常见经济问题的数学解析

CHANGJIAN JINGJI WENTI DE SHUXUE JIEXI

张从军 李 辉
鲍远圣 刘玉华

东南大学出版社

全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题(19138149)
南京财经大学出版基金资助出版

常见经济问题的数学解析

张从军　李　辉
鲍远圣　刘玉华

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书对市场经济体制下经济运行中的一些常见问题，运用数学的有关基本知识——微积分知识、线性代数知识、概率统计知识、微分方程知识、运筹学知识(规划、优化、排队、存储、决策、博弈等理论)，给出分析与解答，提供最优化的解决方案。

读者只需具备微积分和线性代数的基本知识就可掌握本书的大部分内容，即使只具备某一方面的数学知识也能读懂相关的一类经济问题。

高等学校财经类各专业的学生，可通过本书了解经济学的数学分析方法，掌握处理经济问题的一些常用数学工具；数学与应用数学专业的学生，可通过本书熟悉数学工具的实际应用技巧；经济工作者和相关专业教师可把本书作为工具书随时对某一问题进行查阅。

图书在版编目(CIP)数据

常见经济问题的数学解析/张从军等编著．—南京：东南大学出版社，2004.9

IBSN 7-81089-716-0

Ⅰ. 常...　Ⅱ. 张...　Ⅲ. 数学解析-应用-经济学　Ⅳ. F0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 081996 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　南京京新印刷厂印刷
开本：B5　印张：13.75　字数：277 千字
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册　定价：22.80 元
(凡因印装质量问题，可直接向发行部调换. 电话：025—83792327)

前　言

本书旨在对市场经济体制下，经济运行中的一些常见问题，运用数学的某些基本知识——微积分知识、线性代数知识、概率统计知识、微分方程知识、运筹学知识（规划、优化、排队、存储、决策、博弈等理论），给出分析与解答，提供最优化的解决方案。

国内外经济学与数学结合的著作不胜枚举。它们或以经济学为轮廓，应用数学工具；或以数学为基础，论及经济应用。本书意在直接通过经济问题的实例，给出数学方法的解析。

我们的工作不是陈述通常的经济学原理和数学定理，而是努力使本书涉及的经济问题尽可能广泛，阐释的数学方法尽可能简明，阅读本书或其中一部分所需的基础知识要求尽可能降低。为此，我们在编写时力求使本书具有以下特点：

1. 不作经济理论的铺陈，直接给出经济问题。

2. 没有数学基本知识的介绍，假定读者已经掌握了微积分和线性代数的一些基本知识，直接应用这些数学工具。

3. 各章节、各问题相互独立。

读者只需具备微积分和线性代数的基本知识就可掌握其中大部分内容，即使只具备某一方面的数学知识也能读懂相关的一类经济问题。

我们希望本书既可使读者了解数学的经济应用和经济问题的数学分析方法，又可作为工具书随时对某一问题进行查阅。对于财经类各专业的学生，我们希望他们通过本书，了解经济学的数学分析方法，掌握处理经济问题的一些常用数学工具；对于数学与应用数学专业的学生，我们希望他们通过本书，熟悉数学工具的实际应用技巧。

东南大学出版社社长宋增民教授对本书的出版给予了大力支持，张煦编辑从开始联系书稿到审读、修改、校对，不辞劳苦，在此表示衷心感谢！我们还要感谢南京财经大学的有关同事们，是他们的鼓励和支持促成了本书的出版。

本书是我们在长期的教学实践中，对于课程建设所做的一点工作积累、对于教学改革所做的一点尝试。如何在教学与科研中，把数学与经济更好地、更紧密地结合起来，是我们一直注意探索的课题。我们的工作还处在起步阶段，书中错误不妥之处在所难免，恳请读者在阅读中将发现的问题及时告诉我们。

E-mail：yysxx@njue. edu. cn

编　者

于南京财经大学

2004 年 8 月 30 日

目　　录

第　一　篇

用微积分知识
解决的经济问题

第 1 章　常见经济函数

1.1　需求函数与供给函数

需求量是指在特定时间内，消费者打算并能够购买的某种商品的数量，用 Q_d 表示. 影响需求的因素很多，主要有商品的价格 P，与此商品有关的其他商品的价格 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，个人的收入 M，消费者对未来商品价格的预期 P_e，个人的偏好 h 等等.

若除商品的价格 P 外，影响需求的其他因素不变，则 Q_d 是 P 的一元函数

$$Q_d = f(P)$$

它通常是一个单调减函数，常见的需求函数有

$$Q_d = a - bP \quad (a, b > 0)$$

$$Q_d = aP^{-b} \quad (a, b > 0)$$

有时，也把 $Q_d = f(P)$ 的反函数 $P = f^{-1}(Q_d)$ 称为需求函数.

如果影响需求的各种因素均变化，则 Q_d 是各因素的多元函数

$$Q_d = f(P;\ P_1, P_2, \cdots, P_n;\ P_e;\ M;\ h)$$

供给量是指在特定时间内，厂商愿意并且能够出售的某种商品的数量，用 Q_s 表示. 影响供给的主要因素有商品的价格 P，与此商品有关的其他商品的价格 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，厂商对未来商品价格的预期 P_e，生产投入的要素成本 C 及厂商的技术状况 ρ 等.

若除了商品的价格 P 外，影响供给的其他因素均不变，则 Q_s 是 P 的一元函数

$$Q_s = g(P)$$

它通常是一个单调增函数，常见的供给函数有

$$Q_s = -a + bP \quad (a, b > 0)$$

$$Q_s = aP^{b} \quad (a, b > 0)$$

如果影响供给的各种因素均变化，则 Q_s 是各因素的多元函数

$$Q_s = g\ (P;\ P_1, P_2, \cdots, P_n;\ P_e;\ C;\ \rho)$$

当 $Q_d = Q_s$ 时，市场的供需处于平衡状态，此时的价格 $\overline{P}$ 称为均衡价格，需求（或供给）量称为均衡数量（如图 1-1 所示）.

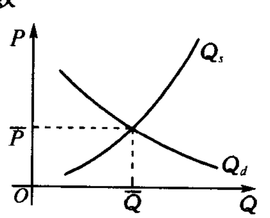

图 1-1

当商品由某厂商独家生产时，厂商是价格的制定者，它自然会考虑消费者对价格的反应并依需求规律组织生产，其产量即需求量，价格与产量（需求量）的关系由需求函数确定，称该商品市场为完全垄断市场；当商品由众多互不占优势的厂商共同生产时，各厂商之间、消费者之

间展开竞争并最终使市场处于均衡状态，此时商品价格即为均衡价格，单一厂商或消费者的行为（改变产量或需求量）不再影响市场均衡，称该商品市场为完全竞争市场.

例1　洗衣机厂生产一种型号的洗衣机，当价格为每台1 500元时，需求量为6 500台，价格每降低1元，则可多卖出10台. 求需求量Q与价格P之间的函数关系.

解　由题意知，需求量Q与价格P之间为线性函数关系

$$\begin{aligned}Q &= 6\,500 + 10(1\,500 - P)\\ &= 21\,500 - 10P\end{aligned}$$

例2　已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q_d = 14 - 1.5P,\ Q_s = -5 + 4P$$

求该商品的均衡价格和均衡量.

解　由供需平衡条件有

$$14 - 1.5P = -5 + 4P$$

解得均衡价格为

$$\overline{P} = \frac{19}{5.5} \approx 3.45$$

将均衡价格代入需求函数，得均衡量为

$$\overline{Q} = \frac{97}{11} \approx 8.82$$

1.2　总成本函数、总收入函数和总利润函数

在生产和经营活动中，如果投入的各要素价格不变，则成本C是产量或销售量Q的函数$C = C(Q)$，称为总成本函数. 一般地，总成本由固定成本C_0和可变成本C_1两部分组成

$$C(Q) = C_0 + C_1(Q)$$

其中固定成本与产量无关，如厂房、设备的折旧费、企业管理费等；可变成本随产量的增加而增加，如原材料、动力、工人的工资等. 常见的成本函数有

$$C(Q) = C_0 + aQ\quad (a > 0)$$

以总成本除以产量，得平均成本函数

$$\overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{Q} + \frac{C_1(Q)}{Q} = \overline{C}_0(Q) + \overline{C}_1(Q)$$

其中$\overline{C}_0(Q) = \dfrac{C_0}{Q}$与$\overline{C}_1(Q) = \dfrac{C_1(Q)}{Q}$分别称为平均固定成本与平均可变成本.

厂商销售Q单位的商品所得收入为$R = R(Q)$，称为总收入（益）函数. 设商品的价格为P，则总收入函数为

$$R(Q)=PQ$$

若商品的需求函数为 $P=f^{-1}(Q)$，且产销均衡，则总收入函数为

$$R(Q)=PQ=Qf^{-1}(Q)$$

总利润 L 是总收入 R 与总成本 C 之差，故总利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

例 3　生产某产品的固定成本为 1 万元，可变成本与产量(单位:吨)的立方成正比，已知产量为 20 吨时，总成本为 1.004 万元，求总成本函数和平均成本函数.

解　总成本函数

$$C(Q)=C_0+C_1(Q)=1+kQ^3$$

将 $C(20)=1.004$ 代入上式，得 $k=5\times10^{-7}$，则总成本函数为

$$C(Q)=1+5\times10^{-7}Q^3$$

平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{1}{Q}+5\times10^{-7}Q^2$$

例 4　某工厂生产某产品，年产量为 Q 台，每台售价为 250 元，当年产量在 600 台以内时，可以全部售出. 经广告宣传后又可再多售出 200 台，每台平均广告费 20 元. 若再生产，本年就销不出去了. 试建立本年的销售总收入 R 与年产量 Q 之间的函数关系.

解　(1) 当 $0\leqslant Q\leqslant 600$ 时，$R(Q)=250Q$;

(2) 当 $600<Q\leqslant 800$ 时，$R(Q)=250\times600+(250-20)(Q-600)=230Q+12\,000$;

(3) 当 $Q>800$ 时，$R(Q)=250\times600+230\times200=196\,000$.

则所求函数关系为

$$R(Q)=\begin{cases}250Q, & 0\leqslant Q\leqslant 600\\ 230Q+12\,000, & 600<Q\leqslant 800\\ 196\,000, & Q>800\end{cases}$$

例 5　里昂混凝土公司是阿肯色州北部惟一供应混凝土的垄断企业. 企业的混凝土需求函数为 $P=110-4Q$，公司的固定成本为 400，每生产一个单位的混凝土需增加 10 个单位的成本，该公司的最大生产能力为 18，给出其总利润函数并计算盈亏平衡点处的产量及价格.

解　收入函数与成本函数分别为

$$R(Q)=PQ=110Q-4Q^2$$

$$C(Q)=400+10Q$$

该公司的利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

$$=-4Q^2+100Q-400 \quad (0\leqslant Q\leqslant 18)$$

令 $L(Q)=0$，得盈亏平衡时的产量 $Q=5$（$Q=20$ 舍去），此时价格 $P=90$.

当厂商生产多种不同的产品时，成本、收入和利润均为各产品产量的多元函数.

例 6　某企业生产 A, B 两种产品，产量分别为 Q_1, Q_2，该企业的总成本函数为

$$C=2Q_1^2+Q_1Q_2+2Q_2^2+200$$

在下列各种情形下，求该企业的总利润函数：

(1) A, B 两种产品为不同品牌的同类产品，其总需求函数为 $Q=60-P$，其中 P 为两产品共同的价格，Q 为两产品的总需求，$Q=Q_1+Q_2$；

(2) A, B 两种产品为不同类型的产品，有各自的市场，需求函数分别为

$$Q_1=50-0.5P_1,\ Q_2=75-P_2$$

其中 P_1, P_2 分别为两产品的价格；

(3) A, B 两种产品为在市场上相互关联的产品，需求函数分别为

$$Q_1=28-0.4P_1+0.2P_2,\ Q_2=26-0.6P_2+0.2P_1$$

其中 P_1, P_2 分别为两产品的价格.

解　(1) 由 $Q=60-P$ 得 $P=60-Q=60-(Q_1+Q_2)$，则总利润函数为

$$\begin{aligned}L(Q_1,Q_2)&=R(Q_1,Q_2)-C(Q_1,Q_2)\\&=P(Q_1+Q_2)-C(Q_1,Q_2)\\&=(60-Q_1-Q_2)(Q_1+Q_2)-(2Q_1^2+Q_1Q_2+2Q_2^2+200)\\&=60Q_1+60Q_2-3Q_1^2-3Q_1Q_2-3Q_2^2-200\end{aligned}$$

(2) 从两产品的需求函数分别解得

$$P_1=100-2Q_1,\ P_2=75-Q_2$$

故得总利润函数为

$$\begin{aligned}L(Q_1,Q_2)&=R(Q_1,Q_2)-C(Q_1,Q_2)\\&=P_1Q_1+P_2Q_2-C(Q_1,Q_2)\\&=(100-2Q_1)Q_1+(75-Q_2)Q_2-(2Q_1^2+Q_1Q_2+2Q_2^2+200)\\&=100Q_1+75Q_2-4Q_1^2-Q_1Q_2-3Q_2^2-200\end{aligned}$$

(3) 联立两产品的需求函数

$$\begin{cases}Q_1=28-0.4P_1+0.2P_2\\Q_2=26-0.6P_2+0.2P_1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}P_1=110-3Q_1-Q_2\\P_2=80-2Q_2-Q_1\end{cases}$$

则总利润函数为

$$\begin{aligned}L(Q_1, Q_2) &= R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2)\\ &= P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1, Q_2)\\ &= (110 - 3Q_1 - Q_2)Q_1 + (80 - 2Q_2 - Q_1)Q_2 -\\ &\quad (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 200)\\ &= 110Q_1 + 80Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_1Q_2 - 4Q_2^2 - 200\end{aligned}$$

例 7　某电脑公司销售某品牌的电脑，一周内需求量 x 台和上周末的进货量 y 台均在[50, 80]内变化. 每售出一台电脑，可获利 200 元，若供不应求，可向其他公司调剂，每台仍可获利 50 元，若供过于求，通过降价仍可全部售出，但每台要亏损 100 元. 试将该公司一周内销售该品牌电脑获取的利润 z 表示成需求量 x 与进货量 y 的函数.

解　由题意知 $50 \leqslant x, y \leqslant 80$.

当商品供不应求时，$50 \leqslant y \leqslant x \leqslant 80$，利润 $z = 200y + 50(x - y)$；

当商品供过于求时，$50 \leqslant x < y \leqslant 80$，利润 $z = 200x - 100(y - x)$.

利润函数为

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 50x + 150y, & 50 \leqslant y \leqslant x \leqslant 80 \\ 300x - 100y, & 50 \leqslant x < y \leqslant 80 \end{cases}$$

例 8　已知生产 Q 对汽车挡泥板的成本为 $C(Q) = 10 + \sqrt{1+Q^2}$（美元），每对挡泥板的售价为 5 美元. 销售 Q 对挡泥板的收入与利润分别为 $R(Q)$、$L(Q)$. 求：

(1) $\lim\limits_{Q\to+\infty}[C(Q+1) - C(Q)]$ 及 $\lim\limits_{Q\to+\infty}[L(Q+1) - L(Q)]$；

(2) $\lim\limits_{Q\to+\infty}\overline{C}(Q) = \lim\limits_{Q\to+\infty}\dfrac{C(Q)}{Q}$.

解　(1) $\lim\limits_{Q\to+\infty}[C(Q+1) - C(Q)]$

$$\begin{aligned}&= \lim_{Q\to+\infty}[10 + \sqrt{1+(Q+1)^2} - (10 + \sqrt{1+Q^2})]\\ &= \lim_{Q\to+\infty}[\sqrt{1+(Q+1)^2} - \sqrt{1+Q^2}]\\ &= \lim_{Q\to+\infty}\frac{2Q+1}{\sqrt{1+(Q+1)^2} + \sqrt{1+Q^2}}\\ &= \lim_{Q\to+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{Q}}{\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + \left(1+\dfrac{1}{Q}\right)^2} + \sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+1}} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{Q\to+\infty}[L(Q+1) - L(Q)]\\ &= \lim_{Q\to+\infty}\{[R(Q+1) - C(Q+1)] - [R(Q) - C(Q)]\}\\ &= \lim_{Q\to+\infty}\{[R(Q+1) - R(Q)] - [C(Q+1) - C(Q)]\}\end{aligned}$$

$$= 5 - \lim_{Q \to +\infty} [C(Q+1) - C(Q)] = 4$$

(2) $\lim\limits_{Q \to +\infty} \overline{C}(Q) = \lim\limits_{Q \to +\infty} \dfrac{C(Q)}{Q}$

$$= \lim_{Q \to +\infty} \frac{10 + \sqrt{1+Q^2}}{Q}$$

$$= \lim_{Q \to +\infty} \left(\frac{10}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 1} \right) = 1$$

1.3 生产函数

生产函数是指产量 Q 与各种投入要素之间的函数关系

$$Q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 种要素的投入量.

如果只考虑两种投入要素:资本 K 和劳动 L,则生产函数为

$$Q = f(K, L)$$

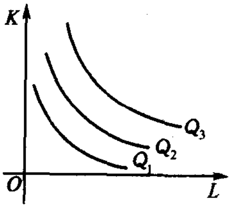

图 1-2

保持产量为 Q_0 不变,称方程 $f(K, L) = Q_0$ 的曲线为等产量线,等产量线上不同的要素投入组合所得产出相同,不同的等产量线代表不同的产出水平(如图 1-2 所示).

经济学中讨论的生产函数通常都满足

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r f(K, L) \quad (\lambda > 0)$$

称为 r 次齐次函数. $r > 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$ $(\lambda > 1)$,称为规模报酬递增; $r < 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ $(\lambda > 1)$,称为规模报酬递减; $r = 1$ 时, $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$,称为规模报酬不变.

常见的生产函数有

(1) 线性生产函数

$$Q = aK + bL \quad (a, b > 0)$$

(2) Cobb-Douglas 生产函数

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta} \quad (A, \alpha, \beta > 0)$$

(3) 常替代弹性生产函数

$$Q = A(\delta_1 K^{-\rho} + \delta_2 L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} \quad (A > 0,\ 0 < \delta_1, \delta_2 < 1,\ -1 < \rho \neq 0)$$

例 9 经济学中,称函数 $Q = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$ 为常替代弹性生产函数,称 $\overline{Q} = AK^{\delta} L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数. 试证明: $\lim\limits_{\rho \to 0} Q = \overline{Q}$.

证明 $\lim\limits_{\rho \to 0} A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$

$$= A \lim_{\rho \to 0} \exp\{\ln[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\}$$