

万水 ANSYS技术丛书



ANSYS

土木工程应用实例

郝文化 主 编
叶裕明 刘春山 等编著
沈火明 肖新标



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

万水 ANSYS 技术丛书

ANSYS 土木工程应用实例

郝文化 主编

叶裕明 刘春山 沈火明 肖新标 等编著

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书用深入浅出的语言介绍了 ANSYS 7.0 大型有限元软件在土木工程中的应用。本书首先简单介绍了 ANSYS 7.0 的一些基本功能,包括软件的安装与启动、一般工程的分析步骤、文件系统的管理等内容;然后借助众多精典实例深入地阐述了 ANSYS 与土木工程分析相关的高级分析技术,包括参数化语言设计、单元的生死和动画制作等;最后,以土木工程中常见的实际结构为对象,重点对混凝土结构、桥梁结构、房屋结构、桩基结构以及水工建筑物等工程结构进行了有限元仿真分析。同时,本书还包含众多精典实例的命令流,读者可以自由选取其作为研究和学习之用。

本书既可以作为理工科院校土木、力学、建筑等相关专业的高年级本科生、硕士生、博士生与教师学习 ANSYS 软件及其具体应用的学习教材,也可以作为从事土木建筑工程、结构分析工程等专业的科研人员和工程技术人员学习使用 ANSYS 软件的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 土木工程应用实例/郝文化主编. —北京:中国水利水电出版社, 2005

(万水 ANSYS 技术丛书)

ISBN 7-5084-2444-1

I. A… II. 郝… III. 土木工程—有限元分析—应用程序, ANSYS
IV. TU

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 114972 号

书 名	ANSYS 土木工程应用实例
作 者	郝文化 主编 叶裕明 刘春山 沈火明 肖新标 等编著
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)、82562819 (万水) 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市天竺颖华印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16 开本 22 印张 493 千字
版 次	2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—5000 册
定 价	32.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

序

美国 ANSYS 公司作为全球计算机辅助工程 (CAE) 领域最主要的软件供应商之一, 近 40 年来一直致力于 CAE 技术的研究和发展。ANSYS 所具有的灵活、开放的解决方案, 为概念设计到最终测试的设计全过程提供了全程 CAE 协同环境, 可以使工程师们在设计的各个阶段采用 CAE 技术, 缩短研发流程、降低研发费用、提高设计质量。无论是在国内还是国外, ANSYS 都是使用最频繁、应用范围最广的 CAE 软件之一。

在世界范围内 ANSYS 已经成为土木建筑行业分析软件的主流, 在钢结构和钢筋混凝土房屋建筑、体育场馆、桥梁、大坝、砼室、隧道以及地下建筑物等工程中得到了广泛的应用, 通过它可以对这些结构在各种外载荷条件下的受力、变形、稳定性及各种动力特性做出全面分析。从力学计算、组合分析等方面提出了全面的解决方案, 为土木工程师提供了功能强大且方便易用的分析手段。

ANSYS 是一个大型通用的商业有限元软件, 功能完备的前后处理器、强大的图形处理能力和得心应手的实用工具使 ANSYS 软件易学易用。通过它, 用户可以很容易地实现对土木工程热点问题的处理, 例如: 预应力施加和计算、徐变、施工过程模拟、预应力筋配置计算、混凝土压溃和开裂计算等。

本书作者长期使用 ANSYS 软件从事教学、科研工作, 完成了许多大型土木工程的实际工程问题的仿真计算, 具有深厚的有限元理论背景, 对 ANSYS 软件的使用也有较深的造诣。本书内容由浅入深, 详细介绍了 ANSYS 软件在土木工程中的应用知识, 并针对土木工程各专业领域的具体应用给了具有较强参考价值的工程实例, 比如: 混凝土问题分析、桥梁结构工程应用、房屋建筑工程应用、基础工程应用、水工应用等等, 并给出了很多的工程实例。本书具有较高的实用价值, 特别适于作为土木工程专业的高年级本科生、研究生和工程技术人员学习掌握 ANSYS 软件的参考教材。

ANSYS-CHINA

唐 伟

前 言

近 40 年来,随着计算机的飞速发展和广泛应用以及有限元理论的日益完善,出现了许多通用和专业的有限元计算软件,并在各个领域得到了广泛的应用。其中较为著名的通用大型有限元软件有 ANSYS、ALGOR、ABAQUS、MSC.NASTRAN 和 MSC.MARC 等。

ANSYS 软件作为一个大型通用有限元分析软件,能够进行结构、热、流体、电磁以及声学等学科的研究,广泛应用于土木工程、地质矿产、水利、铁道、汽车交通、国防军工、航天航空、船舶、机械制造、核工业、石油化工、轻工、电子、家用电器和生物医学等一般工业及科学研究之中。ANSYS 软件是第一个通过 ISO 9001 质量认证的大型有限元分析设计软件,是美国机械工程师协会(ASME)、美国核安全局(NQA)及近二十种专业技术协会认证的标准分析软件。

在国内,ANSYS 是第一个通过中国压力容器标准化技术委员会认证并在国务院十七个部委推广使用,是唯一被中国铁路机车车辆总公司选定为实现“三上”目标的有限元分析软件。

在世界范围内,ANSYS 软件已经成为土木建筑行业 CAE 仿真分析软件的主流。在钢结构和钢筋混凝土房屋建筑、体育场馆、桥梁、大坝、砗室、隧道以及地下建筑物等工程中得到了广泛的应用,通过它可以对这些结构在各种外载荷条件下的受力、变形、稳定性及各种动力特性做出全面分析。在力学计算、组合分析等方面提出了全面的解决方案,为土木工程师提供了功能强大且方便易用的分析手段。ANSYS 在中国的很多大型土木工程中都得到了应用,如上海金茂大厦、国家大剧院、黄河下游特大型公路斜拉桥、龙首电站大坝、二滩电站和三峡工程等都利用了 ANSYS 软件进行有限元仿真分析。

主要内容

本书以 ANSYS 7.0 为软件平台,共分 8 章。具体内容安排如下:

第 1 章 土木工程数值模拟方法简介。主要介绍了有限元法的起源、相关概念及分析问题的方法。

第 2 章 大型有限元软件 ANSYS 7.0 简介。主要介绍了 ANSYS 7.0 的基础知识,如安装与启动、使用界面介绍、内存管理、文件管理、注释等。

第 3 章 进行土木工程分析的相关高级技术。主要对与土木工程仿真分析有关的 ANSYS 的高级技术进行了深入的阐述,如参数化设计语言、子模型与子结构、自适应网格的划分、单元的生死、图形输出和动画制作等。

第 4 章 ANSYS 混凝土问题分析。主要介绍如何利用 ANSYS 对混凝土 SOLID65 单元、钢筋混凝土板受力分析、钢筋混凝土梁分析、预应力钢筋混凝土分析、混凝土开裂模拟和混凝土浇筑模等进行了系统分析与模拟。

第5章 ANSYS 混凝土问题分析。主要介绍如何利用 ANSYS 对各种桥梁进行仿真分析。如桁架桥的受力分析、悬索桥的受力分析、移动载荷作用下桥梁的动态响应、连续刚构桥三维仿真分析、桥梁的地震响应分析和斜拉桥三维仿真分析等。

第6章 ANSYS 房屋建筑工程应用。主要介绍了 ANSYS 在房屋建筑工程中的应用，如 ANSYS 三维网架设计、网架屋顶结构的受力分析和高层框架房屋结构的三维仿真等。

第7章 ANSYS 基础及地下工程应用。主要介绍了房屋建筑刚性基础三维仿真分析、刚性基础三维仿真分析、实体桥墩应力分析和隧道开挖仿真模拟等相关知识。

第8章 ANSYS 在水工工程中的应用。分别介绍了 ANSYS 在基础工程和水工工程中的实际应用。

本书中所有实例的命令流都可以到<http://www.bojia.net>下载以供学习研究之用。

本书约定

在本书中，ANSYS 的具体操作基本上均是从命令方式及 GUI（图形用户界面菜单）方式两方面加以介绍的，其中在 GUI 方式中，如 Main Menu>Preprocessor>Material Props>Material Models，表示依次执行各级菜单命令。

适用对象

本书既可以作为理工科院校土木、力学、建筑等相关专业的高年级本科生、硕士生、博士生与教师学习 ANSYS 软件及其具体应用的学习教材，也可以作为从事土木建筑工程、结构分析工程等专业的科研人员和工程技术人员学习使用 ANSYS 软件的参考用书。

编写分工

在这里，我们谨代表编者和用户，向 ANSYS 公司致以诚挚的敬意和真诚的谢意，感谢其为广大用户提供的强大的工具。

在此感谢 ANSYS-CHINA 高级应用工程师唐伟为本书作序。

本书由郝文化主编，叶裕明、刘春山、沈火明、肖新标、赵光明担任主要编写工作。同时，参与本书编排的人员还有：邹素琼、王安贵、陈郭宜、程小英、谭小丽、卢丽娟、刘育志、吴淬砺、赵明星、贺洪俊、李小平、史利、张燕秋、周林英、黄茂英、李力、李小琼、李修华、田茂敏、苏萍、巫文斌、邹勤、粟德容、董芳、李中全、蒋敏、刘华菊、袁媛、李建康等，在此一并感谢。

由于编写时间仓促，书中疏漏之处在所难免，欢迎广大读者和同行批评指正。如果读者愿意参加“ANSYS 土木工程应用教程”的学习培训，或是在学习过程中发现问题，或有更好的建议，欢迎致函。同时，我们也非常愿意随时同 ANSYS 土木工程应用高手保持经常的联系，E-mail: bojia@bojia.net，网址: <http://www.bojia.net>，我们将认真、负责地对待每位读者的来信。

目 录

序

前言

第 1 章 土木工程数值模拟方法简介	1
1.1 数值模拟方法概述.....	1
1.2 有限元法简介.....	2
1.2.1 有限元法的起源.....	2
1.2.2 有限元的常用术语.....	2
1.3 可转化为有限元法的弹性力学问题.....	4
1.3.1 变分法.....	4
1.3.2 Rayleigh-Ritz 法.....	5
1.3.3 加权余量法.....	6
第 2 章 大型有限元软件 ANSYS 7.0 简介	7
2.1 概述.....	7
2.1.1 ANSYS 在计算机辅助工程的地位.....	7
2.1.2 ANSYS 7.0 的主要技术特点.....	8
2.1.3 ANSYS 7.0 软件的主要功能.....	8
2.1.4 ANSYS 7.0 软件的新增功能.....	10
2.2 安装与启动.....	12
2.2.1 系统要求.....	12
2.2.2 安装介绍.....	13
2.2.3 运行参数设置.....	14
2.2.4 启动和退出.....	15
2.3 使用界面介绍.....	16
2.3.1 窗口及菜单介绍.....	16
2.3.2 设置用户界面.....	18
2.4 内存管理.....	20
2.4.1 概述.....	20
2.4.2 内存管理.....	20
2.4.3 配置文件.....	20
2.5 文件管理.....	21
2.5.1 文件类型.....	21
2.5.2 文件管理.....	23
2.6 注释.....	25

2.6.1	概述	25
2.6.2	生成注释	26
2.7	有限元分析基本过程的实例	26
2.7.1	分析问题概述	26
2.7.2	定义材料、几何常数和单元类型	27
2.7.3	建立几何模型	28
2.7.4	划分网格	29
2.7.5	加载及求解	29
2.7.6	查看结果	31
第 3 章	进行土木工程分析的相关高级技术	33
3.1	参数化设计语言	33
3.1.1	参数化设计语言概述	33
3.1.2	参数化设计语言的应用举例	37
3.2	子模型与子结构	40
3.2.1	子模型	40
3.2.2	子结构	44
3.3	自适应网格的划分	50
3.3.1	前提条件	50
3.3.2	步骤	51
3.3.3	应用举例	52
3.4	单元的生死	53
3.4.1	概述	53
3.4.2	单元生死的使用	54
3.4.3	生死单元的控制	57
3.4.4	排错检查	58
3.4.5	单元生死应用实例	59
3.5	图形输出	61
3.5.1	概述	61
3.5.2	生成中性文件	63
3.5.3	制作硬拷贝图形文件	63
3.5.4	模态分析后处理中图片的抓取	63
3.6	动画制作	68
3.6.1	概述	68
3.6.2	基本动画命令	68
3.6.3	单步动画的生成	69
3.6.4	Windows 环境动画的制作	72

第 4 章 ANSYS 混凝土问题分析.....	75
4.1 概述.....	75
4.1.1 关于模型.....	75
4.1.2 本构关系及破坏准则.....	76
4.2 混凝土 SOLID65 单元.....	77
4.2.1 SOLID65 单元理论基础.....	77
4.2.2 SOLID65 单元使用方法.....	82
4.3 钢筋混凝土板受力分析.....	85
4.3.1 问题的描述.....	85
4.3.2 建模.....	86
4.3.3 网格划分.....	88
4.3.4 加载、求解.....	89
4.3.5 计算结果及分析.....	90
4.4 钢筋混凝土梁分析.....	92
4.4.1 问题的描述.....	92
4.4.2 建模.....	93
4.4.3 加载、求解.....	98
4.4.4 计算结果及分析.....	98
4.5 预应力钢筋混凝土分析.....	100
4.5.1 相关概念.....	100
4.5.2 问题的描述.....	101
4.5.3 建模.....	102
4.5.4 划分网格.....	103
4.5.5 加载、求解.....	104
4.5.6 结果分析.....	105
4.6 混凝土开裂模拟.....	106
4.6.1 相关概念.....	106
4.6.2 问题的描述.....	108
4.6.3 建模.....	108
4.6.4 划分网格.....	109
4.6.5 加载和求解.....	109
4.6.6 计算结果分析.....	110
4.7 混凝土浇筑模.....	111
4.7.1 相关概念.....	111
4.7.2 问题的描述.....	112
4.7.3 建模.....	113
4.7.4 划分网格.....	113

4.7.5	加载和求解	114
4.7.6	结果分析	119
第 5 章	ANSYS 桥梁结构工程应用	121
5.1	概述	121
5.2	桁架桥的受力分析	122
5.2.1	相关概念	122
5.2.2	问题的描述	124
5.2.3	建模假设	124
5.2.4	建模	125
5.2.5	加载和求解	128
5.2.6	结果分析	129
5.3	悬索桥的受力分析	130
5.3.1	相关概念	130
5.3.2	问题的描述	132
5.3.3	建模假设	132
5.3.4	自下而上建模	134
5.3.5	加载和求解	136
5.3.6	结果分析	138
5.4	移动载荷作用下桥梁的动态响应	139
5.4.1	相关概念	139
5.4.2	问题描述	141
5.4.3	建模	142
5.4.4	加载与求解	143
5.4.5	结果分析与比较	145
5.5	连续刚构桥三维仿真分析	147
5.5.1	相关概念	147
5.5.2	问题的描述	148
5.5.3	建模	148
5.5.4	加载及求解	156
5.5.5	计算结果及分析	157
5.6	桥梁的地震响应分析	158
5.6.1	相关概念	158
5.6.2	问题的描述	161
5.6.3	建模	164
5.6.4	网格划分、施加边界条件	165
5.6.5	地震谱响应分析	165
5.6.6	地震波瞬态分析	167

5.7	斜拉桥三维仿真分析	169
5.7.1	相关概念	169
5.7.2	问题的描述	171
5.7.3	建模假设	172
5.7.4	建模及结果分析	173
第6章	ANSYS 房屋建筑工程应用	183
6.1	概述	183
6.2	ANSYS 三维网架设计	184
6.2.1	问题的描述	184
6.2.2	建模	186
6.2.3	加载与求解	191
6.2.4	计算结果分析	192
6.3	网架屋顶结构的受力分析	194
6.3.1	问题的描述	194
6.3.2	建模	197
6.3.3	加载与求解	200
6.3.4	计算结果分析	202
6.4	高层框架房屋结构的三维仿真	204
6.4.1	问题的描述	204
6.4.2	建模	207
6.4.3	加载与求解	212
6.4.4	计算结果分析	214
第7章	ANSYS 基础及地下工程应用	217
7.1	概述	217
7.1.1	ANSYS 与基础工程	217
7.1.2	Drucker-Prager(DP)材料	218
7.1.3	接触分析	220
7.2	房屋建筑刚性基础三维仿真分析	224
7.2.1	问题的描述	224
7.2.2	建模	227
7.2.3	加载与求解	231
7.2.4	计算结果与分析	232
7.2.5	桩土作用问题的另一种参考分析方法	234
7.3	刚性基础三维仿真分析	243
7.3.1	相关概念	243
7.3.2	问题的描述	244
7.3.3	建模	245

7.3.4	加载与求解	248
7.3.5	计算结果处理与分析	249
7.4	实体桥墩应力分析	249
7.4.1	桥墩分析的工程背景	249
7.4.2	问题的描述	251
7.4.3	建模假设	252
7.4.4	建模	253
7.4.5	加载与求解	254
7.4.6	计算结果分析	257
7.5	隧道开挖仿真模拟	258
7.5.1	相关概念	258
7.5.2	问题的描述	261
7.5.3	建模	261
7.5.4	加载与求解	268
7.5.5	计算结果分析	270
第 8 章	ANSYS 在水工中的应用	272
8.1	概述	272
8.2	重力坝三维仿真分析	273
8.2.1	相关概念	273
8.2.2	问题的描述	275
8.2.3	建模	276
8.2.4	加载与求解	282
8.2.5	计算结果分析	287
附录	292
参考文献	336
参考资料	337

第 1 章 土木工程数值模拟方法简介

知识点:

- 有限元常用术语
- 有限元的相关方法

本章导读:

介绍了有限元法的理论基础、起源及特点,结合平衡方程的建立方法和函数调试等相关理论的解释,阐述了有限元分析问题的基本思路及相关过程。

1.1 数值模拟方法概述

工程技术领域中的许多力学问题和场问题,如固体中的位移场、应力场分析、电磁学中的电磁分析、振动特性分析、热力学中的温度分析、流体力学中的流场分析等,都可以归结为在给定边界条件下求解其控制方程(常微分方程和偏微分方程)的问题。虽然人们能够得到它们的基本方程和边界条件,但是能够用解析法去求解的只是少数性质比较简单和边界比较规则的问题,而实际结构的形状和所受到的载荷往往比较复杂,按解析法求解是非常困难的。解决这类复杂问题主要有两种方法:一是引入简化假设,使其达到能用解析法求解的状态,然后求其近似解,此方法不一定总是可行,且容易导致不正确或错误的解答;二是保留问题的复杂性,利用数值模拟方法求得问题的近似解。数值模拟技术是人们在现代数学、力学理论的基础上,借助于计算机技术来获得满足工程要求的数值近似解,数值模拟技术(即 CAE 技术, Computer-aided Engineering)是现代工程仿真学发展的重要推动力之一。

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有:有限单元法 FEM (Finite Element Method)、边界元法 BEM (Boundary Element Method)、有限差分法 FDM (Finite Difference Method) 和离散单元法 (Discrete Element Method) 等,其中有限单元法是最具实用性和应用最广泛的。数值模拟结合计算机技术形成的应用软件在工程中得到广泛的应用,国际上著名的有限元通用软件有 ANSYS、MCS.PATRAN、MCS.NASTRAN、MCS.MARC、ABQUS 和 ADINA 等。它们大多采用 FORTRAN 语言编写,不仅包含多种条件下的有限元分析程序而且带有强大的前处理和后处理程序。大多数有限元通用软件拥有良好的用户界面、使用方便、功能强大,在当今强大的硬件基础的支持下,对于工程校验、仿真计算有着广阔的应用前景。

1.2 有限元法简介

1.2.1 有限元法的起源

有限元法在 20 世纪 50 年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析认为一个结构可以看作是由有限个力学小单元互相连接组成的集合体，表征单元力学特性的刚度矩阵可以比喻为建筑物中的砖，装配在一起就能提供整个结构的力学特性。如果单元满足问题的收敛要求，那么随着单元尺寸的缩小，增加求解区域内单元的数目，解的近似程度将不断改进，近似解最终将收敛于精确解。

有限单元法从 20 世纪 50 年代至今，经过几十年的发展，不断开拓新的应用领域，其范围已经由杆件结构问题扩展到了弹性力学乃至塑性力学问题，由平面问题扩展到空间问题，由静力学问题扩展到动力学问题和稳定性问题，由固体力学问题扩展到流体力学、热力学和电磁学等问题。

有限元法有许多优点：

- 概念浅显，容易掌握。可以在不同的水平上建立起对该法的理解；可以通过非常直观的物理概念来理解；也可以建立基于严格的数学分析的理论。
- 适用性强，应用广泛，几乎适用于求解所有的连续介质和场问题。
- 采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序，可以充分利用高速计算机所提供的方便。

有限元法分析问题的基本步骤：

(1) 结构的离散化。离散化就是将要分析的结构分割成有限个单元体，并在单元体的指定点设置节点，使相邻单元的有关参数具有一定的连续性，并构成一个单元的集合体以代替原来的结构。结构离散化时，划分的单元大小和数目应根据计算精度的要求和计算机的容量来决定。

(2) 选择位移插值函数。为了能用节点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析连续体问题时，必须对单元中位移的分布作出一定的假设，即假定位移是坐标的某种简单的函数。选择适当的位移函数是有限单元法分析中的关键。通常采用多项式作为位移函数。

(3) 分析单元的力学特性。利用几何方程、本构方程和变分原理最终得到单位刚度矩阵。

(4) 集合所有单元的平衡方程，建立整体结构的平衡方程。先将各个单元刚度矩阵合成整体刚度矩阵，然后将各单元的等效节点力列阵集合成总的载荷列阵。

(5) 由平衡方程组求解未知节点位移和计算单元应力。

1.2.2 有限元的常用术语

1. 单元与节点

如图 1-1 所示，对于任何连续体，都可以将其想象成由有限个简单形状的单元体组成。任意相邻单元只能在节点处相互连接，这些单元的组合被称作实际对象的近似模型。

常用单元可以分为自然单元和分割单元：一些工程构件如桁架结构的连杆在分析时无需再加分割叫做自然单元，自然构件能否看作自然单元取决于所研究的范围和构件本身的力学性质。将整体结构和连续体分成许多小单元的组合，这种单元称为分割单元。从理论上讲，单元的分割是任意的，不过在实际计算中必须根据研究对象的特点，使单元分割既能满足力学分析要求，又能使计算简单。

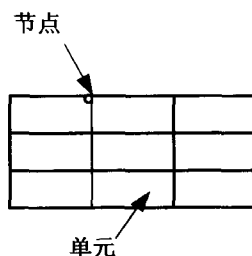


图 1-1 单元、节点示意图

节点就是单元与单元之间设置的互相连接点。节点可分为铰接、固接或其他形式的连接。节点一般分为主外节点、副主外节点和内节点 3 类。有了节点才可以将实际连续体看成是仅在节点处互相连接的单元群组成的离散型结构，从而可使研究的对象转化成可以使用计算机计算的数学模型。

2. 节点力和节点载荷

相邻单元之间的相互作用是通过节点来实现的，这种通过节点的相互作用力就是节点力，也称节点内力。

作用在节点上的外载荷称为节点载荷。节点载荷分为两部分：一是原来作用在节点上的外力；二是按静力等效原则将作用在单元上的分布力移置到节点上的节点载荷。

将单元上的实际载荷向节点移置的目的就是简化各单元上的受力情况，以便建立单元和系统的平衡方程，也就是建立节点位移和节点载荷之间的关系式。

3. 位移函数

连续体被离散后，需要用一些近似函数来描述单元物理量如位移、应变的变化情况。用以表示单元内的位移或位移场的近似函数称为位移函数。一般来说都是选取多项式作为位移函数，原因是多项式的数学运算（微分、积分等）比较容易，而且在一个单元内适当选取多项式可以得到与真实解较为接近的近似解。选取位移函数有广义坐标法和插值函数法两种。对于位移函数要求：

- 位移函数在单元内部是连续的。
- 两相邻单元在交界处的位移是连续的。

4. 收敛准则

对于一个数值方法，总是希望随着网格的逐步细分，得到的解答收敛于问题的精确解。为了保证解答的收敛性，要求位移模式必须满足以下 3 个条件：

- 位移函数必须包含单元的刚体位移。当节点位移是由某个刚体位移所引起时，弹性体内不会有应变，因而节点力也为零。
- 位移函数必须能包含单元的常应变。
- 位移函数在单元内要连续，在相邻单元间的公共边界上能协调。后者指两相邻单元在变形时既不重叠也不分离。

在有限元法中，满足前面两个条件的单元称为完备单元，满足最后一个条件的单元称为协调单元。

1.3 可转化为有限元法的弹性力学问题

弹性力学问题的基本方程有平衡方程、几何方程、本构方程及边界条件。

$$\text{几何方程: } \quad \varepsilon = Lu \quad (1-1)$$

$$\text{物理方程: } \quad \sigma = D\varepsilon \quad (1-2)$$

$$\text{平衡方程: } \quad L^T \sigma + q = 0 \quad (1-3)$$

$$\text{应力边界条件: } \quad L_n^T \sigma = p \quad (\text{在 } S_t \text{ 上}) \quad (1-4)$$

$$\text{位移边界条件: } \quad u = \bar{u} \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \quad (1-5)$$

其中, L 为微分算子, D 为弹性矩阵, q 为体积力向量, p 为面力向量。弹性力学问题通常可以采用两种数学描述方法, 即微分方程的边值问题和泛函的极值问题。边值问题就是根据已知的边界条件联立上述 5 个方程求解。对于微分方程的求解常常很困难, 而从泛函的变分求近似解, 通常较为容易。求泛函极值问题的方法, 数学上称为变分法。

1.3.1 变分法

有限元法的理论基础是变分原理, 最常用的变分原理有最小势能原理、最小余能原理和混合变分原理。采用不同的变分原理, 将得到不同的未知场变量。采用最小势能原理必须假设单元内位移场函数的形式, 即位移法; 采用最小余能原理必须假设应力场的形式, 即应力法; 采用混合变分原理必须同时假设某些位移和某些应力。用有限元法处理瞬态问题时, 常用的变分原理为 Hamilton 原理, 进行静力分析时, 应用位移法较为简单。

1. 虚位移原理

虚位移原理反应了物体处处满足静力平衡的要求, 其表达式为:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T q d\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u^T p d\Gamma \quad (1-6)$$

Ω 、 Γ_s 、 δu 、 $\delta \varepsilon$ 分别为弹性体的内部区域、面力的边界、虚位移、虚应变。运用虚位移原理时, 通常是按位移求解的, 在具体求解时, 需要假定一个位移函数, 其中含有若干待定的参数, 并且满足几何方程和位移边界条件, 称为试解函数。

2. 最小势能原理

物体的势能是由两部分组成的:

$$\text{总应变能: } U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (1-7)$$

$$\text{外力势能: } V_P = - \int_{\Omega} u^T q d\Omega - \int_{\Gamma_s} u^T p d\Gamma, \text{ 即外力功的负值。} \quad (1-8)$$

$$\text{总势能: } \Pi = U + V_P = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T q d\Omega - \int_{\Gamma_s} u^T p d\Gamma \quad (1-9)$$

最小势能原理要求: $\delta \Pi = 0$ 。这里总势能 Π 的值是随位移函数 u 而变化, 即 Π 是位移 u 的泛函, 真实位移使总势能泛函的一阶变分为零, 即真实位移使总势能取驻值。

3. 最小余能原理

系统的总余能： $\Pi_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma_u} p u^T d\Gamma$ ，它是应力分量的泛函，所有可能应力中真实应力使总余能取最小值： $\delta \Pi_c = 0$ 。

1.3.2 Rayleigh-Ritz 法

在 Rayleigh-Ritz 方法中，首先假设一组符合边界条件的试解函数，并将函数带入能量方程式，再对试解函数的各系数作微分并令其为零，找出能量方程式的最小值，最后解出试探函数的各系数。其基本思路如下：

(1) 取定一组完备函数系中的函数 $\{w_1 \dots w_n \dots\}$ ，其中的每一个函数在积分域内都有定义，且满足齐次边界条件。

(2) 取试解函数：

$$\Psi_K = w_0 + \sum_{j=1}^k C_j w_j \quad (1-10)$$

式中函数 w_0 是给定的，且满足问题的非齐次边界条件。不论系数 C_j 怎么选择，试解函数均能满足问题的边界条件。

(3) 将 (1-10) 式代入问题的泛函 $J[\psi]$ ，积分后 $J[\psi_k]$ 成为以 k 个参数为变量的能量函数，即：

$$J[\psi_k] = I(C_1, C_2, \dots, C_k) \quad (1-11)$$

(4) 求能量泛函的极值 ($\delta J = 0$) 就转化为求多元函数的极值：

$$\frac{\partial I}{\partial C_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (1-12)$$

(5) 解方程组 (1-12)，求得 C_1, C_2, \dots, C_k ，并代回 (1-10) 式即得到问题的一个近似解，进而求出泛函的相应值 $J(\psi_k) = d_k$ 。

(6) 再将试解函数取为 $\Psi_{K+1} = w_0 + \sum_{j=1}^{k+1} C_j w_j$ 。 (1-13)

重复以上 (3) ~ (5) 步，又可以得到另一近似解和新的泛函值 $J(\psi_{k+1}) = d_{k+1}$ 。如果泛函在 ψ 上取得最小值 d ，则由 ψ 的近似式 ψ_k 得出的泛函值 $d_k > d$ 。而且由于 ψ_{k+1} 比 ψ_k 多一个待定系数，故得出的泛函值 $d_{k+1} \leq d_k$ 。于是对应一系列试解函数 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k \dots$ 可以得出一系列泛函值 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k \dots \geq d$ 。对于实际计算来说，只要连续二到三次所得结果及其接近，通常便认为最后得出的 ψ_n ，即是特定函数的较好的近似表达式。对于每一个具体问题，关键是选取适合的坐标函数。

通常的坐标函数可以表达为：幂函数、三角函数或两者的组合函数。从求解步骤可以看出，由 Rayleigh-Ritz 法假定的试解函数，要求满足边界条件。在变分学中，边界条件又分为两类：一是变分前必须满足的，称为本质边界条件或强迫边界条件；二是变分后自然