江西省高等院校《工科数学》系列教材

XIANXINGDAISHU

线性代数
学习指导书

主　编 刘二根
副主编 朱传喜　匡奕群
　　　 徐　辉

江西高校出版社

XUEXIZHIDAOSHU

江西省高等院校《工科数学》系列教材

线性代数学习指导书

主　编　刘二根

副主编　宋传[illegible]　[illegible]

徐　辉

江西高校出版社

图书在版编目(C I P)数据

线性代数学习指导书/刘二根主编 .—南昌:江西高校出版社,2003.8

ISBN 7-81075-488-2

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039422 号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道 96 号)

邮编:330046 电话:(0791)8592235,8504319

各地新华书店经销

江西恒达科贸有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

2003 年第 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 6.25 印张 168 千字

印数:1~7000 册

定价:10.00 元

前　言

线性代数是高等学校理工科和经济学科等有关专业的一门重要基础课，它不但是其它数学课程的基础，也是物理、力学、电路、运筹学等课程的基础。此外，由于计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题的线性代数，已成为从事科学研究和工程计算的科技人员必备的数学基础。

本书是按照教育部“线性代数课程的基本要求”和“全国工学、经济学硕士研究生数学考试大纲”的要求而编写，通过对线性代数中的行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等内容的 140 多道典型例题进行分析和求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧。其中一部分例题选自全国硕士研究生入学考试数学试题，并在每道题前面标明了试题的年份及类别。每章之后还精选了一份目标测试题作为自我检查之用，使学生通过练习提高基本运算、推理及应试能力。

全书共分六章，由曾毅（第一、二章）、刘二根（第三、四章）、王森（第五、六章）分工编写，刘二根担任主编，对全书进行统稿。

本书是高等学校理工科和经济学科等有关专业学生学习线性代数课程的学习指导书，也可作为考研及自学考试的复习参考资料，并可供大专院校数学教师及其他有关人员作参考。

由于编者水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　行列式

内容提要

● 行列式概念

n 阶行列式：n 阶行列式是用特定的符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示由 $n \times n$ 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 确定的一个数．其中数 a_{ij} 称为行列式的第 i 行、第 j 列元素．$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 形成行列式的主对角线，$a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 形成另一条对角线．从 D_n 中划去第 i 行第 j 列后，剩下的 $(n-1) \times (n-1)$ 个元素组成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}．而 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式．n 阶行列式 D_n 的值由下面的归纳法定义，即：

当 $n = 1$ 时，$D_1 = |a_{11}| = a_{11}$；

假定 $n-1$ 阶行列式的值已经定义，则 M_{ij} 的值随之确定，且 n 阶行列式 D_n 的值为

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n},$$

或　$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

对角行列式：对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式，其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

三角形行列式:对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为上(下)三角行列式,其形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

转置行列式:将行列式 D 的行列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^T.

● 行列式性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等;

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值变号;

性质 3　如果行列式有两行(列)完全相同,则行列式的值为零;

性质 4　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以该行列式;

性质 5　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号之外;

性质 6　如果行列式中有两行(列)对应元素成比例,则行列式的值为零;

性质 7　如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数之和,则该行列式可写成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots(a_{1i}+a_{1i}')\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots(a_{2i}+a_{2i}')\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots(a_{ni}+a_{ni}')\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1i}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2i}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{ni}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1i}'\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2i}'\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{ni}'\cdots a_{nn} \end{vmatrix};$$

性质 8　行列式的某一行(列)各元素乘以同一个数加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$
\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.
$$

行列式按行(列)展开定理:行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和为零.即

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & i=j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}
$$

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & i=j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}
$$

● 克莱姆法则

设线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}
$$

若其系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

则线性方程组有且只有唯一解,其解为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.
$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列的元素用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=0$.

● 特殊行列式的计算

上(下)三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

准三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$$

例题分析

例 1 写出下列行列式中元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式及代数余子式.

$$(1)\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&-1&0\\-2&2&4\end{vmatrix};\qquad(2)\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\3&-1&0&4\\-2&2&4&1\\1&7&8&-2\end{vmatrix}.$$

解 (1) 元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式分别为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&0\\2&4\end{vmatrix},M_{23}=\begin{vmatrix}1&-1\\-2&2\end{vmatrix},M_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\3&-1\end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式分别为

$$A_{11}=M_{11},A_{23}=-M_{23},A_{33}=M_{33}.$$

(2) 元素 a_{11},a_{23},a_{33} 的余子式为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&0&4\\2&4&1\\7&8&-2\end{vmatrix},M_{23}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\1&7&-2\end{vmatrix},M_{33}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\3&-1&4\\1&7&-2\end{vmatrix}.$$

相应的代数余子式分别为

$$A_{11}=M_{11},A_{23}=-M_{23},A_{33}=M_{33}.$$

例 2 用行列式定义计算下列行列式.

$$(1)\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix};\qquad(2)D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

解 (1) 由行列式的定义,得

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-5) - 2 \times (-1) + 3 \times 7$$
$$= 18.$$

(2) 由行列式的定义,得

$$D_n = (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [(-1)^{1+2}]^2 \times 2! \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= [(-1)^{1+2}]^{n-2} \times (n-2)! \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} n!.$$

例 3　已知 104、143、377 均能被 13 整除,不计算行列式的值,试用行列式的性质证明:$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}$能被 13 整除.

分析　因为 $104 = 1 \times 100 + 0 \times 10 + 4$,$143 = 1 \times 100 + 4 \times 10 + 3$,$377 = 3 \times 100 + 7 \times 10 + 7$ 及行列式元素的特点,所以可将第一列乘以 100、第二列乘以 10 加到第三列,则第三列的三个元素分别为 104,143,377,于是利用行列式的性质便可得到结论.

证　因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 104 \\ 1 & 4 & 143 \\ 3 & 7 & 377 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 7 & 29 \end{vmatrix},$$

又因为右端行列式的元素皆为整数,由行列式定义知其值为整数,故原行列式能被 13 整除.

例 4　设 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&7\\1&1&1&2\\-1&2&3&5\\7&9&-1&4\end{vmatrix}$，求(1) A_{44}；(2) 利用(1) 的结果求 $\sum\limits_{k=1}^{4}A_{4k}$.

解　(1) $A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\-1&2&3\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-1&2&3\end{vmatrix}=1.$

(2) 因为行列式的第二行的元素分别乘以第四行对应元素的代数余子式相加，得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}=0,$$

所以　$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-A_{44}=-1.$$

例 5　设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$，

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$.

分析　如果先求出 A_{41}, A_{42}, A_{43} 然后再相加求出 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$，则要计算 3 个四阶行列式，比较麻烦，本例可利用行列式第二行、第四行元素的特点及行列式展开定理得到关于 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 及 $A_{44}+A_{45}$ 的两个方程，通过解方程得到所求的值.

解　由行列式展开定理，得

$$\begin{cases}A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27,\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0.\end{cases}$$

解上述方程组得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18.$$

例 6　(2001. Ⅳ) 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix},$$

求第四行各元素余子式之和.

解 以 M_{ij} 表示 D 中元素 a_{ij} 的余子式,考虑行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix},$$

因为 D_1 中第四行元素的余子式 $M_{41},M_{42},M_{43},M_{44}$ 也是 D 中第四行相应元素的余子式 $M_{41},M_{42},M_{43},M_{44}$,将 D_1 按第四行展开,得

$$\begin{aligned}D_1&=(-1)^{4+1}(-1)M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}(-1)M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44},\end{aligned}$$

于是 D 中第四行各元素余子式之和等于 D_1.

不难求得 $D_1=-28$,所以

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28.$$

例 7 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\ 1 & x-2 & 3x-2\\ 1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$.

分析 要证明存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$,只要证明 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件.

证 因为 $f(x)$ 为关于 x 的二次多项式,故在区间 $[0,1]$ 上连续,在区间 $(0,1)$ 内可导,又因为

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

即有
$$f(0)=f(1).$$

由罗尔定理,可知存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = 0$.

例 8　计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解　方法 1 （化三角形行列式）

$$D_4 \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_4-r_3}}{\underset{r_3+2r_1}{=}} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_3-4r_2}{\underset{r_4-2r_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -17 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-2r_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix} \overset{r_4+4r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+2r_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_4-3r_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= -19.$$

方法 2 （逐次降阶法）

$$D_4 \overset{c_3+c_1}{\underset{c_4+2c_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2-9c_1}{\underset{c_3-5c_1}{=}}\begin{vmatrix} 3 & -23 & -10 \\ 4 & -41 & -17 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -23 & -10 \\ -41 & -17 \end{vmatrix}$$

$$= -19.$$

注:上述两种解法是求三、四阶行列式常用的方法.

例 9　计算行列式.

$$(1)D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix};(2)D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解　(1) 显而易见,当 $2-x^2=1$,即 $x=\pm 1$ 时,D_4 种第一、二行对应元素相同,此时 $D_4=0$,即 D_4 有因子 $(x-1)(x+1)$.

当 $9-x^2=5$,即 $x=\pm 2$ 时,D_4 种第三、四行对应元素相同,此时 $D_4=0$,因此 D_4 还有因子 $(x-2)(x+2)$.

又因为行列式 D_4 为 x 的 4 次多项式,所以令

$$D_4 = a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),$$

现只要求出 x^4 的系数即可.又当 $x=0$ 时,可算出 $D_4=-12$,于是 $a=-3$,故

$$D_4 = -3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

(2) 因为 $D_4^2 = D_4 D_4'$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix},$$

其中 $$f = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

所以 $$D_4 = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

又因为行列式 D_4 中 a^4 的系数为 1,故

$$D_4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

注:上例中(1) 的解法称为分析因子法,即运用行列式性质找出 D_4 的全部因子,最后再确定最高次项系数;(2) 的解法虽有一定的特殊性,但说明当 D_n^2 或$D_n^2 = D_n D_n'$ 易于计算时,可先求出 D_n^2,然后确定 D_n 的符号,从而求出 D_n.

例 10 利用行列式性质证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

证 左边 $$\overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(a_1+b_1+c_1) & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ 2(a_2+b_2+c_2) & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2-c_1}{\underset{c_3-c_1}{=}} 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_2+c_3}{=} 2\begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$