

硕士研究生入学考试 数学应试指南

刘国诚 编著

SHUOSHI YANJIUSHENG
RUXUE KAOSHI SHUXUE
YINGSHI ZHINAN

重庆大学出版社

硕士研究生入学 考试数学应试指南

刘国诚 编著



重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是一本较为全面、系统的硕士研究生入学考试数学应试指导书。全书分三篇。第一篇高等数学(1—12章),第二篇线性代数(13—16章),第三篇概率论与数理统计(17—20章)。每章均包含基本概念、基本定理、常用方法、典型例题分析、思考题、思考题解答等内容。对各章中的常用方法均指出了此方法所能解决问题的范围,以及使用中的注意点。

本书由具有丰富教学经验、担任多届研究生入学考前复习班主讲的教授编写,针对性强,适合准备报考硕士研究生的人员使用,也可供理工科大学学生学习、参考。

硕士研究生入学考试数学应试指南

刘国诚 编著

责任编辑 刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:27.25 字数:680千

1997年10月第1版 1997年10月第1次印刷

印数:1—3000

ISBN 7-5624-1276-6/O·142 定价:32.00元

目 录

第一篇 高等数学

第一章 极限与连续	3
第一节 极限	3
1. 极限的概念及其运算	3
2. 求极限的常用方法	5
第二节 函数的连续与间断	17
1. 函数的连续性	17
2. 函数的间断点	18
3. 连续函数的运算	18
4. 连续函数的性质	18
5. 例题	18
思考题一	22
思考题解答一	25
第二章 一元函数微分法	32
第一节 导数与微分的概念	32
1. 在 x_0 处的导数	32
2. 可导与连续的关系	32
3. 单侧导数	32
4. 导数的几何意义	32
5. 导数	33
6. 高阶导数	33
7. 微分	34
8. 例题	34
第二节 导数的计算	36
1. 基本导数公式	36
2. 求导的四则运算法则	36
3. 复合函数求导法则	37
4. 反函数求导法则	37
5. 隐函数求导法	37
6. 参数方程所确定函数的求导法	37
7. 高阶导数的运算法则	37
8. 高阶导数公式	38

9. 例题	38
思考题二	41
思考题解答二	45
第三章 中值定理和 Taylor 公式	53
第一节 中值定理和 Taylor 公式	53
1. 三个微分中值定理	53
2. Taylor 公式	53
第二节 例题	54
思考题三	60
思考题解答三	63
第四章 导数的应用	69
第一节 函数的增减区间和极值	69
1. 函数单调性判别法	69
2. 极值及其判别法	69
3. 求函数最大值最小值法则	69
4. 例题	70
第二节 函数的凹凸性, 函数作图	74
1. 函数的凹凸性	74
2. 求渐近线法则	75
3. 函数作图的一般步骤	75
4. 曲率与曲率半径	75
思考题四	80
思考题解答四	82
第五章 不定积分	90
第一节 不定积分的基本知识	90
1. 原函数与不定积分	90
2. 不定积分的基本性质	90
3. 基本积分公式	90
4. 简单积分法	91
第二节 换元积分法与分部积分法	91
1. 第一换元法	91
2. 第二换元法	94
3. 第二换元法的一些常型	94
4. 分部积分法	99
第三节 其它题型举例	102
思考题五	104
思考题解答五	106
第六章 定积分及其应用	112
第一节 定积分的概念、性质与定理	112

1. 定积分的概念	112
2. 可积函数类	112
3. 定积分的基本性质和定理	112
4. 例题	113
第二节 定积分换元法则和分部积分法	117
1. 定积分换元法则	117
2. 定积分的分部积分法	118
3. 几个重要结果	118
4. 例题	118
第三节 广义积分	123
1. 积分区间为无穷大的广义积分	123
2. 无界函数的广义积分	124
3. 例题	125
第四节 定积分的应用	127
1. 几何上的应用	127
2. 物理上的应用	128
3. 定积分应用举例	129
思考题六	132
思考题解答六	137
第七章 空间解析几何	151
第一节 向量代数	151
1. 若干基本定义	151
2. 向量运算的基本公式	151
3. 向量的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$	151
4. 向量的向量积 $\vec{a} \times \vec{b}$	152
5. 三向量的混合积 $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$	152
第二节 直线与平面	152
1. 各种平面方程	152
2. 点, 平面的相互关系	153
3. 各种直线方程	153
4. 直线与平面的关系; 直线与直线的关系	153
5. 典型问题	154
第三节 空间曲面与空间曲线	154
1. 曲面方程	154
2. 空间曲线方程	155
3. 常见的二次曲面	155
4. 柱面及投影柱面	155
5. 旋转面方程	155

第四节 例题	156
思考题七	160
思考题解答七	161
第八章 多元函数微分学	165
第一节 极限与连续	165
1. 二元函数	165
2. 二重极限	165
3. 二元函数的连续性	165
4. 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续函数的性质	165
5. 例题	165
第二节 偏导数与全微分	167
1. 偏导数	167
2. 高阶偏导数	168
3. 函数的微分	168
4. 例题	169
第三节 复合函数与隐函数的微分法	172
1. 复合函数微分法	172
2. 隐函数微分法	173
3. 例题	173
第四节 多元函数微分学的应用	177
1. 空间曲线的切线与法平面	177
2. 空间曲面的切平面与法线	177
3. 无条件极值	178
4. 条件极值	179
5. 最大值与最小值问题	179
6. 方向导数与梯度	179
7. 例题	180
思考题八	186
思考题解答八	189
第九章 重积分	199
第一节 重积分的概念与性质	199
1. 二重积分的定义	199
2. 三重积分的定义	199
3. 几何意义	199
4. 重积分性质	200
第二节 重积分计算法	200
1. 二重积分计算法	200
2. 三重积分计算法	201
3. 利用对称性的问题	202

第三节 重积分的应用	202
1. 质量与重心	202
2. 转动惯量	203
第四节 例题	203
思考题九	217
思考题解答九	221
第十章 曲线积分、曲面积分	233
第一节 曲线积分	233
1. 曲线积分定义与性质	233
2. 曲线积分算法	234
3. 格林(Green)公式、曲线积分与路径无关的条件	235
第二节 曲面积分	236
1. 第一型曲面积分	236
2. 第二型曲面积分	236
第三节 高斯公式、斯托克斯公式	238
1. 高斯公式、散度	238
2. 斯托克斯(Slokes)公式、旋度	238
第四节 例题	239
思考题十	250
思考题解答十	252
第十一章 无穷级数	263
第一节 常数项级数	263
1. 基本概念与性质	263
2. 正项级数	264
3. 任意项级数	265
4. 例题	266
第二节 幂级数	273
1. 幂级数的收敛域	273
2. 幂级数运算	273
3. Taylor 级数	274
4. 例题	275
第三节 付氏(Fourier)级数	277
1. 正交性	277
2. 付氏级数与欧拉-付立叶系数	278
3. Dirichlet 收敛定理	278
4. 任意周期的付氏级数	278
5. 正弦级数、余弦级数	278
思考题十一	281
思考题解答十一	285

第十二章 常微分方程	295
第一节 基本概念、一阶微分方程	295
1. 基本概念.....	295
2. 一阶方程的可解类型、例题	295
3. 一阶方程的其它例子.....	299
第二节 高阶微分方程	302
1. 可降阶的二阶微分方程.....	302
2. 二阶线性微分方程.....	305
3. 二阶常系数线性齐次方程.....	305
4. 二阶常系数线性非齐次方程.....	306
5. 欧拉方程.....	306
思考题十二	309
思考题解答十二	310

第二篇 线性代数

第十三章 行列式与矩阵代数	319
第一节 n 阶行列式	319
1. n 阶行列式定义	319
2. 行列式基本性质.....	319
3. 几个特殊行列式.....	319
4. 例题.....	320
第二节 向量的线性相关与线性无关	322
1. 线性相关与线性无关的定义.....	322
2. 向量的线性表示.....	322
3. 最大无关组, 向量组的秩	322
4. 例题.....	323
第三节 矩阵代数	325
1. 矩阵的基本运算.....	325
2. 初等矩阵和矩阵的初等变换.....	327
3. 分块矩阵.....	328
4. 例题.....	328
思考题十三	332
思考题解答十三	335
第十四章 线性方程组、基、坐标变换	339
第一节 线性方程组	339
1. 齐次方程组的基础解系.....	339
2. 非齐次线性方程组.....	340
第二节 基、坐标变换	341
1. 基、向量的坐标	341

2. 坐标变换公式.....	342
3. 例题.....	342
思考题十四.....	345
思考题解答十四.....	346
第十五章 特征值与特征向量	349
第一节 相似矩阵.....	349
1. 相似矩阵.....	349
2. 相似矩阵性质.....	349
第二节 特征值与特征向量.....	349
1. 特征值与特征向量.....	349
2. 求特征值与特征向量法则.....	349
3. 特征多项式的性质.....	350
4. 方阵对角化的问题.....	350
5. 例题.....	350
思考题十五.....	354
思考题解答十五.....	356
第十六章 二次型	358
第一节 正交矩阵与正交变换.....	358
1. 正交规范组.....	358
2. 正交矩阵与正交变换.....	358
第二节 化二次型为平方和.....	359
1. 关于实对称矩阵的定理.....	359
2. 用正交变换化二次型为平方和.....	359
3. 二次型分类.....	362
4. 例题.....	363
思考题十六.....	366
思考题解答十六.....	367

第三篇 概率论与数理统计

第十七章 随机事件与概率	373
第一节 随机事件与样本空间.....	373
1. 随机事件.....	373
2. 基本事件和样本空间.....	373
第二节 事件的相互关系及其运算.....	373
1. 子事件.....	373
2. 相等.....	373
3. 事件的并.....	373
4. 事件的交.....	373
5. 事件的差.....	374

6. 互斥事件.....	374
7. 对立事件.....	374
8. 完备事件组.....	374
9. 事件的运算规则.....	374
第三节 概率的定义及基本性质.....	375
1. 统计概率.....	375
2. 古典概率.....	375
3. 几何概率.....	375
4. 条件概率.....	375
5. 独立性.....	375
第四节 概率的计算公式.....	376
1. 加法公式.....	376
2. 乘法公式.....	376
3. 全概公式.....	377
4. 逆概公式—Bayes 公式	377
5. 独立试验序列概型(Bernoulli 概型)	377
第五节 例题.....	377
第十八章 随机变量与概率分布.....	380
第一节 随机变量与概率分布.....	380
1. 随机变量.....	380
2. 随机变量的分布函数.....	380
3. 离散型随机变量及其分布.....	380
4. 连续型随机变量及其分布.....	382
5. 随机变量函数的分布.....	384
第二节 数学期望和方差.....	384
1. 数学期望.....	384
2. 随机变量函数的数学期望.....	385
3. 数学期望的性质.....	385
4. 方差.....	385
5. 常见分布的期望和方差.....	386
第三节 例题.....	386
第十九章 二维随机变量及其概率分布.....	391
第一节 二维随机变量及其概率分布.....	391
1. 联合分布与边际分布.....	391
2. 二维离散型随机变量.....	391
3. 二维连续型随机变量.....	392
第二节 随机变量的独立性.....	392
第三节 二维随机变量函数的分布.....	393
1. 和的分布.....	393

2. 极值的分布	393
第四节 随机向量的数字特征	394
1. 二元随机变量函数的期望公式	394
2. 期望和方差的性质	394
3. 协方差	395
4. 相关系数	395
第五节 大数定律与中心极限定理	395
1. 切比雪夫不等式	395
2. 切比雪夫大数定律	396
3. Bernoulli 大数定律	396
4. (林德伯格-列维)中心极限定理	396
5. 德莫佛-拉普拉斯定理	396
第六节 例题	396
第二十章 数理统计初步	402
第一节 数理统计的基本概念	402
1. 总体、样本、容量	402
2. 简单随机样本	402
3. 统计量	402
第二节 参数估计	403
1. 点估计	403
2. 极大似然估计	404
3. 矩估计法	404
4. 区间估计	404
第三节 假设检验	405
1. U 检验法	405
2. t 检验法	406
3. χ^2 检验法	406
第四节 例题	407
思考题十七(第三篇思考题)	410
思考题解答十七	414

第一篇 高等数学

第一章 极限与连续

第一节 极 限

1. 极限的概念及其运算

(1) 数列的极限

1) 设有数列 $\{x_n\}$, 如果对任意给定的正数 ϵ , 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于 ∞ 时, 以常数 A 为极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A .

2) 若 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则必唯一.

3) 收敛数列必有界.

(2) 函数的极限

1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义 (在点 x_0 处 $f(x)$ 可能没有定义), 对确定的某个常数 A , 如对任给正数 ϵ , 存在某正数 δ , 对满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 之所有 x , 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$ 时).

注意: 在数学上常把 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件简记为 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

2) 单边极限

$$\text{左极限 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \text{ (或 } 0 < x_0 - x < \delta) \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$\text{左极限常简记为 } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$$\text{右极限 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \text{ (或 } 0 < x - x_0 < \delta) \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$3) \text{ 定理 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$$

常常利用该定理判断在分段函数分界点处极限是否存在.

4) $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限

$$\text{定义 } 1^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x, |x| > X \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x, x > X \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \forall x, -x > X \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

定理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

(3) 极限的运算法则

1) 四则运算

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$1^\circ \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$2^\circ \lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$$

$$3^\circ \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$$

注意: 所有极限均指对同一极限过程而言, 如 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow x_0 + 0$ 或 $x \rightarrow x_0 - 0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 等. 另外对 $1^\circ, 2^\circ$ 而言可推广到有限个函数的情况.

2) 复合函数求极限法则

如 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[u(x)] = A$.

3) 幂指函数求极限法则

如 $\lim u(x) = A (A > 0), \lim v(x) = B$, 则 $\lim u(x)^{v(x)} = A^B$.

(4) 极限的基本性质

1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$.

2) (保号性) 取 $g(x) \equiv 0$, 知如 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 则 $\exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) > 0$.

3) 如 $f(x) \geq 0$ (或 ≤ 0) 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

(5) 无穷小量与无穷大量

1) 如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 称 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量. 注意: 常数 0 可视为无穷小量, 而无穷小量一般情况决不是 0.

2) 如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

即非零无穷小的倒数是无穷大, 反之亦然.

注意: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的精确定义为 $\forall E > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$ 有 $|f(x)| > E$.

3) 无穷小的比较

设 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是在同一极限过程的无穷小量

1° 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

2° 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = k, (k \neq 0)$, 称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的同阶无穷小.

3° 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的等阶无穷小, 记为 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

4° 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C, (C \neq 0)$, 则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

5° 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 无趋势, 称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 不能比较. 如 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 与 $\beta(x) = x$ 则不能比较.

定理 如 $\beta \sim \alpha$, 则 $\beta - \alpha = o(\alpha)$ 或 $\beta - \alpha = o(\beta)$

[按] 如 $\beta = \alpha + o(\alpha)$ 时, 常可用 α 近似代替 β , 称 α 为 β 的主部.

4) 极限与无穷小量的关系——极限第二定义.

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

2. 求极限的常用方法

(1) 证明极限存在常用方法

1) Weierstrass 定理或准则 I

定理 单调增加(或单调减少)且有上界(或下界)的数列必有极限.

[按] 如 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq \dots$ 称 $\{x_n\}$ 单增, 如有上界, 则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 必存在. 这是有名的 Weierstrass 准则, 其极限值 A 应在 x_1 与上界 M 之间, 即 $x_1 \leq A \leq M$.

2) 夹挤定理或准则 I

定理 设 $F(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 在 x_0 某去心邻域内成立, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

[按] 对 $x \rightarrow x_0 + 0$ 或 $x \rightarrow x_0 - 0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 都是正确的. 对数列的情况有定理: 设 $y_n \leq x_n \leq z_n$ (允许有限项例外), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

3) 利用 Heine 定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是对于以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq x_0, n = 1, 2, 3, \dots$) 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$.

[按] 该定理常用以判定极限之不存在, 即如果知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = B$, ($a_n \rightarrow x_0, b_n \rightarrow x_0$ 且都不取 x_0) 如 $A \neq B$, 则知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

(2) 求极限的基本方法

基本属于必考范畴, 其主要方法如下:

1) 利用函数连续性或复合函数求极限法则求极限. 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1; \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2 - \arctg \frac{2}{x}) = f(2) = 6 - \frac{\pi}{4}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x})^x = \ln e = 1$.

2) 利用四则运算和已知极限求极限.

例 1-1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$. (分离出无穷小)

例 1-2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}}$. 注意到 $|q| < 1$ 时, $q^n \rightarrow 0$ 这一事实

知 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n [(-\frac{1}{4})^n + 1]}{4^{n+1} [(\frac{3}{4})^{n+1} + 1]} = \frac{1}{4}$.

例 1-3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$