高 等 学 校 教 材

常微分方程教程

第二版

丁同仁　李承治　编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

常微分方程教程

第二版

丁同仁　李承治　编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是作者在北京大学数学学院多年教学实践的基础上编写而成的,第一版于1991年出版。作者在第二版准备的过程中,在力求保持原有风格、特色的同时,对部分内容作了适当调整和精简,在叙述上也作了很多改进。全书仍为十一章,各章内容为:基本概念;初等积分法;存在和唯一性定理;奇解;高阶微分方程;线性微分方程组;幂级数解法;定性理论与分支理论初步;边值问题;首次积分;一阶偏微分方程。

本书可作为数学专业常微分方程课的教材,也可供有关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程教程/丁同仁,李承治编.—2版.—北京:高等教育出版社,2004重印

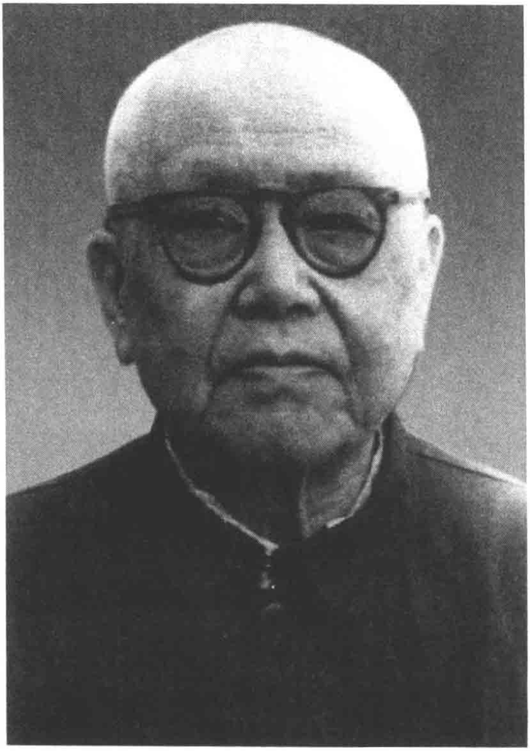
ISBN 7-04-014369-0

Ⅰ.常... Ⅱ.①丁...②李... Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第062093号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京四季青印刷厂		
		版　　次	1991年4月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2004年7月第2版
印　　张	12.25	印　　次	2004年8月第2次印刷
字　　数	310 000	定　　价	18.50元

谨以此书纪念我国微分方程界的先辈
申又枨教授的九十诞辰以及他对数学的贡献[1]



申又枨教授(1901 - 1978)

[1] 见参考文献[32]

第一版序言

常微分方程已有悠久的历史，而且继续保持着进一步发展的活力，其主要原因是它的根源深扎在各种实际问题之中.

牛顿最早采用数学方法研究二体问题，其中需要求解的运动方程是常微分方程. 他以非凡的积分技巧解决了它，从而在理论上证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆，澄清了当时关于地球将坠毁于太阳的一种悲观论点. 另外，莱布尼茨也经常与牛顿在通信中互相提出求解微分方程的挑战.

嗣后，许多著名数学家，例如伯努利 (家族) 、欧拉、高斯、拉格朗日和拉普拉斯等，都遵循历史传统，把数学研究结合于当时许多重大的实际力学问题，在这些问题中通常离不开常微分方程的求解法. 海王星的发现是通过对常微分方程的近似计算得到的，这曾是历史上的一段佳话. 9 世纪在天体力学上的主要成就应归功于拉格朗日对线性常微分方程的工作.

在上世纪早期，柯西给微积分学注入了严格性的要素，同时他也为微分方程的理论奠定了一个基石 —— 解的存在性和唯一性定理. 到上世纪末期，庞加莱和李雅普诺夫分别创立了常微分方程的定性理论和稳定性理论，这些工作代表了当时非线性力学的最新方法. 本世纪初，伯克霍夫继承并发展了庞加莱在天体力学中的分析方法，创立了拓扑动力系统和各态历经的理论，把常微分方程的研究提高到新的水平.

自本世纪 20 年代 (特别是第二次世界大战) 以来，在众多应用数学家的共同努力下，常微分方程的应用范围不断扩大并深入到机械、电讯、化工、生物、经济和其他社会学科的各个领域，各种成功的实例是不胜枚举的. 自 60 年代以后，常微分方程定性理论发展到现代微分动力系统的理论，对研究一些奇异的非线性现象作出了贡献，构成现代大范围分析学中出色的篇章. 另外，现代

的 (最优) 控制理论、微分对策论以及泛函微分方程理论的基本思想，都起源于常微分方程，而且在方法上也与后者有密切的关系.

自然，在一本基础课教程中，我们不能详细介绍上面谈到的每个方面，而只能主要介绍常微分方程的一些常用解法和基本定理. 这些内容将为数学、力学和物理系 (科) 的大学生在后继学习中服务. 尽管在体系上缺少完美性，然而它们对于数学联系实际和各种数学方法的灵活运用是不可缺少的基本训练. 无疑，这正是常微分方程课程的一个特色.

在每一章的标题下面，我们对全章的主题和某些背景都作了概括的介绍. 下面，仅就编写本教程中的一些考虑作一简要说明.

在第一章 (基本概念) 中，只介绍了微分方程及其解的定义和几何解释，以便尽快进入主题；而把从实际问题引导出微分方程的例子分放到后面的章节，这就可以在导出微分方程之后立即进行求解和对结果的分析.

在介绍初等积分法的第二章中，以恰当方程和积分因子为主线贯穿各种求解法. 对于不能容纳于这条线索之内的常数变易法，先在本章中以习题的方式出现，而把一般的讨论留待第六章 (线性方程组) 中进行.

微分方程最重要的理论基础是解的存在性、唯一性定理，和解对初值 (及参数) 的连续性、可微性定理. 我们把这两部分内容分别放在第三章和第五章中，以分散难点. 第五章的讨论，是在高阶微分方程 (方程组) 的框架中进行的.

对奇解在理论上的阐述，有赖于解的存在和唯一性定理. 因此，我们把一阶隐式微分方程的解法和奇解理论作为第四章，安排在存在定理之后. 鉴于首次积分具有明显的物理和几何意义，它不仅是求解微分方程的一个手段，而且也是一般微分方程的理论基础，所以我们也把它单独设章，放在一阶偏微分方程之前.

第六章线性微分方程组 (和高阶线性微分方程式) 是本课程的重点之一. 我们在编写中力求兼顾理论上的严密性和具体解法上

的实用性，并采用了向量、矩阵和矩阵指数函数等工具.

第七章涉及古典解析理论中一些常见的内容. 而第八章比较简要地介绍了现代定性理论中的基本思想和方法. 这些内容有利于培养学生对一般微分方程进行分析的能力.

另外，根据我们的教学经验，有不少精力充沛的学生常常不满足于课堂讲授的内容，而另找合适的课外读物又不容易. 为了使这部分学生能顺手得到自学的材料，本书专门在某些节目上增添了适当的内容和难度，并以 * 号标明，例如：佩亚诺存在定理，微分方程比较定理，奇解存在定理，解析解存在定理，算子法，拉普拉斯变换法，结构稳定与分支现象，非线性边值问题与周期边值问题，大范围的首次积分等. 对于一般读者，可以根据自己的需要和兴趣，部分或全部跳过上述内容也不会影响对本书主体的学习.

除了个别几节外，我们在本书的每节之后都安排了习题，并在书末对计算题给出了参考答案，对大部分证明题给出了提示.

参加 1989 年微分方程教材编审组会议的同志，特别是本书的主审人金福临教授和吴克乾教授，对本书的初稿提出了很多宝贵的意见；我们的同事黄文灶教授和董镇喜教授等也多年从事这个课程的教学工作，为本书提供了他们的经验；柳彬同志为本书的习题做了题解；王鹏远同志也对本书的编写提出过富有启发的建议；高等教育出版社的有关同志为本书的编辑出版给予了大力的支持；本书采用北京大学计算机科学技术研究所研制的华光IV型系统进行排版，这个研究所和北京大学新技术公司的有关同志为此给予了热情的帮助. 在此，我们对所有上述同志一并表示衷心的感谢. 同时，也恳切地希望和欢迎读者对本书提出批评与建议.

编　者

1990 年 1 月于北京大学数学系

第二版序言

1) 牛顿利用开普勒的三大定律和伽利略得到的“惯性定律”与“自由落体定律”，总结出所谓牛顿的第二运动定律和万有引力定律，这是不争的事实．至于如何叙说牛顿对二体问题的贡献，本书在第一版前言中陈述了一种通俗的传说，缺乏严格的历史考证．

现在，我们从文献 [13] (第 21 章：18 世纪的常微分方程) 摘录下述资料，作为对第一版前言的补正：

“实际上，这个在引力相互吸引下两个球体的运动问题，是由牛顿在《原理》(I 第 11 节) 中用几何方法解决的．然而，分析方面的工作暂时还没有动手进行． ……

用分析方法研究行星运动是由 Daniel Bernoulli 着手进行的，他在 1734 年关于二体问题的一篇论文得到了法国科学院的奖金．Euler 在 1744 年的《行星和彗星的运动理论》中就完全用分析方法了．”

由此可知，二体问题的分析解应该是 D. 伯努利的工作．

2) 本书第二版的内容与第一版基本相同．考虑到线性微分方程组的求解可以利用“ Maple ”或“ Mathematica ”等计算机符号系统，我们在第二版中省略了第一版中第六章第四节关于算子法和拉氏变换法的介绍．

3) 本书第一版出版以来，我们的同事、不少高等学校的教师和北京大学的同学们在使用本书的过程中，以及高等教育出版社的郭思旭、李蕊等同志在编辑本书第二版的过程中，都提出了很多宝贵的意见，使我们有可能在第二版中做了很多改进．我们愿借此机会对他们表示由衷的感谢，并诚恳地欢迎同行和读者们继续对本书提出批评与建议．

编　者

2004 年 2 月于北京大学数学科学学院

目　录

第一章　基本概念

由牛顿 (Newton, 1642—1727) 和莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716) 所创立的微积分，是人类科学史上划时代的重大发现. 而微积分的产生和发展，与人们求解微分方程的需要有密切的关系. 所谓微分方程，就是联系着自变量，未知函数，及其导数在内的方程. 物理学，化学，生物学，工程技术和某些社会科学中的大量问题一旦加以精确的数学描述，往往会出现微分方程. 在本书的各章中，将举出引导到微分方程的各种例子. 一个实际问题只要转化为微分方程，那么问题的解决就有赖于对微分方程的研究. 就是在数学本身的理论探讨中，微分方程也是常用的工具.

本教程主要介绍常微分方程的一些最基本的理论和方法. 我们在第一章首先给出微分方程及其解的定义，并予以相应的几何解释. 实际上，这也是为以后各章进一步的学习所作的必要准备.

§1.1　微分方程及其解的定义

利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题，一般需要先对问题建立数学模型，再对它进行分析求解或近似计算，然后按实际的要求对所得的结果作出分析和探讨. 数学模型最常见的表达方式，是包含自变量和未知函数的函数方程. 在很多情形这类方程还包含未知函数的导数，它们就是微分方程. 例如，用牛顿第二运动定律列出的质点运动方程就是微分方程，其中未知函数代表质点的坐标，它们对自变量 (时间) 的一阶导数和二阶导数分别表示质点的运动速度和加速度.

现在，我们给出如下的一般定义.

【定义 1.1】凡是联系自变量 x, 与这个自变量的未知函数 $y = y(x)$, 和它的导数 $y' = y'(x)$ 以及直到 n 阶导数 $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ 在

内的方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.1}$$

叫作**常微分方程**[1], 其中导数实际出现的最高阶数 n 叫作常微分方程 (1.1) 的**阶**.

例如，下面的方程都是常微分方程：

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=x^3 \quad (x\neq 0),\\
&(2)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2,\\
&(3)\quad y''+yy'=x,\\
&(4)\quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+a^2\theta=0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

在前三个方程中，x 是自变量，y 是未知函数；在最后一个方程中，t 是自变量，θ 是未知函数 (而 $a>0$ 是常数). 前两个方程都是一阶的；后两个方程都是二阶的.

在常微分方程 (1.1) 中如果右端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是**线性** 常微分方程. 否则称它为**非线性** 常微分方程. 例如，(1.2) 中的常微分方程 (1) 和 (4) 是线性的；而 (2) 和 (3) 是非线性的.

我们在定义 1.1 中给微分方程 (1.1) 冠以“常”字，指的是未知函数是一元函数. 如果未知函数是多元函数，那么在微分方程中将出现偏导数，这种方程自然叫作**偏微分方程**.

例如，方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+f=0$$

---

[1] 这里 F 是一个关于变元 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的给定的已知函数. 因此，诸如 $y'(x)=y(y(x))$ 和 $y'(x)=y(x-1)$ 之类的方程就不是常微分方程.

是一阶线性偏微分方程，其中 x,y 和 z 为自变量，而 $f=f(x,y,z)$ 为未知函数；方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

为二阶线性偏微分方程，其中 x 和 y 为自变量，而 $u=u(x,y)$ 为未知函数.

本书主要介绍常微分方程，除了第十一章外，所说的微分方程都是指常微分方程．因此，有时就索性简称微分方程为方程.

【定义 1.2】设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数．如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程 (1.1)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

对一切 $x\in J$ 都成立，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程 (1.1) 在区间 J 上的一个**解**.

例如，从定义 1.2 可以直接验证：

1) 函数 $y=\frac{1}{5}x^4$ 是 (1.2) 中微分方程 (1) 在区间 $(-\infty,0)$ 或区间 $(0,\infty)$ 上的一个解； $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}x^4$ 也是这个方程在同样区间上的一个解．而且对任意的常数 C,

$$y=\frac{C}{x}+\frac{1}{5}x^4$$

都是这个方程在同样区间上的解．但 $y=C+\frac{1}{5}x^4$ $(C\neq 0)$ 不是这个方程的解.

2) $y=\tan x$ 是 (1.2) 中微分方程 (2) 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\pi\pi$ 上的一个解；而 $y=\tan(x-C)$ 是这个方程在区间 $(C-\frac{\pi}{2},C+\frac{\pi}{2})$ 上的一个解，其中 C 为任意常数．但 $y=C\tan x$ $(C\neq 1)$ 不是解.

3) 函数 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 都是 (1.2) 中方程 (4) 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的解．而且对任意的常数 C_1 和 C_2,

$$\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$$

也是这个方程在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的解.

从上面的讨论中可见，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数 (与方程的阶数有关), 而有的解不包含任意常数. 为了确切表达任意常数的个数，我们需要下面的定义.

【定义 1.3】设 n 阶微分方程 (1.1) 的解

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n) \tag{1.3}$$

包含 n 个**独立的**任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$, 则称它为**通解**, 这里所说 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的，其含义是 Jacobi 行列式

$$\frac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[C_1,C_2,\cdots,C_n]}\overset{\mathrm{d}}{=}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}$$

不等于 0, 其中

$$\begin{cases}\varphi=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n),\\ \varphi'=\varphi'(x,C_1,C_2,\cdots,C_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x,C_1,C_2,\cdots,C_n).\end{cases}$$

如果微分方程 (1.1) 的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**.

显然，当任意常数一旦确定之后，通解也就变成了特解.

例如，按定义 1.3 可知， $\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$ 是 (1.2) 中方程 (4) 的通解；而 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 分别是该方程的特解.

下面我们以简单的**自由落体**为例，说明微分方程及其通解和特解的一些实际背景．所谓自由落体运动，指的是只考虑重力对落体的作用，而忽略空气阻力等其他外力的影响，参看图 1-1. 注意，落体 B 作垂直于地面的运动．因此，我们取坐标原点在地面上而且垂直向上的 y 轴，使落体 B 的位置为 $y=y(t)$. 这样，问题就归结为寻求满足自由落体规律的函数 $y=y(t)$.

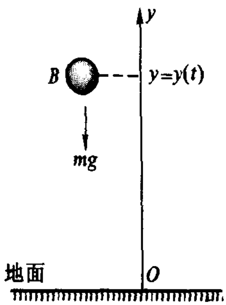


图 1-1

因为 $y=y(t)$ 表示 B 的位置坐标，所以它对 t 的一阶导数 $\dot{y}=\dot{y}(t)$ 表示 B 的瞬时速度 $v=v(t)$; 而二阶导数 $\ddot{y}=\ddot{y}(t)$ 则表示 B 的瞬时加速度 $a=a(t)$. 假设落体 B 的质量为 m, 重力加速度为 g(在地面附近它近似于常数，通常取 $g=9.80\,\mathrm{m/s^2}$), 则由牛顿第二运动定律得出：

$$m\ddot{y}=-mg,$$

上式右端出现负号，是由于 B 所受的重力与 y 轴的正方向相反．这样我们得到一个微分方程

$$\ddot{y}=-g. \tag{1.4}$$

因此，为了得到落体的运动 $y=y(t)$, 需要求解这个微分方程.

事实上，只要在微分方程 (1.4) 的两侧对 t 积分一次，就有

$$\dot{y}=-gt+C_1, \tag{1.5}$$