萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(二)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

目　次

第一冊

第二冊

第 三 册

第 四 册

第五册

第六册

第七册

第八册

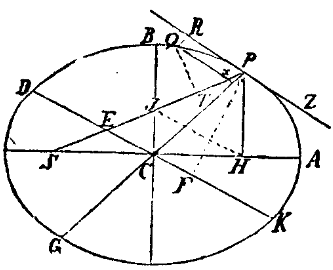
第九册

第十册

第三章　論圓錐曲線上物體之運動

§ 29. 問題. 一物體在一橢圓上運動；向心力向着其焦點，今試求此力之定律。

今設 S 爲橢圓之焦點，試作 SP，與徑 DK 相交於 E，與 Qv 相交於 x，並完成 $QxPR$ 平行方形。首先可知者，爲　$EP = AC$.



第二十四圖

蓋如由其他一焦點 H 作 HJ 與 EC 平行，則因

$$CH = CS$$

$$EJ = ES,$$

以及

$$EP = EJ + JP = \tfrac{1}{2}(2EJ + 2JP)$$

$$= \tfrac{1}{2}(ES + EJ + JP + JP),$$

$$EP=\tfrac{1}{2}(SP+JP).$$

但　　HJ 與 RP 相平行,

故　　$\angle PJH=\angle JPR=\angle HPZ=\angle PHJ,$

而　　$JP=PH,$

所以(1)　　$EP=\frac{1}{2}(SP+PH)=AC.$

今作 QT 線垂於 SP 上,並設橢圓之通徑爲

(2)　　$\dfrac{2BC^2}{AC}=L,$

則有　$L\cdot QR:L\cdot Pv=PE:PC=AC:PC,$

而因　　$L\cdot Pv:Gv\cdot Pv=L:Gv,$

故將二比聯合時,得

(3)　$L\cdot QR:Gv\cdot Pv=L\cdot AC:Gv\cdot PC.$

但　　$Gv\cdot Pv:Qv^2=PC^2:CD^2,$

所以

(4)　$L\cdot QR:Qv^2=L\cdot AC\cdot PC:Gv\cdot CD^2.$

按 §8, 倘 Q 與 P 相合時,有

$$Qv^2=Qx^2,$$

故亦

(5)　$L\cdot QR:Qx^2=L\cdot AC\cdot PC:Gv\cdot CD^2.$

又因　$Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF,$

(於此, PF 與 CK 相垂直)而按 § 26

$$PE^2 : PF^2 = DC^2 : CB^2,$$

所以　$L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2,$

或因　$L \cdot AC = 2BC^2$ (方程 2),

故　(6) $L \cdot QR : QT^2 = 2PC : Gv.$

倘 P 與 Q 相合, 則

$$2PC = Gv,$$

所以 (按方程 6) 在這裏

(7)　$L \cdot QR = QT^2,$

而如兩端用 $\frac{SP^2}{QR}$ 乘之, 有

(8)　$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 卽知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

或因 L 爲常數, 與

$$SP^2$$

爲反比。

第二證. 因推動物體使其在橢圓上運動且向着橢圓心的力(按 § 27, 系 1)與物體離圓心之距離相比,故可作 CE 與切線 PR 相平行.如是,則推動物體使其繞橢圓內任何點 S 的力(倘 CE 與 PS 在 E 相交)與

$$\frac{PE^3}{PS^2}$$

相比;而如 S 爲焦點,則 PE 爲常數,故與

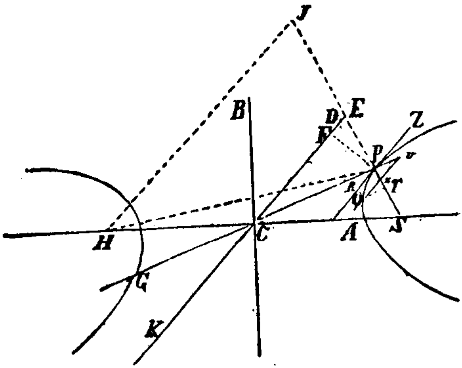
$$PS^2$$

成反比.

我們本可仿 § 27 簡單的推廣至拋物線與雙曲線,但因此問題之重要以及以後應用之廣,故我們可不憚煩的另用證法證明之.

§ 30. 問題. 一物體在雙曲線上運動,試求向心力之定律,該向心力係向着其焦點.

今設 CA 與 CB 爲雙曲線之半軸,PG 與 KD 爲其共軛徑,PF 則爲垂於 KD 上垂線,而如以 GP 爲橫坐標軸,Qv 卽爲 Q 點之縱坐標.今作 SP 線使其與 DK 相交於 E,與 Qv 相交於 x,并



第　二　十　五　圖

完成 $QRP\alpha$ 平行方形、在這裏，不難知

$$EP=AC.$$

蓋如由其他一焦點 H 作

$$HJ \text{ 與 } EC \text{ 相平行，}$$

則因 $$CS=CH,$$

亦卽 $$ES=EJ.$$

所以有 $$EP=ES-PS=\tfrac{1}{2}(2\cdot ES-2PS)$$

$$=\tfrac{1}{2}(EJ+EP-PS-PS)$$

$$=\tfrac{1}{2}(PJ-PS).$$

但 $$HJ \text{ 與 } PR \text{ 相平行，}$$

故　$$\angle PJH=\angle ZPJ=\angle RPH=\angle PHJ,$$

$$JP=PH,$$

而　(1) $EP=\frac{1}{2}(PH-PS)=CA.$

今作 QT 垂於 SP 上,則如設

(2) $\frac{2\cdot BC^2}{CA}=L,$

即有　$$L\cdot QR:L\cdot Pv=QR:Pv=Px:Pv$$

$$=PE:PC=AC:PC.$$

又可知　$$L\cdot Pv:Gv:vP=L:Gv,$$

因而　(3) $L\cdot QR:Gv\cdot Pv=L\cdot AC:Gv\cdot PC.$

但　$$Gv\cdot Pv:Qv^2=PC^2:CD^2,$$

故亦　(4) $L\cdot QR:Qv^2=L\cdot AC\cdot PC:Gv\cdot CD^2.$

按 §8, 倘 Q 與 P 相合,有

$$Qv=Qx,$$

故并有

(5) $L\cdot QR:Qx^2=L\cdot AC\cdot PC:Gv\cdot CD^2.$

此外,

$$Qx^2:QT^2=EP^2:PF^2=CA^2:PF^2$$

$$=CD^2:CB^2\quad(\S\ 26)$$

故　$L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2$,

又因　$L \cdot AC = 2BC^2$ (方程 2),

即有　(6) $L \cdot QR : QT^2 = 2 \cdot PC : Gv$.

倘 P 與 Q 相合,則

$$2\,PC = Gv,$$

所以在這裏(按方程 6)

(7)　$QT^2 = L \cdot QR$.

將此方程兩端用

$$\frac{SP^2}{QR}$$

乘之,有

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 及 5, 即知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

而因 L 爲常數,亦即與 SP^2

成反比。

<u>第二證</u>. 試求向雙曲線中心 C 之力;按 § 27 系 1, 知此力與距離 CP 相比.如是,按 § 22 系 3, 即知向焦點 S 的力與

$$\frac{PE^3}{PS^2}$$

或因 PE 爲常數,故與

$$PS^2$$

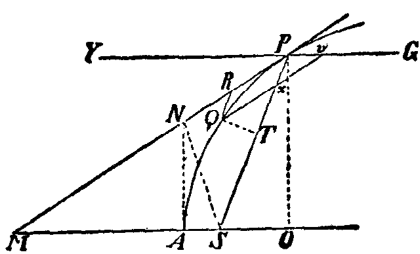
成反比.

同此幷可證明如向心力變成爲離心力，則物體即在相反的雙曲線上運動.

§ 31. 補題. 拋物線之通徑，不問其所相關之頂點如何,恆與頂點距焦點之四倍相等.

此爲圓錐曲線之理論上所已知者.

§ 32. 補題. 曲焦點垂於拋物線之切線上的垂線，爲焦點與切點距離及焦點與重要頂點距離之中比.



第二十六圖

今設 AQP 爲拋物線，S 爲其焦點，P 爲一切點，PO 則爲其縱坐標，AO 爲軸，PM 爲切線與軸相交於 M; 又，SN 爲由 S 至 PM 之垂線，幷作 AN 線.因

$$MS=PS,$$

$$MN=NP,$$

以及 $$MA=AO,$$

故 AN 與 PO 相平行，

而 $$\angle SAN=90^\circ,$$

因而 $$\triangle SAN\sim\triangle SMN\sim\triangle SPN.$$

以及 $$PS:SN=SN:SA.$$

此卽所欲證者。

系 1.

$$PS^2:SN^2=PS:SA.$$

系 2. 因 SA 爲常數，故 SN^2 與 PS 相比.

系 3. 任何切線與由焦點至其上的垂線之交點，落在重要頂點之切線內。

§ 33. 問題. 一物體在拋物線上運動；試求向

着焦點的向心力之定律.

今如前圖內 P 爲在抛物線上之物體，Q 則爲即將達到的點，今由此作

$$QR \text{ 與 } SP \text{ 相平行,}$$

$$QT \text{ 垂直於 } SP \text{ 上,}$$

以及 $$Qv \text{ 與 } PM \text{ 相平行,}$$

且 Qv 交 YPG 徑於 v, 交半徑 PS 於 x.

因 $$\triangle Pxv \sim \triangle MSP,$$

以及 $$SM = SP,$$

故亦

$$(1) \quad Pv = Px = RQ.$$

按 § 31,

$$Qv^2 = 4PS \cdot Pv = 4PS \cdot QR.$$

今如 P 與 Q 相合，則按 § 8,

$$Qv = Qx,$$

而在此處

$$(2) \quad Qx^2 = 4PS \cdot QR.$$

但 $$\triangle QxT \sim \triangle PSN,$$