硕士研究生入学考试数学应试指南

刘国诚 编著

SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI SHUXUE YINGSHI ZHINAN

重庆大学出版社

硕士研究生入学
考试数学应试指南

刘国诚　编著

重庆大学出版社

内容简介

本书是一本较为全面、系统的硕士研究生入学考试数学应试指导书．全书分三篇．第一篇高等数学(1—12 章)，第二篇线性代数(13--16 章)，第三篇概率论与数理统计(17—20 章)．每章均包含基本概念、基本定理、常用方法、典型例题分析、思考题、思考题解答等内容．对各章中的常用方法均指出了此方法所能解决问题的范围，以及使用中的注意点。

本书由具有丰富教学经验、担任多届研究生入学考前复习班主讲的教授编写，针对性强，适合准备报考硕士研究生的人员使用，也可供理工科大学生学习、参考。

硕士研究生入学考试数学应试指南

刘国诚　编著

责任编辑　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　　印张：27.25 字数：680 千

1997年10月第1版　　1997年10月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN　7-5624-1276-6/O·142　定价：32.00元

目 录

第一篇 高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　极限与连续

第一节　极　限

1. 极限的概念及其运算

(1)数列的极限

1)设有数列$\{x_n\}$,如果对任意给定的正数ε,存在正整数N,当$n>N$时有

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

成立,则称数列$\{x_n\}$当n趋于∞时,以常数A为极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A$(当$n\to\infty$时),也称数列$\{x_n\}$收敛于$A$.

2)若$\{x_n\}$的极限存在,则必唯一.

3)收敛数列必有界.

(2)函数的极限

1)若函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义(在点x_0处$f(x)$可能没有定义),对确定的某个常数A,如对任给正数ε,存在某正数δ,对满足$0<|x-x_0|<\delta$之所有x,有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立,则称$f(x)$当$x\to x_0$时以A为极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A\quad(x\to x_0$时).

注意:在数学上常把$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件简记为$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x:0<|x-x_0|<\delta\to|f(x)-A|<\varepsilon$

2)单边极限

左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x,x_0-\delta<x<x_0$(或$0<x_0-x<\delta)\to|f(x)-A|<\varepsilon$

左极限常简记为$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\quad\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x,x_0<x<x_0+\delta$(或$0<x-x_0<\delta)\to|f(x)-A|<\varepsilon$

3)**定理**　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

常常利用该定理判断在分段函数分界点处极限是否存在.

4)$x\to\infty$时$f(x)$的极限

定义　1°　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0,\forall\ x,|x|>X\to|f(x)-A|<\varepsilon$

2°　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0,\forall\ x,x>X\to|f(x)-A|<\varepsilon$

3°　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0,\forall\ x,-x>X\to|f(x)-A|<\varepsilon$

定理 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

(3)极限的运算法则

1)四则运算

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

1° $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

2° $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

3° 当 $B\neq0$ 时 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$

注意:所有极限均指对同一极限过程而言,如 $x\to x_0$ 或 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0-0$ 或 $x\to\infty$ 等.另外对 1°、2°而言可推广到有限个函数的情况.

2)复合函数求极限法则

如 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[u(x)]=A$.

3)幂指函数求极限法则

如 $\lim u(x)=A\ (A>0), \lim v(x)=B$,则 $\lim u(x)^{v(x)}=A^B$.

(4)极限的基本性质

1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $A>B$,则 $\exists\ \delta>0, \forall\ x, 0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$.

2)(保号性)取 $g(x)\equiv0$,知如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$,则 $\exists\ \delta>0, \forall\ x, 0<|x-x_0|<\delta\to f(x)>0$.

3)如 $f(x)\geqslant0$ (或 $\leqslant0$)且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

(5)无穷小量与无穷大量

1)如 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ 称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.注意:常数 0 可视为无穷小量,而无穷小量一般情况决不是 0.

2)如 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

即非零无穷小的倒数是无穷大,反之亦然.

注意: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的精确定义为 $\forall\ E>0, \exists\ \delta>0, \forall\ x, 0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|f(x)|>E$.

3)无穷小的比较

设 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是在同一极限过程的无穷小量

1° 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

2° 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=k$,$(k\neq0)$,称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的同阶无穷小.

3° 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$,则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的等阶无穷小,记为 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

4° 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=C$,$(C\neq0)$,则称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

5° 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 无趋势,称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 不能比较.如 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $\beta(x)=x$ 则不能比较.

定理 如 $\beta\sim\alpha$,则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$ 或 $\beta-\alpha=o(\beta)$

［按］ 如 $\beta=\alpha+o(\alpha)$ 时,常可用 α 近似代替 β,称 α 为 β 的主部.

4)极限与无穷小量的关系——极限第二定义.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

2. **求极限的常用方法**

(1)证明极限存在常用方法

1)Weierstrass 定理或准则 Ⅱ

定理 单调增加(或单调减少)且有上界(或下界)的数列必有极限.

［按］ 如 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant\cdots$ 称 $\{x_n\}$ 单增,如有上界,则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在.这是有名的 Weierstrass 准则,其极限值 A 应在 x_1 与上界 M 之间,即 $x_1\leqslant A\leqslant M$.

2)夹挤定理或准则 Ⅰ

定理 设 $F(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 在 x_0 某去心邻域内成立,又 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

［按］ 对 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0-0$ 或 $x\to\infty$ 都是正确的.对数列的情况有定理:设 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$(允许有限项例外),且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

3)利用 Heine 定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在的充分必要条件是对于以 x_0 为极限的任意数列 $\{a_n\}(a_n\neq x_0,n=1,2,3,\cdots)$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=A$.

［按］ 该定理常用以判定极限之不存在,即如果知道 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=A$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=B$,($a_n\to x_0,b_n\to x_0$ 且都不取 x_0)如 $A\neq B$,则知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(2)求极限的基本方法

基本属于必考范畴,其主要方法如下:

1)利用函数连续性或复合函数求极限法则求极限.如 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos0=1$;$\lim\limits_{x\to2}(x^2+2-\mathrm{arctg}\,\dfrac{2}{x})=f(2)=6-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^x=\ln e=1.$$

2)利用四则运算和已知极限求极限.

例 1-1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$. (分离出无穷小)

例 1-2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$.注意到 $|q|<1$ 时,$q^n\to0$ 这一事实

知 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n[(-\dfrac{1}{4})^n+1]}{4^{n+1}[(\dfrac{3}{4})^{n+1}+1]}=\dfrac{1}{4}$.

例 1-3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$