方程关键在于巧用乘法公式。

例2 解方程 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{x^2+5x-6} = 51-2x$

解：原方程可变形为 $[(x-1) + 2\sqrt{(x-1)(x+6)} + (x+6)] + (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6}) - 56 = 0$ ，即 $(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6}) - 56 = 0$ ， $(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} + 8)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} - 7) = 0$ 。

因 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} + 8 > 0$ ，故 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} - 7 = 0$ 。
故此方程有解 $x=10$ 。

如果读者有兴趣，可试解下列方程：

(1) 解方程 $\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{2x^2+5x-9} = 7$

(2) 解方程 $(16x^2-9)^2 + (16x^2-9)(9x^2-16) + 9(x^2-16) = (25x^2-25)^2$ 。

例3 解方程 $(x-1)^4 + (x-7)^4 = 2402$

表面看来此题不好下手，仔细观察：

$(x-1)^4 = (x-4+3)^4, (x-7)^4 = (x-4-3)^4$ 。

$\therefore$ 令 $x-4=A$ 时，即可简化。

解：令 $A=x-4$ ，则有 $(A+3)^4 + (A-3)^4 = 2402$ ，

$[(A+3)^2 - (A-3)^2]^2 + 2(A+3)^2(A-3)^2 = 2402$ ，

整理得 $(A^2+70)(A^2-16)=0$ （解略）。

3. 巧用“非负数法”

“非负数”的概念及其应用，在中学各年级的数学教材

中，占有一定的地位，虽然并无系统叙述它的章节，但是在复习阶段，如果教师能对它加以归纳和系统化，就可以使学生更自觉地运用这个概念，从而对于掌握和运用绝对值和算术根等概念有一定的帮助。

中学代数教材，关于“非负数”的概念，主要有下列几个方面。

a. 绝对值：正数的绝对值就是它的本身，零的绝对值是零，负数的绝对值是它的相反的正数。

$$|a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0), \\ -a, & (a < 0). \end{cases}$$

上式表示，对于符号 $|a|$ ，恒有 $|a| \geq 0$ ，它表示 $|a|$ 不小于零。为了方便，我们把 $|a| \geq 0$ 叫做“非负数”。

b. 算术根：正数的正的方根叫算术根，零的算术根是零。

当 a 是正数， n 是整数时， $\sqrt[n]{a}$ 表示算术根。

即 $\sqrt[n]{a} \geq 0$ ，（其中 $a \geq 0$ ， n 为整数）我们把 $\sqrt[n]{a} \geq 0$ 叫做“非负数”。

c. 一个数的完全平方：在实数范围内，恒有 $a^2 \geq 0$ ，它也是“非负数”。

为了沟通算术根和绝对值两个概念，可以指出如下的关系：

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0), \\ -a(a < 0). \end{cases}$$

在解题的过程中，经常用到“非负数”的如下两个性质：

(1) 有限个“非负数”之和仍然是非负数。

(2) 如果有限个“非负数”之和等于零，则每个“非负数”

均必等于零。

例1 解方程

$$|y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4| + (2x - y - 7)^2 = 0$$

解：由于两个非负数之和为零，则每个“非负数”为零，
所以原方程变为

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\text{由(2), 得 } y = 2x - 7. \quad (3)$$

(3)代入(1)并简化，得 $3x^2 - 22x + 39 = 0$,

$$\text{得 } x_1 = \frac{13}{3}, x_2 = 3;$$

$$\text{分别代入(3)得 } y_1 = \frac{5}{3}, y_2 = -1.$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } \begin{cases} x_1 = \frac{13}{3}, x_2 = 3; \\ y_1 = \frac{5}{3}, y_2 = -1. \end{cases}$$

例2 解方程 $\sqrt{2x+3y-7} + \sqrt{3x-2y-5} = 0$

$$\text{解：原方程变为 } \begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ 3x-2y-5=0, \end{cases}$$

$$\text{解之得 } x = \frac{29}{13}, y = \frac{11}{13}.$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } \begin{cases} x = \frac{29}{13}, \\ y = \frac{11}{13}. \end{cases}$$

例3 已知 $\log_a(x^2+1) + \log_a(y^2+4) = \log_a 8 + \log_a x$

$+ \log_a y$

解: $\because \log_a (x^2 + 1) + \log_a (y^2 + 4) = \log_a 8 + \log_a x + \log_a y$

则有 $(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$

$$x^2 y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 = 8xy$$

$$(x^2 y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

$$(xy - 2)^2 + (2x - y)^2 = 0;$$

$$\text{必有 } \begin{cases} xy - 2 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases} \text{ (不合题意)}$$

$\therefore$ 所求实数 $x = 1, y = 2$.

4. 借用定义域法

定义域是函数赖以存在的土壤, 在中学代数中的重要性是不言而喻的。然而, 学生只重运算, 只重技巧, 而忽视定义域在解题中的应用。下面举例说明定义域巧用的技巧。

例1 解方程 $|x + 1| + |3 - x| = 4$

解: (1) 当 $x < -1$ 时,

$$-(x + 1) + 3 - x = 4 \Rightarrow x = -1.$$

$\therefore$ 此时无解。

(2) 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时,

$$x + 1 + 3 - x = 4 \Rightarrow 4 = 4;$$

$\therefore$ 此时解为 $-1 \leq x \leq 3$.

(3) 当 $x > 3$ 时,

$$1 + x - 3 + x = 4 \Rightarrow x = 3;$$

$\therefore$ 此时无解。

因此原方程的解是 $-1 \leq x \leq 3$.

例2 解方程 $\sqrt{2x+9} - \sqrt{2-x} = \sqrt{5-x}$

解: 为使根式有意义, 必须使

$$2x+9 \geq 0, 2-x \geq 0, 5-x \geq 0;$$

$$\text{于是 } -\frac{9}{2} \leq x \leq 2. \quad (1)$$

进一步考虑, 每个根式应是非负的,

$$\text{则 } \sqrt{2x+9} \geq \sqrt{2-x}, \text{ 且 } \sqrt{2x+9} \geq \sqrt{5-x};$$

$$\text{于是 } x \geq -\frac{4}{3}. \quad (2)$$

$$\text{由(1)和(2)得 } -\frac{3}{4} \leq x \leq 2. \quad (3)$$

把原方程进行变形, 经二次平方化简得

$$3x^2 + 11x - 9 = 0,$$

$$\text{解得 } x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{229}}{12}.$$

$$\text{经检验: } x_1 = \frac{-11 + \sqrt{229}}{12} \text{ 是原方程的根.}$$

5. 借用实数的基本性质法

初中《代数》第四册194页“初中代数总复习题参考题”第3(1)题:

若 $(a-1)^2 + (b+2)^2 = 0$, a, b 为实数, 求 a, b .

这是一个二元方程的求解题。一般地说, 二元方程的解是不定的(即有无数组值可以满足同一个方程), 但某些特殊类型的二元方程, 可有确定的解。此题属于这种类型。

解: $(a-1)^2 + (b+2)^2 = 0$ 需且只需 $a-1=0, b+2=0$,

$$\text{故 } a=1, b=-2.$$

这里用到了实数的一个基本性质：设 $a, b, c, \dots, r$ 为实数，如果 $a^2 + b^2 + c^2 + \dots + r^2 = 0$ ，则 $a = b = c = \dots = r = 0$. (*)

例1 若 $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$ ， x, y 为实数，求 x, y .

解：分别对 x, y 配方，原方程可化为

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 0, \text{ 故 } x = -1, y = 3.$$

例2 若 a, b, c 为实数，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，求证 $a = b = c$.

解：原式可化为 $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0$,

$$\text{即 } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0,$$

$$\text{故 } a-b = b-c = c-a = 0,$$

$$\text{就是 } a = b = c.$$

为了加深对实数基本性质的认识，我们再举几个例子：

例3 设 $x^2y^2 - 20xy + x^2 + y^2 + 81 = 0$ ，且 x, y 为实数，求 $\log_{\sqrt{3}} x$.

解：原方程可化为： $(x-y)^2 + (xy-9)^2 = 0$,

$$\text{故 } x-y = xy-9 = 0, \text{ 解得 } x = y = \pm 3.$$

$$\text{取 } x = 3 \text{ 时,}$$

$$\text{则 } \log_{\sqrt{3}} x = \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2.$$

例4 试求 $\log_a(x^2+1) + \log_a(y^2+4) = \log_a 8 + \log_a x + \log_a y$ ($a > 0, a \neq 1$) 的 x, y 的实数解.

解：由原方程得

$$\log_a [(x^2+1)(y^2+4)] = \log_a (8xy),$$

$$\therefore (x^2+1)(y^2+4) = 8xy,$$

展开、移项，可得

$$x^2y^2 + y^2 + 4x^2 - 8xy + 4 = 0$$

$$(4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2y^2 - 4xy + 4) = 0,$$

于是 $(2x - y)^2 + (xy - 2)^2 = 0$.

$\therefore x, y$ 为实数,

$$\therefore \begin{cases} 2x - y = 0 \\ xy - 2 = 0, \end{cases}$$

解之, 取正值得 $x = 1, y = 2$.

6. 借用方程的根的定义直观定根法

例1 解方程 $(x + \sqrt{2} + 3)(x + \sqrt{2} + 4) = 74$

分析: 此方程有何特殊地方? 仔细分析就可以发现: 方程左边的两个因式 $(x + \sqrt{2} + 3)$ 和 $(x + \sqrt{2} + 4)$ 之差为1, 积为72, 符合这种情况的只有两种, 即8, 9和-8, -9.

解: 原方程可改写为 $x + \sqrt{2} + 3 = 8$,

$$x + \sqrt{2} + 3 = -9.$$

解之得

$$x_1 = 5 - \sqrt{2}, x_2 = -12 - \sqrt{2}.$$

例2 解方程 $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} = 2$

解: 由原方程可知大括号内之值等于4, 同理中括号、小括号内的值亦应等于4, 故有

$$\frac{1}{2} x^2 + 2 = 4, \text{ 解之 } x = \pm 2.$$

例3 解方程 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}}{x + 1} - 1$

解:

$$\therefore \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1,$$