

CHANGJIAN JINGJI WENTI DE SHUXUE JIEXI

常见经济问题的数学解析

张从军 李辉

鲍远圣 刘玉华

东南大学出版社

0
3

全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题(19138149) *

南京财经大学出版基金资助出版

常见经济问题的数学解析

张从军 李 辉

鲍远圣 刘玉华

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书对市场经济体制下经济运行中的一些常见问题,运用数学的有关基本知识——微积分知识、线性代数知识、概率统计知识、微分方程知识、运筹学知识(规划、优化、排队、存储、决策、博弈等理论),给出分析与解答,提供最优化的解决方案。

读者只需具备微积分和线性代数的基本知识就可掌握本书的大部分内容,即使只具备某一方面的数学知识也能读懂相关的一类经济问题。

高等学校财经类各专业的学生,可通过本书了解经济学的数学分析方法,掌握处理经济问题的一些常用数学工具;数学与应用数学专业的学生,可通过本书熟悉数学工具的实际应用技巧;经济工作者和相关专业教师可把本书作为工具书随时对某一问题进行查阅。

图书在版编目(CIP)数据

常见经济问题的数学解析/张从军等编著. —南京:
东南大学出版社, 2004. 9

ISBN 7-81089-716-0

I. 常... II. 张... III. 数学解析-应用-经济学
IV. F0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 081996 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷

开本: B5 印张: 13.75 字数: 277 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 册 定价: 22.80 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换,电话:025—83792327)

前 言

本书旨在对市场经济体制下,经济运行中的一些常见问题,运用数学的某些基本知识——微积分知识、线性代数知识、概率统计知识、微分方程知识、运筹学知识(规划、优化、排队、存储、决策、博弈等理论),给出分析与解答,提供最优化的解决方案。

国内外经济学与数学结合的著作不胜枚举。它们或以经济学为轮廓,应用数学工具;或以数学为基础,论及经济应用。本书意在直接通过经济问题的实例,给出数学方法的解析。

我们的工作不是陈述通常的经济学原理和数学定理,而是努力使本书涉及的经济问题尽可能广泛,阐释的数学方法尽可能简明,阅读本书或其中一部分所需的基础知识要求尽可能降低。为此,我们在编写时力求使本书具有以下特点:

1. 不作经济理论的铺陈,直接给出经济问题。
2. 没有数学基本知识的介绍,假定读者已经掌握了微积分和线性代数的一些基本知识,直接应用这些数学工具。
3. 各章节、各问题相互独立。

读者只需具备微积分和线性代数的基本知识就可掌握其中大部分内容,即使只具备某一方面的数学知识也能读懂相关的一类经济问题。

我们希望本书既可使读者了解数学的经济应用和经济问题的数学分析方法,又可作为工具书随时对某一问题进行查阅。对于财经类各专业的学生,我们希望他们通过本书,了解经济学的数学分析方法,掌握处理经济问题的一些常用数学工具;对于数学与应用数学专业的学生,我们希望他们通过本书,熟悉数学工具的实际应用技巧。

东南大学出版社社长宋增民教授对本书的出版给予了大力支持,张煦编辑从开始联系书稿到审读、修改、校对,不辞劳苦,在此表示衷心感谢!我们还要感谢南京财经大学的有关同事们,是他们的鼓励和支持促成了本书的出版。

本书是我们在长期的教学实践中,对于课程建设所做的一点工作积累、对于教学改革所做的一点尝试。如何在教学与科研中,把数学与经济更好地、更紧密地结合起来,是我们一直注意探索的课题。我们的工作还处在起步阶段,书中错误不妥之处在所难免,恳请读者在阅读中将发现的问题及时告诉我们。

E-mail: yysxx@njue. edu. cn

编 者

于南京财经大学
2004年8月30日

目 录

第一篇 用微积分知识解决的经济问题	1
第1章 常见经济函数	3
1.1 需求函数与供给函数	3
1.2 总成本函数、总收入函数和总利润函数	4
1.3 生产函数	8
1.4 效用函数	9
1.5 消费函数与储蓄函数	9
本章参考文献	9
第2章 边际函数与弹性	11
2.1 一元经济函数的边际函数	11
2.2 由边际、变化速度求总量函数	14
2.3 多元经济函数的边际函数	17
2.4 要素替代	19
2.5 一次齐次生产函数的等斜连线	20
2.6 C-D 生产函数的扩张路线方程	21
2.7 效用的边际替代率及其惟一性	22
2.8 弹性	23
2.9 销售收入与需求弹性	25
2.10 由需求价格弹性确定商品价格	27
2.11 偏弹性	29
2.12 常替代弹性生产函数的替代弹性	30
2.13 生产力弹性与成本弹性	32
2.14 生产力弹性与偏弹性	32
本章参考文献	33
第3章 简单的经济优化	35
3.1 最小平均成本	35
3.2 最小成本问题	36
3.3 订单多大时销售收入最多	37

3.4	最大利润问题	37
3.5	酒瓶对酒厂利润的影响	38
3.6	生产两种产品的最大利润	38
3.7	怎样分配资金使投资效益最大	40
3.8	根据最大利润原则确定商品价格	40
3.9	中间产品转移价格的制定	43
3.10	产品组的定价	43
3.11	涉税价格及税率的制定	44
3.12	生产上相联系的两种产品的定价	45
3.13	需求上相联系的两种产品的定价	45
3.14	相互分割的市场上产品价格的制定	46
3.15	企业内部的产量分配及产品的定价	47
3.16	如何确定利率	48
3.17	机车的最佳行驶速度	49
3.18	工人上班何时效率最高	49
3.19	房租定为多少合适	50
3.20	如何调整工人人数	50
3.21	确定最优广告投入	51
3.22	求最优价格、广告投入及推销费	52
3.23	如何分配广告费用	52
3.24	求达到平均年产量最大值后,再生产若干年的平均年产量	53
	本章参考文献	54
第4章	利率、现值与终值	55
4.1	复利与贴现	55
4.2	何时出售酒最有利	56
4.3	系列收付款项的现值与终值	57
4.4	收入流的现值与终值	59
4.5	完成订单所需成本的现值	61
	本章参考文献	61
第5章	均衡问题与经济分析	63
5.1	均衡点的稳定性	63
5.2	蛛网模型	64
5.3	关于均衡价格及均衡数量的比较静态分析	66
5.4	优化问题中的比较静态分析	69
5.5	效用最大时的消费组合	74

5.6 产出最大时的最优投入量·····	75
5.7 总费用最少时的最优投入量·····	76
5.8 生产要素的定价·····	77
5.9 生产与交易的一般均衡条件·····	81
5.10 公共产品与私人产品的转换·····	84
5.11 收入决定模型与 IS-LM 分析·····	85
5.12 收入决定模型中的比较静态分析·····	88
本章参考文献·····	92
第6章 简单的经济数学模型 ·····	94
6.1 指数增长模型·····	94
6.2 新工人的学习曲线·····	95
6.3 怎样计算一段时间内的总利润·····	97
6.4 估计超市的客流量·····	97
6.5 原油生产模型·····	98
6.6 鱼群的合理捕捞·····	99
6.7 人口统计模型·····	100
6.8 化工厂的排污问题·····	102
6.9 两个寡头的产量竞争·····	104
6.10 两个寡头的价格竞争·····	106
6.11 直线型市场上的区位竞争·····	107
6.12 洛伦茨曲线与基尼系数·····	109
6.13 消费者剩余和生产者剩余·····	110
本章参考文献·····	111
第二篇 用其他数学知识解决的经济问题 ·····	113
第7章 用线性代数知识解决的经济问题 ·····	115
7.1 产品的增量问题·····	115
7.2 生产成本最小值问题·····	115
7.3 单位价格与单位利润·····	116
7.4 投入产出模型·····	117
7.5 动物的繁殖问题·····	118
7.6 基因转移模型·····	118
本章参考文献·····	120
第8章 用概率统计知识解决的经济问题 ·····	121
8.1 产品的合格率问题·····	121

8.2	质量检验问题	122
8.3	福利彩票的中奖率	123
8.4	专家决策问题	123
8.5	仪器的故障问题	124
8.6	奖金问题	126
8.7	销售量问题	126
8.8	产品价值问题	127
8.9	利润问题	127
8.10	最佳进货量	131
8.11	需求量问题	132
8.12	标准重量问题	133
8.13	投资比例问题	133
8.14	质量标准问题	134
8.15	液化气调价问题	135
8.16	机器优劣问题	136
8.17	生产率与工业增加值的线性回归分析	137
	本章参考文献	138
第9章	用微分方程和差分方程知识解决的经济问题	139
9.1	怎样才能提高劳动生产率	139
9.2	新产品的推销	140
9.3	如何预报人口的增长	141
9.4	市场动态均衡价格模型	142
9.5	具有价格预期的市场模型	143
9.6	多马(Domar E D)经济增长模型	144
9.7	索罗(Solow R M)经济增长模型	145
9.8	抵押贷款问题	146
9.9	蛛网模型	147
9.10	消费模型	149
9.11	哈罗德(Harrod R H)模型	149
	本章参考文献	150
第10章	用规划论知识解决的经济问题	151
10.1	生产计划问题	151
10.2	下料问题	152
10.3	人员安排问题	153
10.4	营养问题	154

10.5 运输问题.....	155
10.6 分派问题.....	159
10.7 一个人愿意用多少时间去工作.....	162
10.8 目标规划模型.....	164
10.9 最短路问题.....	165
10.10 生产与存储问题	167
10.11 资源分配问题	168
10.12 背包问题	170
10.13 设备更新问题	173
本章参考文献.....	176
第 11 章 用博弈论知识解决的经济问题	177
11.1 二人博弈的核心问题.....	177
11.2 效用不可转移博弈问题.....	179
11.3 二人博弈中的鞍点问题.....	184
11.4 非线性规划问题.....	187
11.5 竞争均衡问题.....	189
11.6 Nash 平衡问题	192
本章参考文献.....	195
第 12 章 用排队论和存储论知识解决的经济问题	196
12.1 M/M/1/ ∞ 排队模型	196
12.2 M/M/s/K 排队模型	199
12.3 排队系统的优化模型.....	202
12.4 存储问题的三个模型.....	205
本章参考文献.....	209

第 一 篇

用微积分知识 解决的经济问题

第 1 章 常见经济函数

1.1 需求函数与供给函数

需求量是指在特定时间内,消费者打算并能够购买的某种商品的数量,用 Q_d 表示. 影响需求的因素很多,主要有商品的价格 P , 与此商品有关的其他商品的价格 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 个人的收入 M , 消费者对未来商品价格的预期 P_e , 个人的偏好 h 等等.

若除商品的价格 P 外,影响需求的其他因素不变,则 Q_d 是 P 的一元函数

$$Q_d = f(P)$$

它通常是一个单调减函数,常见的需求函数有

$$Q_d = a - bP \quad (a, b > 0)$$

$$Q_d = aP^{-b} \quad (a, b > 0)$$

有时,也把 $Q_d = f(P)$ 的反函数 $P = f^{-1}(Q_d)$ 称为需求函数.

如果影响需求的各种因素均变化,则 Q_d 是各因素的多元函数

$$Q_d = f(P; P_1, P_2, \dots, P_n; P_e; M; h)$$

供给量是指在特定时间内,厂商愿意并且能够出售的某种商品的数量,用 Q_s 表示. 影响供给的主要因素有商品的价格 P , 与此商品有关的其他商品的价格 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 厂商对未来商品价格的预期 P_e , 生产投入的要素成本 C 及厂商的技术状况 ρ 等.

若除了商品的价格 P 外,影响供给的其他因素均不变,则 Q_s 是 P 的一元函数

$$Q_s = g(P)$$

它通常是一个单调增函数,常见的供给函数有

$$Q_s = -a + bP \quad (a, b > 0)$$

$$Q_s = aP^b \quad (a, b > 0)$$

如果影响供给的各种因素均变化,则 Q_s 是各因素的多元函数

$$Q_s = g(P; P_1, P_2, \dots, P_n; P_e; C; \rho)$$

当 $Q_d = Q_s$ 时,市场的供需处于平衡状态,此时的价格 $\bar{P}$ 称为均衡价格,需求(或供给)量称为均衡数量(如图 1-1 所示).

当商品由某厂商独家生产时,厂商是价格的制定者,它自然会考虑消费者对价格的反应并依需求规律组织生产,其产量即需求量,价格与产量(需求量)的关系由需求函数确定,称该商品市场为完全垄断市场;当商品由众多互不占优势的厂商共同生产时,各厂商之间、消费者之

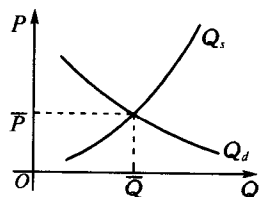


图 1-1

间展开竞争并最终使市场处于均衡状态,此时商品价格即为均衡价格,单一厂商或消费者的行为(改变产量或需求量)不再影响市场均衡,称该商品市场为完全竞争市场.

例 1 洗衣机厂生产一种型号的洗衣机,当价格为每台 1 500 元时,需求量为 6 500 台,价格每降低 1 元,则可多卖出 10 台. 求需求量 Q 与价格 P 之间的函数关系.

解 由题意知,需求量 Q 与价格 P 之间为线性函数关系

$$\begin{aligned} Q &= 6\,500 + 10(1\,500 - P) \\ &= 21\,500 - 10P \end{aligned}$$

例 2 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q_d = 14 - 1.5P, \quad Q_s = -5 + 4P$$

求该商品的均衡价格和均衡量.

解 由供需平衡条件有

$$14 - 1.5P = -5 + 4P$$

解得均衡价格为

$$\bar{P} = \frac{19}{5.5} \approx 3.45$$

将均衡价格代入需求函数,得均衡量为

$$\bar{Q} = \frac{97}{11} \approx 8.82$$

1.2 总成本函数、总收入函数和总利润函数

在生产和经营活动中,如果投入的各要素价格不变,则成本 C 是产量或销售量 Q 的函数 $C = C(Q)$, 称为总成本函数. 一般地,总成本由固定成本 C_0 和可变成本 C_1 两部分组成

$$C(Q) = C_0 + C_1(Q)$$

其中固定成本与产量无关,如厂房、设备的折旧费、企业管理费等;可变成本随产量的增加而增加,如原材料、动力、工人的工资等. 常见的成本函数有

$$C(Q) = C_0 + aQ \quad (a > 0)$$

以总成本除以产量,得平均成本函数

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{Q} + \frac{C_1(Q)}{Q} = \bar{C}_0(Q) + \bar{C}_1(Q)$$

其中 $\bar{C}_0(Q) = \frac{C_0}{Q}$ 与 $\bar{C}_1(Q) = \frac{C_1(Q)}{Q}$ 分别称为平均固定成本与平均可变成本.

厂商销售 Q 单位的商品所得收入为 $R = R(Q)$, 称为总收入(益)函数. 设商品的价格为 P , 则总收入函数为

$$R(Q) = PQ$$

若商品的需求函数为 $P = f^{-1}(Q)$, 且产销均衡, 则总收入函数为

$$R(Q) = PQ = Qf^{-1}(Q)$$

总利润 L 是总收入 R 与总成本 C 之差, 故总利润函数为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

例3 生产某产品的固定成本为1万元, 可变成本与产量(单位: 吨)的立方成正比, 已知产量为20吨时, 总成本为1.004万元, 求总成本函数和平均成本函数.

解 总成本函数

$$C(Q) = C_0 + C_1(Q) = 1 + kQ^3$$

将 $C(20) = 1.004$ 代入上式, 得 $k = 5 \times 10^{-7}$, 则总成本函数为

$$C(Q) = 1 + 5 \times 10^{-7} Q^3$$

平均成本函数为

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{1}{Q} + 5 \times 10^{-7} Q^2$$

例4 某工厂生产某产品, 年产量为 Q 台, 每台售价为250元, 当年产量在600台以内时, 可以全部售出. 经广告宣传后又可再多售出200台, 每台平均广告费20元. 若再生产, 本年就销不出去了. 试建立本年的销售总收入 R 与年产量 Q 之间的函数关系.

解 (1) 当 $0 \leq Q \leq 600$ 时, $R(Q) = 250Q$;

(2) 当 $600 < Q \leq 800$ 时, $R(Q) = 250 \times 600 + (250 - 20)(Q - 600) = 230Q + 12\,000$;

(3) 当 $Q > 800$ 时, $R(Q) = 250 \times 600 + 230 \times 200 = 196\,000$.

则所求函数关系为

$$R(Q) = \begin{cases} 250Q, & 0 \leq Q \leq 600 \\ 230Q + 12\,000, & 600 < Q \leq 800 \\ 196\,000, & Q > 800 \end{cases}$$

例5 里昂混凝土公司是阿肯色州北部惟一供应混凝土的垄断企业. 企业的混凝土需求函数为 $P = 110 - 4Q$, 公司的固定成本为400, 每生产一个单位的混凝土需增加10个单位的成本, 该公司的最大生产能力为18, 给出其总利润函数并计算盈亏平衡点处的产量及价格.

解 收入函数与成本函数分别为

$$R(Q) = PQ = 110Q - 4Q^2$$

$$C(Q) = 400 + 10Q$$

该公司的利润函数为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$=-4Q^2 + 100Q - 400 \quad (0 \leq Q \leq 18)$$

令 $L(Q) = 0$, 得盈亏平衡时的产量 $Q = 5$ ($Q = 20$ 舍去), 此时价格 $P = 90$.

当厂商生产多种不同的产品时, 成本、收入和利润均为各产品产量的多元函数.

例 6 某企业生产 A, B 两种产品, 产量分别为 Q_1, Q_2 , 该企业的总成本函数为

$$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 200$$

在下列各种情形下, 求该企业的总利润函数:

(1) A, B 两种产品为不同品牌的同类产品, 其总需求函数为 $Q = 60 - P$, 其中 P 为两产品共同的价格, Q 为两产品的总需求, $Q = Q_1 + Q_2$;

(2) A, B 两种产品为不同类型的产品, 有各自的市场, 需求函数分别为

$$Q_1 = 50 - 0.5P_1, \quad Q_2 = 75 - P_2$$

其中 P_1, P_2 分别为两产品的价格;

(3) A, B 两种产品为在市场上相互关联的产品, 需求函数分别为

$$Q_1 = 28 - 0.4P_1 + 0.2P_2, \quad Q_2 = 26 - 0.6P_2 + 0.2P_1$$

其中 P_1, P_2 分别为两产品的价格.

解 (1) 由 $Q = 60 - P$ 得 $P = 60 - Q = 60 - (Q_1 + Q_2)$, 则总利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\ &= P(Q_1 + Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\ &= (60 - Q_1 - Q_2)(Q_1 + Q_2) - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 200) \\ &= 60Q_1 + 60Q_2 - 3Q_1^2 - 3Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 200 \end{aligned}$$

(2) 从两产品的需求函数分别解得

$$P_1 = 100 - 2Q_1, \quad P_2 = 75 - Q_2$$

故得总利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\ &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1, Q_2) \\ &= (100 - 2Q_1)Q_1 + (75 - Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 200) \\ &= 100Q_1 + 75Q_2 - 4Q_1^2 - Q_1Q_2 - 3Q_2^2 - 200 \end{aligned}$$

(3) 联立两产品的需求函数

$$\begin{cases} Q_1 = 28 - 0.4P_1 + 0.2P_2 \\ Q_2 = 26 - 0.6P_2 + 0.2P_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} P_1 = 110 - 3Q_1 - Q_2 \\ P_2 = 80 - 2Q_2 - Q_1 \end{cases}$$

则总利润函数为

$$\begin{aligned}
L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) \\
&= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - C(Q_1, Q_2) \\
&= (110 - 3Q_1 - Q_2)Q_1 + (80 - 2Q_2 - Q_1)Q_2 - \\
&\quad (2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2 + 200) \\
&= 110Q_1 + 80Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_1 Q_2 - 4Q_2^2 - 200
\end{aligned}$$

例7 某电脑公司销售某品牌的电脑,一周内需求量 x 台和上周末的进货量 y 台均在 $[50, 80]$ 内变化. 每售出一台电脑,可获利 200 元,若供不应求,可向其他公司调剂,每台仍可获利 50 元,若供过于求,通过降价仍可全部售出,但每台要亏损 100 元. 试将该公司一周内销售该品牌电脑获取的利润 z 表示成需求量 x 与进货量 y 的函数.

解 由题意知 $50 \leq x, y \leq 80$.

当商品供不应求时, $50 \leq y \leq x \leq 80$, 利润 $z = 200y + 50(x - y)$;

当商品供过于求时, $50 \leq x < y \leq 80$, 利润 $z = 200x - 100(y - x)$.

利润函数为

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 50x + 150y, & 50 \leq y \leq x \leq 80 \\ 300x - 100y, & 50 \leq x < y \leq 80 \end{cases}$$

例8 已知生产 Q 对汽车挡泥板的成本为 $C(Q) = 10 + \sqrt{1 + Q^2}$ (美元), 每对挡泥板的售价为 5 美元. 销售 Q 对挡泥板的收入与利润分别为 $R(Q)$ 、 $L(Q)$. 求:

(1) $\lim_{Q \rightarrow +\infty} [C(Q+1) - C(Q)]$ 及 $\lim_{Q \rightarrow +\infty} [L(Q+1) - L(Q)]$;

(2) $\lim_{Q \rightarrow +\infty} \bar{C}(Q) = \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{C(Q)}{Q}$.

解 (1) $\lim_{Q \rightarrow +\infty} [C(Q+1) - C(Q)]$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} [10 + \sqrt{1 + (Q+1)^2} - (10 + \sqrt{1 + Q^2})]$$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} [\sqrt{1 + (Q+1)^2} - \sqrt{1 + Q^2}]$$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{2Q+1}{\sqrt{1 + (Q+1)^2} + \sqrt{1 + Q^2}}$$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{Q}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(1 + \frac{1}{Q}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 1}} = 1$$

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} [L(Q+1) - L(Q)]$$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \{[R(Q+1) - C(Q+1)] - [R(Q) - C(Q)]\}$$

$$= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \{[R(Q+1) - R(Q)] - [C(Q+1) - C(Q)]\}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5 - \lim_{Q \rightarrow +\infty} [C(Q+1) - C(Q)] = 4 \\
 (2) \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \bar{C}(Q) &= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{C(Q)}{Q} \\
 &= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{10 + \sqrt{1+Q^2}}{Q} \\
 &= \lim_{Q \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 1} \right) = 1
 \end{aligned}$$

1.3 生产函数

生产函数是指产量 Q 与各种投入要素之间的函数关系

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 n 种要素的投入量.

如果只考虑两种投入要素: 资本 K 和劳动 L , 则生产函数为

$$Q = f(K, L)$$

保持产量为 Q_0 不变, 称方程 $f(K, L) = Q_0$ 的曲线为等产量线, 等产量线上不同的要素投入组合所得产出相同, 不同的等产量线代表不同的产出水平 (如图 1-2 所示).

经济学中讨论的生产函数通常都满足

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r f(K, L) \quad (\lambda > 0)$$

称为 r 次齐次函数. $r > 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$

($\lambda > 1$), 称为规模报酬递增; $r < 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ ($\lambda > 1$), 称为规模报酬递减; $r = 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$, 称为规模报酬不变.

常见的生产函数有

(1) 线性生产函数

$$Q = aK + bL \quad (a, b > 0)$$

(2) Cobb-Douglas 生产函数

$$Q = AK^\alpha L^\beta \quad (A, \alpha, \beta > 0)$$

(3) 常替代弹性生产函数

$$Q = A(\delta_1 K^{-\rho} + \delta_2 L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} \quad (A > 0, 0 < \delta_1, \delta_2 < 1, -1 < \rho \neq 0)$$

例 9 经济学中, 称函数 $Q = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$ 为常替代弹性生产函数, 称 $\bar{Q} = AK^\delta L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数. 试证明: $\lim_{\rho \rightarrow 0} Q = \bar{Q}$.

$$\begin{aligned}
 \text{证明} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \\
 = A \lim_{\rho \rightarrow 0} \exp\{\ln[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\}
 \end{aligned}$$

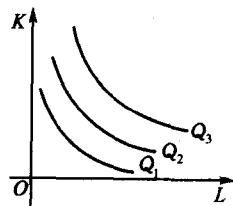


图 1-2