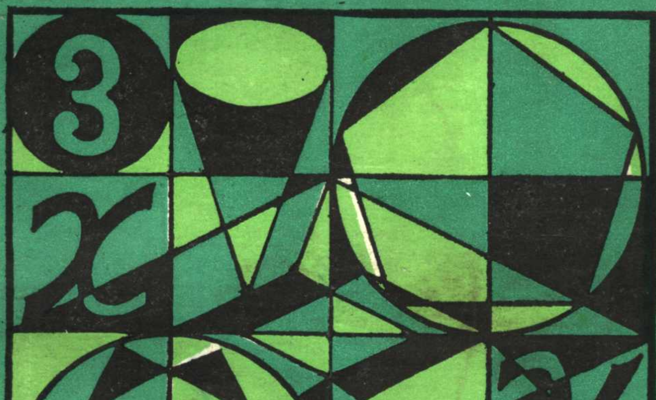
初中数学题解百法集锦

蒋金镛 编著



北京师范学院出版社

初中数学题解百法集锦

蒋金镛　编著

北京师范学院出

1990年·北

内容简介：

本书作者长期从事中学数学教学及教学研究工作。本书介绍了初中数学(代数及几何)的百余种巧解习题方法，对中学生拓宽解题思路，培养多向思维能力是很有益处的，是中学生的良师益友。

初中数学题解百法集锦

蒋金镛 编著

北京师范学院出版社出版

(北京阜成门外花园村)

全国各地新华书店经销 三河科教印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5.25 字数：102千

1990年10月北京第一版 1990年10月北京第一次印刷

印数：1—31000册

ISBN 7-81014-494-4/G·417

定价：1.75元

目　　录

二、平面几何证法四十八种

一、初中代数巧解法

不论是求代数式的值、解方程，还是比较数的大小、解证不等式，都是中学数学基础知识的重点内容。即使初中学习阶段，数学也是题型广，思路活，灵巧性大，涉及知识面广的，因而，解法也是特别多的。我们除了要熟悉数学的常规解法外，还应努力掌握和了解数学的一些特殊解法，这样才能巩固课本知识，扩大解题思路，提高解题能力，激发创新欲望。为此，将介绍巧解方程四十法，巧求代数式的值十五法，数的大小比较九法和不等式证法十二种，供大家参考。当然，任何题目，“解无定法”。我们对某种数学解题方法不能机械地生搬硬套，只能具体问题具体分析。只要我们独立思考，潜心探索，在全面理解和掌握有关概念、定理、公式和基本的常规解法的基础上，认真观察题型特点，灵活应用所学知识，发挥自己的想象力，就一定会探求到更多更好的巧解方法。

(一)巧解方程四十法

1. 一元二次方程简化求根公式法

初中课本里介绍了一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的各种解法，其中有一个公式法，即$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$(b^2-4ac\geqslant0)$。

当$b=2k$（k是整数、分数，甚至是不带分母的二次根式）时，可以用一个简便的求根公式求解。

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

$$(k^2-ac\geqslant0)。$$

例1 解方程 $5x^2-8x-21=0$

解：$\because\quad a=5,\ k=-4,\ c=-21,$

$k^2-ac=(-4)^2-5\times(-21)=16+105=121>0$。

$$\therefore\quad x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{121}}{5}$$

$$\therefore\quad x_1=3;\quad x_2=-\frac{7}{5}。$$

2. 巧用乘法公式法

乘法公式不仅在化简，求值，恒等变形，因式分解，分母有理化等各类题目中有广泛应用，而且在解方程中也颇有用处。

例1 解方程 $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

分析：这一方程如果按x的多项式展开，将有四次方出现，但若细心观察，不难发现，此题可应用乘法公式巧解。

由于$(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$，故设出$u=x-1$ $v=x^2+x+1$，那么，原方程可变形为$7u^2+13uv-2v^2=0$。

这样解得$\frac{u}{v}=\frac{1}{7}$或者$\frac{u}{v}=-2$，将$u=x-1$和$v=x^2+x+1$ $(\neq0)$代入，即可得出$x^2-6x+8=0$与$2x^2+3x+1=0$。前者

解出$x=2$与4，后者解出$x=-1$与$-\frac{1}{2}$。原方程有四个根：

$x_1=2$，$x_2=4$，$x_3=-1$，$x_4=-\frac{1}{2}$。解此方程关键在于巧用乘法公式。

例2 解方程 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$

解：原方程可变形为$[(x-1)+2\sqrt{(x-1)(x+6)}+(x+6)]+(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6})-56=0$，即$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6})^2+(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6})-56=0$，$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}+8)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}-7)=0$。

因$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}+8>0$，故$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}-7=0$

故此方程有解$x=10$。

如果读者有兴趣，可试解下列方程：

（1）解方程$\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=7$

（2）解方程$(16x^2-9)^2+(16x^2-9)(9x^2-16)+9(x^2-16)=(25x^2-25)^2$。

例3 解方程 $(x-1)^4+(x-7)^4=2402$

表面看来此题不好下手，仔细观察：

$(x-1)^4=(x-4+3)^4$，$(x-7)^4=(x-4-3)^4$。

∴ 令$x-4=A$时，即可简化。

解：令$A=x-4$，则有$(A+3)^4+(A-3)^4=2402$，

$[(A+3)^2-(A-3)^2]^2+2(A+3)^2(A-3)^2=2402$，

整理得$(A^2+70)(A^2-16)=0$（解略）。

3. 巧用“非负数法”

“非负数”的概念及其应用，在中学各年级的数学教材

中，占有一定的地位，虽然并无系统叙述它的章节，但是在复习阶段，如果教师能对它加以归纳和系统化，就可以使学生更自觉地运用这个概念，从而对于掌握和运用绝对值和算术根等概念有一定的帮助。

中学代数教材，关于"非负数"的概念，主要有下列几个方面。

a． **绝对值**：正数的绝对值就是它的本身，零的绝对值是零，负数的绝对值是它的相反的正数。

$$|a|=\begin{cases}a, & (a\geqslant 0),\\ -a, & (a<0).\end{cases}$$

上式表示，对于符号$|a|$，恒有$|a|\geqslant 0$，它表示$|a|$不小于零。为了方便，我们把$|a|\geqslant 0$叫做"非负数"。

b． **算术根**：正数的正的方根叫算术根，零的算术根是零。

当a是正数，n是整数时，$\sqrt[n]{a}$表示算术根。

即$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$，（其中$a\geqslant 0$，n为整数）我们把$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$叫做"非负数"。

c． **一个数的完全平方**：在实数范围内，恒有$a^2\geqslant 0$，它也是"非负数"。

为了沟通算术根和绝对值两个概念，可以指出如下的关系：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\ -a(a<0).\end{cases}$$

在解题的过程中，经常用到"非负数"的如下两个性质：

（1）有限个"非负数"之和仍然是非负数。

（2）如果有限个"非负数"之和等于零，则每个"非负数"

均必等于零。

例1　解方程

$$|y^2-x^2+2x+2y+4|+(2x-y-7)^2=0$$

解：由于两个非负数之和为零，则每个“非负数”为零，所以原方程变为

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y+4=0, & (1)\\ 2x-y-7=0。 & (2)\end{cases}$$

由（2），得　$y=2x-7$。　　（3）

（3）代入（1）并简化，得$3x^2-22x+39=0$，

得　$x_1=\frac{13}{3}$，$x_2=3$；

分别代入（3）得$y_1=\frac{5}{3}$，$y_2=-1$。

∴　原方程的解为$\begin{cases} x_1=\frac{13}{3}, & x_2=3;\\ y_1=\frac{5}{3}, & y_2=-1。\end{cases}$

例2　解方程　$\sqrt{2x+3y-7}+\sqrt{3x-2y-5}=0$

解：原方程变为$\begin{cases}2x+3y-7=0,\\ 3x-2y-5=0;\end{cases}$

解之得$x=\frac{29}{13}$，$y=\frac{11}{13}$。

∴　原方程的解为$\begin{cases}x=\frac{29}{13},\\ y=\frac{11}{13}。\end{cases}$

例3　已知$\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x$

$+\log_a y$

解： ∵ $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y$

则有 $$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

$$x^2y^2+4x^2+y^2+4=8xy$$

$$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2-4xy+y^2)=0$$

$$(xy-2)^2+(2x-y)^2=0;$$

必有 $\begin{cases} xy-2=0, \\ 2x-y=0; \end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-2 \end{cases}$ （不合题意）

∴ 所求实数$x=1$，$y=2$。

4. 借用定义域法

定义域是函数赖以存在的土壤，在中学代数中的重要性是不言而喻的。然而，学生只重运算，只重技巧，而忽视定义域在解题中的应用。下面举例说明定义域巧用的技巧。

例1 解方程 $|x+1|+|3-x|=4$

解：（1）当$x<-1$时，

$$-(x+1)+3-x=4\Rightarrow x=-1.$$

∴ 此时无解。

（2）当$-1\leqslant x\leqslant 3$时，

$$x+1+3-x=4\Rightarrow 4=4;$$

∴ 此时解为$-1\leqslant x\leqslant 3$。

（3）当$x>3$时，

$$1+x-3+x=4\Rightarrow x=3;$$

∴ 此时无解。

因此原方程的解是$-1\leqslant x\leqslant 3$。

例2　解方程　$\sqrt{2x+9}-\sqrt{2-x}=\sqrt{5-x}$

解：为使根式有意义，必须使

$2x+9\geqslant 0$，$2-x\geqslant 0$，$5-x\geqslant 0$；

于是　$-\frac{9}{2}\leqslant x\leqslant 2$。　　（1）

进一步考虑，每个根式应是非负的，

则　$\sqrt{2x+9}\geqslant\sqrt{2-x}$，且$\sqrt{2x+9}\geqslant\sqrt{5-x}$；

于是　$x\geqslant-\frac{4}{3}$。　　（2）

由（1）和（2）得　$-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 2$。　　（3）

把原方程进行变形，经二次平方化简得

$$3x^2+11x-9=0,$$

解得　$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{229}}{12}$。

经检验：$x_1=\frac{-11+\sqrt{229}}{12}$是原方程的根。

5．借用实数的基本性质法

初中《代数》第四册194页“初中 代 数总复习题参考题”第3（1）题：

若$(a-1)^2+(b+2)^2=0$，a、b为实数，求a、b。

这是一个二元方程的求解题．一般地说，二元方程的解是不定的（即有无数组值可以满足同一个方程），但某些特殊类型的二元方程，可有确定的解．此题属于这种类型．

解：$(a-1)^2+(b+2)^2=0$需且只需$a-1=0$，$b+2=0$，

故$a=1$，$b=-2$。

这里用到了实数的一个基本性质：设 a，b，c，……，r 为实数，如果 $a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots+r^2=0$，则 $a=b=c=\cdots\cdots=r=0$。 （*）

例1 若 $x^2+2x+y^2-6y+10=0$，x、y 为实数，求 x、y。

解：分别对 x、y 配方，原方程可化为

$(x+1)^2+(y-3)^2=0$，故 $x=-1$，$y=3$。

例2 若 a、b、c 为实数，且 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，求证 $a=b=c$。

解：原式可化为 $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=0$，

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，

故 $a-b=b-c=c-a=0$，

就是 $a=b=c$。

为了加深对实数基本性质的认识，我们再举几个例子：

例3 设 $x^2y^2-20xy+x^2+y^2+81=0$，且 x、y 为实数，求 $\log_{\sqrt{3}}x$。

解：原方程可化为：$(x-y)^2+(xy-9)^2=0$，

故 $x-y=xy-9=0$，解得 $x=y=\pm3$。

取 $x=3$ 时，

则 $\log_{\sqrt{3}}x=\log_{\sqrt{3}}3=\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$。

例4 试求 $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a8+\log_ax+\log_ay$ $(a>0，a\neq1)$ 的 x、y 的实数解。

解：由原方程得

$$\log_a[(x^2+1)(y^2+4)]=\log_a(8xy)，$$

$$\therefore\quad (x^2+1)(y^2+4)=8xy，$$

展开、移项，可得

$$x^2y^2+y^2+4x^2-8xy+4=0$$

$$(4x^2-4xy+y^2)+(x^2y^2-4xy+4)=0,$$

于是 $(2x-y)^2+(xy-2)^2=0$。

$\because$ x，y为实数，

$$\therefore \begin{cases}2x-y=0\\ xy-2=0,\end{cases}$$

解之，取正值得$x=1$，$y=2$。

6. 借用方程的根的定义直观定根法

例1 解方程$(x+\sqrt{2}+3)(x+\sqrt{2}+4)=74$

分析：此方程有何特殊地方？仔细分析就可以发现：方程左边的两个因式$(x+\sqrt{2}+3)$和$(x+\sqrt{2}+4)$之差为1，积为72，符合这种情况的只有两种，即8，9和-8，-9。

解：原方程可改写为$x+\sqrt{2}+3=8$，

$x+\sqrt{2}+3=-9$。

解之得

$$x_1=5-\sqrt{2}，x_2=-12-\sqrt{2}。$$

例2 解方程$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)+2\right]+2\right\}=2$

解：由原方程可知大括号内之值等于4，同理中括号、小括号内的值亦应等于4，故有

$\frac{1}{2}x^2+2=4$，解之$x=\pm2$。

例3 解方程$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x+1}-1$

解：

$$\because \begin{cases}x^2-1\geqslant0\\ 1-x^2\geqslant0\\ x+1\neq0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^2=1\\ x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow x=1,$$