

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

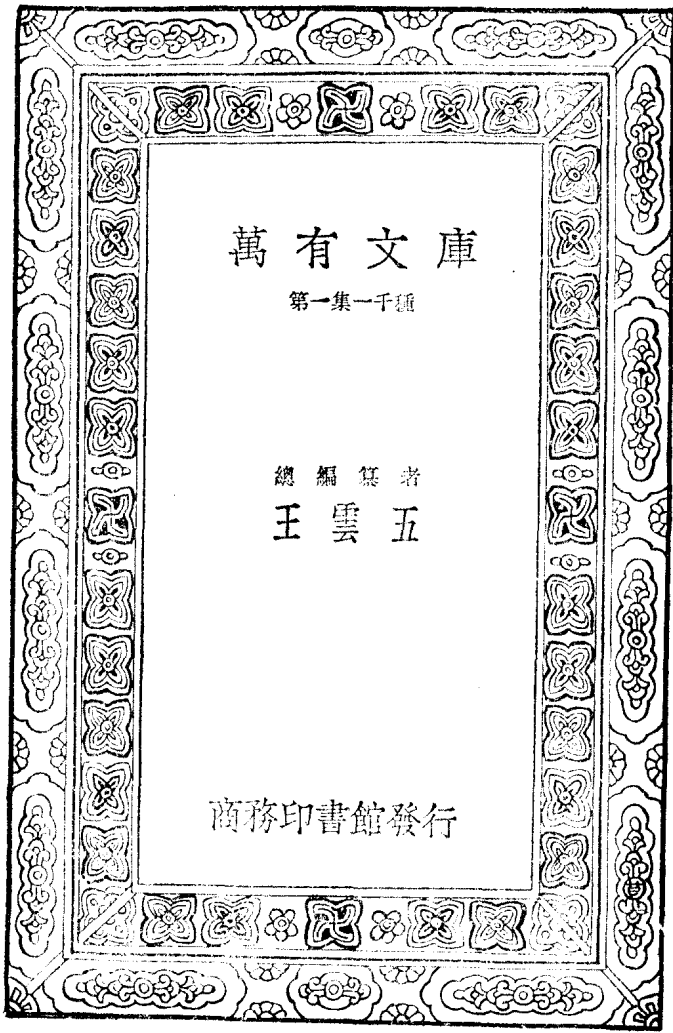
自然哲學之數學原理

(二)

牛頓 著

鄭太朴 譯

商務印書館發行



萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

# 目 次

原序

第二版序言

第三版序言

## 第 一 冊

說明..... 1

運動之基本定理或定律.....21

第一編 第 一 章 論首末比之方法用此可

證明以後之理者.....45

第 二 章 論向心力之求法.....64

## 第 二 冊

第 三 章 論圓錐曲線上物體之運

動..... 1

第 四 章 論一個焦點已知時求圓

錐曲線的軌道之法.....23

- 第五章 論焦點均未知時求軌道  
之法……………39

### 第三冊

- 第六章 求已知軌道內運動之  
法…………… 1
- 第七章 論物體之直線的上昇及  
下墜……………15
- 第八章 論物體受向心力之推動  
而運行時求其軌道之  
法……………34
- 第九章 論動的軌道內物體之運  
動以及回歸點之運動…44
- 第十章 論物體在已知面上之運  
動及擺錘運動……………70

### 第四冊

- 第十一章 論球形物體之運動其間  
有向心力互相吸引…… 1

第十二章 論球形物體之吸引力…46

第十三章 論非球形物體之吸引  
力……………84

## 第五冊

第十四章 論傾向大物體的向心力  
所推動的小物體之運  
動…………… 1

第二編 第一章 論某項物體之運動此項  
物體受一種與速度相比  
的抵抗力者……………17

第二章 論某項物體之運動此項  
物體所受之抵抗力與速  
度之平方相比……………35

第三章 論物體在抵抗力下之運  
動此抵抗力之一部分與  
速度相比一部分則與其  
平方相比……………92

## 第六冊

- 第四章 論物體在中介物內之循環運動…………… 1
- 第五章 論流體之密度及壓榨以及流體靜力學……………14
- 第六章 論擺錘之運動及抵抗…39

## 第七冊

- 第七章 論流體之運動及拋出的物體之抵抗力…………… 1
- 第八章 論流體內之傳達運動…68

## 第八冊

- 第九章 論流體之圓形運動…… 1
- 第三編 論宇宙系統……………21
- 研究自然之規律……………22
- 現象……………26
- 第一章 論宇宙系統之原因……36

## 第九冊

---

第二章 論月球差失之大小…… 1

第三章 論海潮之大小……65

第四章 論歲差……80

第十册

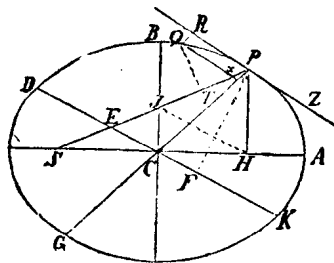
第五章 論彗星…… 1

### 第三章 論圓錐

#### 曲線上物體之運動

§ 29. 問題。一物體在一橢圓上運動；向心力向着其焦點，今試求此力之定律。

今設  $S$  為橢圓之焦點，試作  $SP$ ，與徑  $DK$  相交於  $E$ ，與  $Qv$  相交於  $x$ ，並完成  $QxPR$  平行方形。首先可知者，為  $EP=AC$ 。



蓋如由其他一焦點  
 $H$  作  $HJ$  與  $EC$   
 平行，則因

$$CH=CS$$

$$EJ=ES,$$

第二十四圖

以及

$$EP= EJ+JP=\frac{1}{2}(2EJ+2JP)$$

$$=\frac{1}{2}(ES+EJ+JP+JP),$$



$$EP = \frac{1}{2}(SP + JP).$$

但  $HJ$  與  $RP$  相平行,

故  $\angle PJH = \angle JPR = \angle HPZ = \angle PHJ$ ,

而  $JP = PH$ ,

所以(1)  $EP = \frac{1}{2}(SP + PH) = AC$ .

今作  $QT$  線垂於  $SP$  上, 並設橢圓之通徑爲

$$(2) \quad \frac{2BC^2}{AU} = L,$$

則有  $L \cdot QR : L \cdot Pv = PE : PC = AC : PC$ ,

而因  $L \cdot Pv : Gv \cdot Pv = L : Gv$ ,

故將二比聯合時, 得

$$(3) \quad L \cdot QR : Gv \cdot Pv = L \cdot AC : Gv \cdot PC.$$

但  $Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$ ,

所以

$$(4) \quad L \cdot QR : Qv^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$$

按 § 8, 倘  $Q$  與  $P$  相合時, 有

$$Qv^2 = Qx^2,$$

故亦

$$(5) \quad L \cdot QR : Qx^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$$

又因  $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF$ ,

(於此,  $PF$  與  $CK$  相垂直) 而按 § 26

$$PE^2 : PF^2 = DC^2 : CB^2,$$

所以  $L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2$ ,

或因  $L \cdot AC = 2BC^2$  (方程 2),

故 (6)  $L \cdot QR : QT^2 = 2PC : Gv$ .

倘  $P$  與  $Q$  相合, 則

$$2PC = Gv,$$

所以 (按方程 6) 在這裏

$$(7) \quad L \cdot QR = QT^2,$$

而如兩端用  $\frac{SP^2}{QR}$  乘之, 有

$$(8) \quad \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 即知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

或因  $L$  爲常數, 與

$$SP^2$$

爲反比。

第二證。 因推動物體使其在橢圓上運動且向着橢圓心的力(按 § 27, 系 1)與物體離圓心之距離相比,故可作  $CE$  與切線  $PR$  相平行。如是,則推動物體使其繞橢圓內任何點  $S$  的力(倘  $CE$  與  $PS$  在  $E$  相交)與

$$\frac{PE^2}{PS^2}$$

相比;而如  $S$  爲焦點,則  $PE$  爲常數,故與

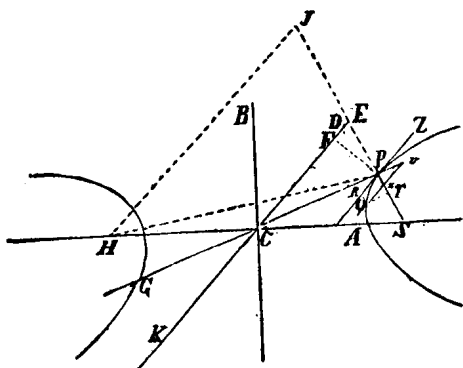
$$PS^2$$

成反比。

我們本可仿 § 27 簡單的推廣至拋物線與雙曲線,但因此問題之重要以及以後應用之廣,故我們可不憚煩的另用證法證明之。

§ 30. 問題。 一物體在雙曲線上運動,試求向心力之定律,該向心力係向着其焦點。

今設  $CA$  與  $CB$  爲雙曲線之半軸,  $PG$  與  $KD$  爲其共軛徑,  $PF$  則爲垂於  $KD$  上垂線,而如以  $GP$  爲橫坐標軸,  $Qv$  即爲  $Q$  點之縱坐標。今作  $SP$  線使其與  $DK$  相交於  $E$ , 與  $Qv$  相交於  $x$ , 并



第二十五圖

完成  $QRP\alpha$  平行方形，在這裏，不難知

$$EP = AC.$$

蓋如由其他一焦點  $H$  作

$HJ$  與  $EO$  相平行，

則因  $CS = CH,$

亦即  $ES = EJ.$

所以有  $EP = ES - PS = \frac{1}{2}(2 \cdot ES - 2PS)$

$$= \frac{1}{2}(EJ + EP - PS - PS)$$

$$= \frac{1}{2}(PJ - PS).$$

但  $HJ$  與  $PR$  相平行，

故  $\angle PJH = \angle ZPJ = \angle RPH = \angle PHJ,$

$$JP = PH,$$

而 (1)  $EP = \frac{1}{2}(PH - PS) = CA.$

今作  $QT$  垂於  $SP$  上, 則如設

$$(2) \frac{2 \cdot BC^2}{CA} = L,$$

即有  $L \cdot QR : L \cdot Pv = QR : Pv = Px : Pv$

$$= PE : PC = AC : PC.$$

又可知  $L \cdot Pv : Gv : vP = L : Gv,$

因而 (3)  $L \cdot QR : Gv \cdot Pv = L \cdot AC : Gv \cdot PC.$

但  $Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2,$

故亦 (4)  $L \cdot QR : Qv^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$

按 § 8, 倘  $Q$  與  $P$  相合, 有

$$Qv = Qx,$$

故并有

$$(5) L \cdot QR : Qx^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$$

此外,

$$\begin{aligned} Qx^2 : QT^2 &= EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2 \\ &= CD^2 : CB^2 \quad (\S 26) \end{aligned}$$

故  $L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2$ ,

又因  $L \cdot AC = 2BC^2$  (方程 2),

即有 (6)  $L \cdot QR : QT^2 = 2 \cdot PC : Gv$ .

倘  $P$  與  $Q$  相合, 則

$$2PC = Gv,$$

所以在這裏(按方程 6)

$$(7) \quad QT^2 \rightarrow L \cdot QR.$$

將此方程兩端用

$$\frac{SP^2}{QR}$$

乘之, 有

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 及 5, 即知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

而因  $L$  爲常數, 亦即與  $SP^2$

成反比。

第二證. 試求向雙曲線中心  $C$  之力; 按 § 27 系 1, 知此力與距離  $CP$  相比. 如是, 按 § 22 系 2, 即知向焦點  $S$  之力與

$$\frac{PE^3}{PS^3}$$

或因  $PE$  爲常數，故與

$$PS^3$$

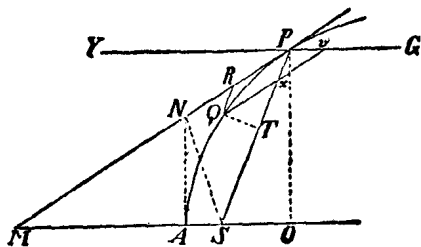
成反比。

同此并可證明如向心力變成爲離心力，則物體即在相反的雙曲線上運動。

§ 31. 補題。 拋物線之通徑，不問其所相關之頂點如何，恆與頂點距焦點之四倍相等。

此爲圓錐曲線之理論上所已知者。

§ 32. 補題。 由焦點垂於拋物線之切線上的垂線，爲焦點與切點距離及焦點與重要頂點距離之中比。



第二十六圖

今設  $AQP$  爲拋物線， $S$  爲其焦點， $P$  爲一切點， $PO$  則爲其縱坐標， $AO$  爲軸， $PM$  爲切線與軸相交於  $M$ ；又， $SN$  爲由  $S$  至  $PM$  之垂線，并作  $AN$  線。因

$$MS = PS,$$

$$MN = NP,$$

以及

$$MA = AO,$$

故

$AN$  與  $PO$  相平行，

而

$$\angle SAN = 90^\circ,$$

因而

$$\triangle SAN \sim \triangle SMN \sim \triangle SPN.$$

以及

$$PS : SN = SN : SA.$$

此即所欲證者。

系 1.

$$PS^2 : SN^2 = PS : SA.$$

系 2. 因  $SA$  爲常數，故  $SN^2$  與  $PS$  相比。

系 3. 任何切線與由焦點至其上的垂線之交點，落在重要頂點之切線內。

§ 33. 問題. 一物體在拋物線上運動；試求向



着焦點的向心力之定律。

今如前圖內  $P$  爲在拋物線上之物體， $Q$  則爲即將達到的點，今由此作

$QR$  與  $SP$  相平行，

$QT$  垂直於  $SP$  上，

以及  $Qv$  與  $PM$  相平行，

且  $Qv$  交  $YPG$  徑於  $v$ ，交半徑  $PS$  於  $x$ 。

因  $\triangle P xv \sim \triangle MSP$ ，

以及  $SM = SP$ ，

故亦

$$(1) \quad Pv = Px = RQ.$$

按 § 31,

$$Qv^2 = 4PS \cdot Pv = 4PS \cdot QR.$$

今如  $P$  與  $Q$  相合，則按 § 8,

$$Qv = Qx,$$

而在此處

$$(2) \quad Qx^2 = 4PS \cdot QR.$$

但  $\triangle QxT \sim \triangle PSN$ ,