21世纪复旦大学研究生教学用书

随机过程基础

应坚刚　金蒙伟　编著

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

21世纪复旦大学研究生教学用书

随机过程基础

应坚刚　金蒙伟　编著

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

随机过程基础/应坚刚,金蒙伟编著. —上海:复旦大学出版社,2005.2
21世纪复旦大学研究生教学用书
ISBN 7-309-04343-X

Ⅰ.随… Ⅱ.①应…②金… Ⅲ.随机过程-研究生-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第000700号

随机过程基础
应坚刚 金蒙伟 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路579号 邮编200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 陈 萍
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海第二教育学院印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 15.25 插页 2
字 数 278千
版 次 2005年2月第一版第一次印刷
印 数 1—3 100

书 号 ISBN 7-309-04343-X/O·338
定 价 24.00元

编辑出版说明

21世纪, 随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展, 世界将发生深刻变化, 国际间的竞争日趋激烈, 高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战.

研究生教育是教育结构中最高层次的教育, 肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任, 是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑, 为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平, 必须加强研究生的教材建设, 更新教学内容, 把创新能力和创新精神的培养放在突出位置上, 必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书, "21世纪复旦大学研究生教学用书" 正是为适应这一新形势而编辑出版的.

"21世纪复旦大学研究生教学用书" 分文科、理科和医科三大类, 主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材, 同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材, 这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外, 还可供有关学者和人员参考.

收入 "21世纪复旦大学研究生教学用书" 的教材, 大多是作者在编写成讲义后, 经过多年的教学实践、反复修改后才定稿的. 这些作者大多治学严谨, 教学实践经验丰富, 教学效果也比较显著. 由于我们对编辑工作尚缺乏经验, 不足之处, 敬请读者指正, 以便我们在将来再版时加以更正和提高.

复旦大学研究生院

前　言

概率论是研究机会的学科, 有非常强的直观背景, 它起源于人类对赌博中机会的兴趣, 对它的一些问题的研究可追溯至几个世纪之前, 著名数学家 P. Fermat, B. Pascal, J. Bernoulli, P.S. Laplace 等都对概率论的发展作出过巨大贡献, 而为这一学科建立坚实的数学基础是 20 世纪 30 年代, 俄国著名数学家 A.N.Kolmogorov 将概率论的大厦建立在测度论的基石上. 但我们不能忘记概率与测度不同的一面, 它有着深刻的且是严格的测度论公理体系所无法体现的直观背景.

此教材重点讲述 Markov 过程与鞅论, 考虑到大多数学生在本科时缺乏测度论的训练, 我们在第一章简要介绍测度论与概率论的基本概念与重要结果, 如 Caratheodory 扩张定理、Radon-Nikodym 定理、随机变量及其分布、条件数学期望等, 要注意的是没有对这些概念的真正理解, 是不可能真正理解现代随机过程理论的. 在第二章中, 我们将介绍 Kolmogorov 的相容性定理, 以及一些常见的过程, 如平稳过程、Markov 链、Markov 过程、独立增量过程、Poisson 过程、Brown 运动等. 在第三章中, 我们将给出鞅的定义, 讨论鞅的基本性质、鞅不等式、鞅与其他随机过程的关系, 以及鞅的正则化. 另外我们还将证明连续鞅有有限二次变差并定义随机积分, 最后介绍重要的 Itô 公式及其应用.

该教材在浙江大学和复旦大学作为数学系研究生随机过程基础课的教材已经使用多年, 此次出版前增加并修订了一些内容. 考虑到 Markov 过程的重要性, 还增加了第四章: Markov 过程基础, 讲述 Markov 过程、强 Markov 性、概率位势理论、Feller 过程和 Lévy 过程等, 这部分内容对于数学系研究生基础课可能过于专门化, 适合作为概率专业研究生的专业课内容讲授.

这里要感谢浙江大学的陈叔平教授, 他首先提议和鼓励我们为浙大数学系研究生开设这门课程并提供方便, 感谢赵敏智、方兴、张慧增、何萍博士, 他们多次阅读此教材并为教材的修改提出了许多的重要意见, 感谢周梦、吴小伟同学, 他们在阅读过程中也指出并改正了一些错误. 我们还要特别感谢汪嘉冈教授、马志明教授和李贤平教授, 他们在百忙中仔细地阅读了全书并提出了许多重要的修改意见. 最后还要感谢复旦大学出版社的范仁梅女士为本书顺利出版提供的帮助. 教材虽经不断的修改, 但错误依然难免, 如果读者发现其中的错误或有建议, 请直接和作者联系, 非常感谢.

应坚刚　jgying@fudan.edu.cn

金蒙伟　jmw@zju.edu.cn

目　　录

第一章 概率论基础

在这一章中, 我们将考察概率论的基本概念, 它们也是随机分析理论的基础. 我们将简略而又系统地介绍测度论与概率论的重要概念和定理, 为了让此书尽量自我包含, 我们将简要地给予证明. 需要强调的是, 虽然这里我们在测度论基础上建立概率的概念, 但是概率的直观思想是远非测度论所能体现的, 所以读者不能省略对于初等概率论的系统学习和理解.

§1.1 可测结构与测度构造

在本书中, 集合 $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{N}$ 表示自然数集, 下标 $+$ 表示非负元素全体, 如 $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集, 其他类似.

用 Ω 表示一个任意给定的非空集合, 2^Ω 表示 Ω 的子集全体组成的集合, 称为幂集, Ω 的一个子集类是指 2^Ω 的一个子集. 我们说一个子集类对集合的某种运算封闭, 是指此子集类中的集合经过此种运算后得到的集合还在此子集类内. 常用的集合运算如下:

(1) 补集: $A \mapsto A^c = \Omega \setminus A$;

(2) 有限并: $(A, B) \mapsto A \bigcup B$; 可列并: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcup\limits_n A_n$; 任意并: $(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \mapsto \bigcup\limits_\lambda A_\lambda$; 当上面运算中所涉及的集合不相交时, 分别称为不交有限并, 不交可列并, 不交任意并;

(3) 有限交: $(A, B) \mapsto A \bigcap B$; 可列交: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcap\limits_n A_n$; 任意交: $(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}) \mapsto \bigcap\limits_\lambda A_\lambda$;

(4) 差: $(A, B) \mapsto A \setminus B = A \bigcap B^c$; 当 $A \supset B$ 时, 称为包含差;

(5) 递增列极限: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcup\limits_n A_n$, 其中集列 $\{A_n\}$ 递增;

(6) 递减列极限: $(\{A_n : n \in \mathbf{N}\}) \mapsto \bigcap\limits_n A_n$, 其中集列 $\{A_n\}$ 递减.

我们期望读者已经熟悉关于集合运算的规则, 这里不一一列举.

定义 1.1.1 Ω 的一个非空子集类 $\mathscr{F}$ 称为是 Ω 上的 σ- 代数 (或 σ- 域), 如果它对于补集运算和可列并运算封闭.

容易验证, σ- 代数一定包含有 $\varnothing, \Omega$ 为元素且对于有限交, 有限并及可列交等运算都是封闭的. 集合上的一个 σ- 代数通常看作为集合上的可测结构, Ω及其上的一个 σ- 代数 $\mathscr{F}$ 组成的偶 $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为是一个可测空间. 显然子集类 2^{Ω} 与 $\{\varnothing, \Omega\}$ 是 Ω上的 σ- 代数, 它们是 Ω 上的平凡 σ- 代数.

例 1.1.1 设 $\mathscr{F}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的至多可列子集或补集是至多可列子集全体, 那么 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 σ- 代数. ∎

由定义不难验证 Ω 上任意多个 σ- 代数的交也是一个 σ- 代数, 设 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上一个子集类, 用 $C(\mathscr{A})$ 表示 Ω 上包含 $\mathscr{A}$ 为子集的 σ- 代数全体, 因为 $2^{\Omega} \in C(\mathscr{A})$, 故 $C(\mathscr{A})$ 是非空的, 记

$$\sigma(\mathscr{A}) := \bigcap_{\mathscr{F} \in C(\mathscr{A})} \mathscr{F},$$

(在本书中, 记号 := 读作 被定义为.) 则 $\sigma(\mathscr{A})$ 是 Ω 上的 σ- 代数, 它是由下列条件所唯一确定的 σ- 代数 $\mathscr{F}$:

(1) $\mathscr{F} \supset \mathscr{A}$;

(2) 若 $\mathscr{F}'$ 是 σ- 代数且 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{A}$.

则 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$. 因此称 $\sigma(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ- 代数或由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ- 代数. 这是生成大多数重要的 σ- 代数的常用方法.

例 1.1.2 如果 Ω 是一个拓扑空间, 则其所有开集组成的集类生成的 σ- 代数称为是 Ω 上的 Borel 代数, 记为 $\mathscr{B}(\Omega)$, 因为开集的补集是闭集, 故它也是全体闭集生成的 σ- 代数. 对于 Euclid 空间, 我们记 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 或 $\mathscr{B}^n$ 是 n- 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 代数. 一个 σ- 代数 $\mathscr{A}$ 是可列生成的, 如果存在子集列 $\{A_n\}$ 使得 $\mathscr{A} = \sigma(\{A_n\})$. 那么 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 是可列生成的. ∎

定义 1.1.2 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是一个可测空间, 称 $\mathscr{F}$ 上的一个非负实值广义(可取无穷值的)集函数 μ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度, 如果

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个互不相交的集列, 则 $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. 这个性质称为测度的可列可加性.

这时, 称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间. 如果 $A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0, B \subset A$ 蕴含着 $B \in \mathscr{F}$, 则称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是完备测度空间. 当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时, 称 μ 是有限测度; 当 $\mu(\Omega) = 1$ 时, 称 μ 为概率测度; 当存在集列 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$ 满足 $\bigcup_n A_n = \Omega$ 与 $\mu(A_n) < \infty$ 时, 称 μ 是 σ- 有限测度. 另外如果 μ 是拓扑空间 Ω 及其 Borel 集上的测度, 如果 μ 在任何紧集上有限, 称 μ 为Radon 测度.

可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 的测度有一个偏序, 称测度 $\nu \leqslant \mu$, 如果对任何 $A \in \mathscr{F}$,

$\nu(A) \leqslant \mu(A)$. 另外, 任何测度空间在下面的意义下可以完备化. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间. 记

$$\mathscr{N} := \{N \subset \Omega: \text{存在 } N' \in \mathscr{F} \text{ 使得 } N \subset N', \mu(N') = 0\},$$
$$\mathscr{F}^{\mu} := \sigma(\mathscr{F} \bigcup \mathscr{N}).$$

$\mathscr{N}$ 中的集合通常称为 μ- 零测集. 那么 $\mathscr{F}^{\mu} = \{A \bigcup N : A \in \mathscr{F}, N \in \mathscr{N}\}$. 这样 μ 自动地延拓到 $\mathscr{F}^{\mu}$ 上: $\mu(A \bigcup N) := \mu(A)$. 读者需要验证定义无歧义. 则 $(\Omega, \mathscr{F}^{\mu}, \mu)$ 是一个完备测度空间, 称为是原测度空间的完备化. 因此如有必要, 我们总可以假设测度空间是完备的.

下面有关测度的性质可由定义直接推得.

(1) (有限可加性) 若 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$ 且互不相交, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

(2) (单调性) 若 $A, B \in \mathscr{F}$ 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(3) (次可列可加性) 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个集列, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n} A_n\right) \leqslant \sum_{n} \mu(A_n);$$

(4) (下连续性) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调上升的集列, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n);$$

(5) (上连续性) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调下降的集列且存在 k 使得 $\mu(A_k) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

特别地, 在 $\varnothing$ 处上连续, 即若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中单调下降交为 $\varnothing$ 的集列且存在 k, 使得 $\mu(A_k) < \infty$, 则 $\lim \mu(A_n) = 0$.

注意有限可加性与次可列可加性两者结合等价于可列可加性.

现在, 我们来看几个简单的常用测度. 恒等于零的测度称为是零测度. 在空集上等于零, 而在非空可测集上等于 $+\infty$ 的集函数也是一个测度.

例 1.1.3 设 Ω 是非空集, 对任意 $A \subset \Omega$, 用 $\#(A)$ 表示集合 A 中元素的个数, 显然 $\#$ 是 $(\Omega, 2^{\Omega})$ 上的测度, 且当 Ω 是有限集时, 它是有限测度, 当 Ω 是可列集时, 它是 σ- 有限测度, 而当 Ω 不可列时, 它不是 σ- 有限的. 测度 $\#$ 通常称为 Ω 上的计数测度. ∎

例 1.1.4 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间, 对任意 $\omega \in \Omega$, 定义

$$\epsilon_\omega(A) := 1_A(\omega),\ A \in \mathscr{F},$$

同样, 显然 ϵ_ω 是测度, 通常被称为 ω 处的单点测度或 Dirac 测度.

测度的定义并非总是如此简单, 实际上, 当集合上的可测结构较为复杂时, 像上面例中那样直接对每个可测集定义而成为测度是不可能的. 因此我们通常是在一个相对简单的集类上直接地定义一个(预)测度, 然后用某种方法将其延拓至该集类生成的σ代数上, 这正是下面将介绍的著名的Carathéodory测度扩张定理的主要思想.

定义 1.1.3 Ω 的非空子集类 $\mathscr{F}_0$ 称为是一个环, 如果 $\mathscr{F}_0$ 对集合的差与有限并两种运算封闭.

显然环含有空集且对于有限交运算也封闭.

例 1.1.5 任何非空集合的有限子集全体是一个环. 定义 $\mathbf{R}$ 上的子集类如下

$$\mathscr{B}_0 := \left\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]:\ n \geqslant 0, a_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant n\right\},$$

则 $\mathscr{B}_0$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个环. 它生成的 σ- 代数也是 Borel 代数.

可以看出, 环的结构通常比 σ- 代数的结构简单得多, 故在环上定义一个测度也比在 σ- 代数上定义测度要简单得多.

定义 1.1.4 设 $\mathscr{F}_0$ 是非空集合 Ω 上的一个环, $\mathscr{F}_0$ 上的非负广义实值集函数 μ 称为是有限可加集函数, 如果下列条件满足:

(1) $\mu(\varnothing)= 0$;

(2) (有限可加) 若 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}_0$ 互不相交, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

进一步地, 如果将(2)用(2′)代之, 则有

(2′) (可列可加) 若集列 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}_0$ 不相交且 $\bigcup_n A_n \in \mathscr{F}_0$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n} A_n\right) = \sum_{n} \mu(A_n),$$

称 μ 是预测度. 记 $\mathscr{F} := \sigma(\mathscr{F}_0)$, 如果 $\overline{\mu}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度且其在 $\mathscr{F}_0$ 上与 μ 一致, 称 $\overline{\mu}$ 是 μ 上的扩张.

显然, 只要在集合运算封闭的前提下, 测度的性质可以推广到环上的预测度上, 读者不妨自行验证. 在概率论中, 我们更常使用的是代数的结构, Ω 上的一个环 $\mathscr{F}_0$ 称为是代数, 如果 $\Omega \in \mathscr{F}_0$.

设 $\mathscr{F}_0$ 是 Ω 上的环, μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上给定的预测度, 对 $A \subset \Omega$, 定义

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_n \mu(A_n): \ \{A_n\} \subset \mathscr{F}_0, \ \bigcup_n A_n \supset A\right\}$$

(约定 $\inf \varnothing = +\infty$), 自然 μ^* 是 2^Ω 上的非负广义实值集函数, 称其为(由 μ 诱导的)外测度, 它有下列性质:

(1) 若 $A \in \mathscr{F}_0$, 则 $\mu^*(A) = \mu(A)$;

(2) (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

(3) (次可列可加性) 若 $\{A_n\}$ 是 Ω 的一个子集列, 那么

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

其中(2), (3) 可由定义直接验证, 而 (1) 的证明要用到 μ 的次可列可加性.

一般地, 2^Ω 上的一个空集上为零且满足 (2), (3) 的非负集函数常称为是 Ω 上的外测度. Ω 的任意子集 A 称为是 μ^*- 可测的, 如果对任何 $E \subset \Omega$, 有

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A^c \bigcap E).$$

由外测度的性质, 上式等价于

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A^c \bigcap E).$$

记 $\mathscr{M}$ 为 Ω 的 μ^*- 可测子集全体.

定理 1.1.1 (Carathéodory) 定义如上, 则有下列性质:

(1) $(\Omega, \mathscr{M}, \mu^*)$ 是测度空间;

(2) $\mathscr{M} \supset \mathscr{F}_0$;

(3) $\mathscr{M}$ 包含所有 μ^*- 零测集. 因此, $(\Omega, \mathscr{M}, \mu^*)$ 是完备的.

证明 (1) 我们须证 $\mathscr{M}$ 是 Ω 上 σ- 代数且 μ^* 是 $\mathscr{M}$ 上的测度. 显然 $\varnothing, \Omega \in \mathscr{M}$ 且 $\mathscr{M}$ 对补集运算封闭, 故只须验证 $\mathscr{M}$ 对可列并运算封闭. 事实上, $\mathscr{M}$ 对有限并运算封闭, 因为若 $A, B \in \mathscr{M}$, 则对 $E \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A^c \bigcap E) \\
&= \mu^*(A \bigcap E) + [\mu^*(B \bigcap A^c \bigcap E) + \mu^*(B^c \bigcap A^c \bigcap E)] \\
&= [\mu^*(A \bigcap (A \bigcup B) \bigcap E) + \mu^*((A \bigcup B) \bigcap A^c \bigcap E)] \\
&\quad\quad + \mu^*((B \bigcup A)^c \bigcap E)
\end{aligned}$$

$$= \mu^*((A\bigcup B)\bigcap E) + \mu^*((B\bigcup A)^c\bigcap E),$$

推出 $A\bigcup B \in \mathscr{M}$. 那么 $\mathscr{M}$ 对有限交运算也封闭. 故我们仅须验证 $\mathscr{M}$ 对不相交集列的可列并运算封闭. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{M}$ 中不相交集列, 令

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

由外测度的单调性得

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E\bigcap B_n) + \mu^*(E\bigcap B_n^c)\\
&\geqslant \mu^*(E\bigcap B_n) + \mu^*(E\bigcap A^c)\\
&= \mu^*(E\bigcap B_n\bigcap B_{n-1}) + \mu^*(E\bigcap B_n\bigcap B_{n-1}^c) + \mu^*(E\bigcap A^c)\\
&= \mu^*(E\bigcap B_{n-1}) + \mu^*(E\bigcap A_n) + \mu^*(E\bigcap A^c)\\
&= \cdots = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\bigcap A_i) + \mu^*(E\bigcap A^c).
\end{aligned}$$

由 n 的任意性与 μ^* 的次可列可加性推出

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E\bigcap A_i) + \mu^*(E\bigcap A^c)\\
&\geqslant \mu^*(E\bigcap A) + \mu^*(E\bigcap A^c),
\end{aligned}$$

因此 $A\in\mathscr{M}$. 不仅如此, 从上面的证明过程中可以看出对任何 $E\subset\Omega$,

$$\mu^*\left(E\bigcap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\bigcap A_i),$$

故 μ^* 有有限可加性

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(A_i).$$

结合 μ^* 的次可列可加性, 推出 μ^* 在 $\mathscr{M}$ 上有可列可加性. 因此 μ^* 是 $(\Omega,\mathscr{M})$ 上的测度, 显然, 证明对于一般的外测度都对.

(2) 设 $A\in\mathscr{F}_0$, 对任何 $E\subset\Omega$, 不妨设 $\mu^*(E)<\infty$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在子集列 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 满足 $\bigcup\limits_n A_n\supset E$ 且 $\sum\limits_n\mu(A_n)<\mu^*(E)+\epsilon$, 因而

$$\mu^*(E\bigcap A) + \mu^*(E\bigcap A^c)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mu^*((\bigcup_n A_n)\bigcap A) + \mu^*((\bigcup_n A_n)\bigcap A^c) \\
&= \mu^*(\bigcup_n (A_n \bigcap A)) + \mu^*(\bigcup_n (A_n \bigcap A^c)) \\
&\leqslant \sum_n [\mu^*(A_n \bigcap A) + \mu^*(A_n \bigcap A^c)] \\
&\leqslant \sum_n [\mu(A_n \bigcap A) + \mu(A_n \bigcap A^c)] \\
&= \sum_n \mu(A_n) < \mu^*(E) + \epsilon,
\end{aligned}
$$

其中最后的等式来自 μ 的有限可加性. 由此推出 $\mu^*(E\bigcap A)+\mu^*(E\bigcap A^c)\leqslant \mu^*(E)$, 即 $A\in \mathscr{M}$ 或 $\mathscr{F}_0\subset \mathscr{M}$.

(3) 设 A 是 μ^*- 零测集, 即 $\mu^*(A)=0$, 则对任何 $E\subset\Omega$, 有 $\mu^*(E)\leqslant \mu^*(E\bigcap A^c)$, 因此 $\mu^*(E)=\mu^*(E\bigcap A^c)=\mu^*(E\bigcap A)+\mu^*(E\bigcap A^c)$, 故 $A\in\mathscr{M}$. □

由定理推出 $\mathscr{M}\supset\mathscr{F}$, 则 μ^* 限制在 $\mathscr{F}$ 上是 μ 的一个扩张, 称它为 μ 的 Carathéodory 扩张, 在不至于引起误解时, 仍记为 μ. 注意, σ- 代数 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{F}_0$ 和 μ 都有关, 而 $\mathscr{F}$ 仅与 $\mathscr{F}_0$ 有关. $(\Omega,\mathscr{M},\mu^*)$ 是完备测度空间, 而 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 一般不是完备的. 环上预测度的 Carathéodory 扩张不一定是唯一的扩张.

例 1.1.6　取例 1.1.5 中 $\mathbf{R}$ 上的环 $\mathscr{B}_0$, 对 $A\in\mathscr{B}_0$, 定义

$$
\mu(A):=\begin{cases}0, & A=\varnothing,\\ +\infty, & A\neq\varnothing,\end{cases}
$$

则 μ 的 Carathéodory 扩张是 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上的奇异测度, 而显然计数测度也是 μ 的一个扩张, 它不同于 Carathéodory 扩张. ▮

下面我们将证明预测度的 σ- 有限性能保证 Carathéodory 扩张是唯一扩张. 称环 $\mathscr{F}_0$ 上预测度 μ 是 σ- 有限的, 如果存在集列 $\{\Omega_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 满足 $\bigcup\limits_n \Omega_n=\Omega$ 且 $\mu(\Omega_n)<\infty$. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间, 对 $\Omega_0\in\mathscr{F}$, 定义 $\mathscr{F}\bigcap\Omega_0:=\{\Omega_0\bigcap A: A\in\mathscr{F}\}$, 则 $\mathscr{F}\bigcap\Omega_0$ 是 Ω_0 上的 σ- 代数, 记 μ_{Ω_0} 是 μ 在 $\mathscr{F}\bigcap\Omega_0$ 上的限制, 那么 $(\Omega_0,\mathscr{F}\bigcap\Omega_0,\mu_{\Omega_0})$ 也是一个测度空间.

我们还需要介绍 Dynkin 的一个思想, 它给出证明一个子集类是 σ- 代数的一个方法, 在下面定理的证明中会使用它. 称一个子集类是 π- 类, 如果它对有限交封闭. 而称一个子集类是 Dynkin 系或 λ- 类, 如果它包含有 $\varnothing$, Ω 且对于补集运算与不交可列并运算封闭. 显然, 环是 π- 类, σ- 代数是 Dynkin 系, 反之不对. 容易看出任意

多个 Dynkin 系的交仍是 Dynkin 系, 因此对 Ω 的任何子集类 $\mathscr{A}$, 唯一存在一个包含 $\mathscr{A}$ 的最小 Dynkin 系, 记为 $\delta(\mathscr{A})$, 也类似地称为由 $\mathscr{A}$ 生成的 Dynkin 系. 下面是 Dynkin 定理.

引理 1.1.1 (Dynkin) 设 $\mathscr{F}_0$ 是一个 π- 类, 则 $\delta(\mathscr{F}_0)$ 是一个 σ- 代数, 因此 $\sigma(\mathscr{F}_0)=\delta(\mathscr{F}_0)$.

证明 由定义, 仅须验证 $\delta(\mathscr{F}_0)$ 对有限交运算封闭. 任取 $A\in\delta(\mathscr{F}_0)$, 定义

$$\kappa[A]:=\{B\in\delta(\mathscr{F}_0):\ A\bigcap B\in\delta(\mathscr{F}_0)\}.$$

先验证 $\kappa[A]$ 是一个 Dynkin 系. 事实上, 只需证明 $\kappa[A]$:

(1) 对补集运算封闭;

(2) 对不相交集列的可列并运算封闭.

对 (1), 取 $B\in\kappa[A]$, 则 $A,A^c,A\bigcap B\in\delta(\mathscr{F}_0)$, 因此 $A\bigcap B^c=[A^c\bigcup(A\bigcap B)]^c\in\delta(\mathscr{F}_0)$, 因此 $B^c\in\kappa[A]$.

为证明 (2), 取 $\{B_n\}\subset\kappa[A]$ 是不交集列, 则显然 $\{A\bigcap B_n\}$ 是 $\delta(\mathscr{F}_0)$ 中不交集列, 因此 $A\bigcap(\bigcup\limits_n B_n)\in\delta(\mathscr{F}_0)$, 推出 $\bigcup\limits_n B_n\in\kappa[A]$.

因 $\mathscr{F}_0$ 是 π- 类, 故 $A\in\mathscr{F}_0$ 蕴含着 $\kappa[A]\supset\mathscr{F}_0$ 即 $\kappa[A]\supset\delta(\mathscr{F}_0)$. 这意味着当 $A\in\delta(\mathscr{F}_0)$ 时, $\kappa[A]\supset\mathscr{F}_0$. 因此 $\kappa[A]\supset\delta(\mathscr{F}_0)$, 即 $\delta(\mathscr{F}_0)$ 中元素对有限交运算封闭. □

定理 1.1.2 如果 μ 是环 $\mathscr{F}_0$ 上的 σ- 有限的预测度, 则 μ 在最小 σ- 代数 $\mathscr{F}$ 上的扩张是唯一的.

证明 任取 μ 的一个扩张 $\overline{\mu}$, 取 $\Omega_0\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\Omega_0)<\infty$. 令

$$\mathscr{A}_0:=\{A\in\mathscr{F}\bigcap\Omega_0:\ \overline{\mu}(A)=\mu(A)\}.$$

因 $\overline{\mu}$ 与 μ 在 $\mathscr{F}\bigcap\Omega_0$ 上是有限测度, 故容易验证: (i) $\mathscr{A}_0\supset\mathscr{F}_0\bigcap\Omega_0$; (ii) $\mathscr{A}_0$ 是 Ω_0 上的 Dynkin 系. 因 $\mathscr{F}_0\bigcap\Omega_0$ 是 Ω_0 上的环, 故 $\mathscr{A}_0\supset\delta(\mathscr{F}_0\bigcap\Omega_0)=\sigma(\mathscr{F}_0\bigcap\Omega_0)=\mathscr{F}\bigcap\Omega_0$. 因此 $\overline{\mu}$ 与 μ 在 $\mathscr{F}\bigcap\Omega_0$ 上一致.

由 σ- 有限性, 可取递增集列 $\{\Omega_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 满足 $\bigcup\limits_n\Omega_n=\Omega$ 且 $\mu(\Omega_n)<\infty$. 那么对任何 $A\in\mathscr{F}$, $\overline{\mu}(A)=\lim\limits_n\overline{\mu}(A\bigcap\Omega_n)=\lim\mu(A\bigcap\Omega_n)=\mu(A)$. □

注 实际上, 由 Dynkin 的定理, 我们显然有更强的结果: 设 $\mathscr{F}_0$ 是 Ω 上的 π- 类, $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{F}_0)$, 如果 μ,ν 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 σ- 有限测度且两者在 $\mathscr{F}_0$ 上一致, 则它们在 $\mathscr{F}$ 上一致.

上面的几个定理说明一个测度空间可以在环上构造得到, 但实际上, 这通常可以在更简单的半环上进行(参见习题). 在例 1.1.5 中, 定义 $m((a,b])=b-a$, 则仿

照下面定理 1.3.1 的证明, m 是 $\mathscr{B}_0$ 上的一个预测度, 所诱导的 m^*- 可测集称为 Lebesgue 可测集, 记此集合为 $\mathscr{L}$, 诱导的测度称为 Lebesgue 测度. 注意:

(1) 不是所有 $\mathbf{R}$ 的子集都是 Lebesgue 可测的, 或者说一个平移不变的可列可加集函数是不可能在全体子集上定义的;

(2) $\mathscr{L}$ 严格地包含 Borel 代数 $\mathscr{B}$, 实际上, $\mathscr{L}$ 与 $\mathbf{R}$ 的幂集一一对应而 $\mathscr{B}$ 与 $\mathbf{R}$ 一一对应.

设 Ω, Ω' 是两个非空集合, ξ 是 Ω 到 Ω' 的一个映射. 对 $A' \subset \Omega'$, 定义

$$\xi^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A'\},$$

则容易验证下列性质:

(1) $\xi^{-1}(\Omega') = \Omega$, $\xi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;

(2) $\xi^{-1}[(A')^c] = [\xi^{-1}(A')]^c$;

(3) 对任何子集列 $\{A_i'\}$, $\xi^{-1}\left(\bigcup_i A_i'\right) = \bigcup_i \xi^{-1}(A_i')$.

设 $\mathscr{A}'$ 是 Ω' 的一个子集类, 令

$$\xi^{-1}(\mathscr{A}') := \{\xi^{-1}(A') :\ A' \in \mathscr{A}'\}.$$

则由上述性质, 如果 $\mathscr{A}'$ 是 Ω' 上 σ- 代数, $\xi^{-1}(\mathscr{A}')$ 是 Ω 上 σ- 代数. 可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 的映射 ξ 称为是可测的(或明确地, $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$- 可测的), 如果 $\xi^{-1}(\mathscr{F}') \subset \mathscr{F}$. 设 $\{\xi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 Ω 到 Ω' 的映射族, $\mathscr{F}'$ 是 Ω' 上的 σ- 代数, 那么 Ω 上存在唯一一个使得映射 $\{\xi_\lambda\}$ 都可测的最小 σ- 代数 $\mathscr{F}$, 即 (i) 每个 ξ_λ 是可测映射, (ii) 如果 Ω 上另外一个 σ- 代数 $\mathscr{F}_1$ 使得每个 ξ_λ 都可测, 那么 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1$. 事实上, 不难验证 $\mathscr{F}$ 是由 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \xi_\lambda^{-1}(\mathscr{F}')$ 所生成的 σ- 代数, 记为 $\sigma(\{\xi_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$.

设 μ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一个测度, 则可测映射 ξ 把 μ 映为 $(\Omega', \mathscr{F}')$ 上的测度 $\mu \circ \xi^{-1}$ (或记为 $\xi(\mu)$):

$$\xi(\mu)(A') := \mu(\xi^{-1}(A')),\ A' \in \mathscr{F}'.$$

称为 μ 在 ξ 下的像测度.

下面介绍 Hahn 分解和 Jordan 分解. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间, 称 $\mathscr{F}$ 上广义实值集函数 μ 为一个符号测度, 如果 (i) $\mu(\varnothing)$=0; (ii) μ 满足可列可加性. (其中, 可加性蕴含着或者对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) < +\infty$ 或者对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) > -\infty$.) 称符号测度是有限的, 如果对任何 $A \in \mathscr{F}$, $|\mu(A)| < +\infty$. 集 $A \in \mathscr{F}$ 是正集(负集), 如果其任何可测子集测度非负(非正). 以下习题中, 设 μ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上符号测度. 对 $A \in \mathscr{F}$, 定义 $\mu^+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathscr{F}\}$, $\mu^- := (-\mu)^+$. 那么 μ^+, μ^- 都是 $\mathscr{F}$ 上集函数.

引理 1.1.2 定义如上, 我们有下列性质:

(1) 正集的可列并是正集;

(2) A 是正集当且仅当 $\mu^-(A)=0$; 是负集当且仅当 $\mu^+(A)=0$;

(3) μ^+, μ^- 有单调性.

证明留作习题. 下面是 Hahn 分解.

定理 1.1.3 (Hahn) 存在 $H\in\mathscr{F}$ 使得 H 是正集, 而 H^c 是负集. 集 H 称为是 μ 的 Hahn 集, 它不唯一, 可以相差一个零测集.

证明 不妨设 μ 不取到 $+\infty$. 令 $b:=\sup\{\mu(A):A\in\mathscr{F}\}$. 现在我们验证上确界可在 $\mathscr{F}$ 中达到. 首先验证对任何 $k<b$, 存在正集 $A\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(A)\geqslant k$. 事实上由 b 的定义, 存在 $B\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(B)>k$. 如果 B 是正集, 记其为 A; 如果不是, 那么对任何 $0<a_1<\mu^-(B)$, 存在 $E_1\subset B$ 使得 $\mu(E_1)<-a_1$. 如果 $B\setminus E_1$ 是正集, 记其为 A; 如果不是, 那么对任何 $0<a_2<\mu^-(B\setminus E_1)$, 存在 $E_2\subset B\setminus E_1$ 使得 $\mu(E_2)<-a_2$. 这样继续, 或者在有限步得到正集 A, 这时显然 $\mu(A)>k$, 或者得到 B 的不相交可测子集列 $\{E_n\}$ 及正数列 $\{a_n\}$ 使得 $\mu(E_n)<-a_n$,

$$a_n<\mu^-\left(B\setminus(\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i)\right),\quad n\geqslant 1.$$

这时令 $E:=\bigcup_n E_n, A:=B\setminus E$, 则 $\mu(E)\leqslant 0$, $\mu(A)=\mu(B)-\mu(E)\geqslant\mu(B)>k$. 我们来验证 $\mu^-(A)=0$. 用反证法, 假设 $\mu^-(A)>0$. 因 $\mu^-[B\setminus(\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i)]\geqslant\mu^-(A)$, 则由 a_n 的取法, 存在 $\lambda>0$, 使得 $a_n\geqslant\lambda$. 因此 $\mu(E)\leqslant-\sum_n a_n=-\infty$, 推出 $k<\mu(B)=\mu(A)+\mu(E)=-\infty$. 矛盾. 这样证明了 $\mu^-(A)=0$.

因此, 可取得可测正集列 $\{A_n\}$, 使得 $\lim_n\mu(A_n)=b$, 令 $H:=\bigcup_n A_n$, 则 H 是一个 Hahn 集. 事实上, H 显然是正集, 且 $\mu(H)\geqslant b$, 故 $\mu(H)=b$. 因此 $b<+\infty$, 另外对 H^c 的任何可测子集 A, $b\geqslant\mu(H\bigcup A)=b+\mu(A)$, 推出 $\mu(A)\leqslant 0$. 这证明了 H^c 是负集. □

由此, 我们得到 Jordan 分解.

定理 1.1.4 (Jordan) 设 H 是 Hahn 集, 则

(1) $\mu^+(A)=\mu(A\bigcap H)$, $\mu^-(A)=\mu(A\bigcap H^c)$, $A\in\mathscr{F}$, 因此 μ^+, μ^- 是测度, 且其中至少有一个是有限的.

(2) $\mu=\mu^+-\mu^-$ 且如果存在测度 μ_1,μ_2 使得 $\mu=\mu_1-\mu_2$, 则 $\mu^+\leqslant\mu_1$, $\mu^-\leqslant\mu_2$.

记 $|\mu|:=\mu^++\mu^-$, 它称为是 μ 的全变差测度. $|\mu|(\Omega)$ 是 μ 的全变差.