

最新本

蔣文華編

升學會考必備

高中解析幾何複習指導

現代教育研究社出版

20
03

解析幾何考試指導

版權所有 • 翻印必究

編著者 蔣 文 華

發行者 李 小 峯

上海林森路四明里六號
總發行所 北 新 書 局

上海北西藏路251號
印刷者 大 新 印 刷 所

民國三十七年四月新二版

分 發 行 所

北平 洛陽 潢川 漢口 開封 重慶

解析幾何試題總解目次

1. 點及坐標之試題.....(1)
重要公式.....(1)
二點間距離之公式——線分之分點公式——直線之斜率公式——兩直線之平行與垂直——兩直線之交角公式——面積公式
試題總解.....(4)
2. 軌跡與方程式之試題.....(28)
重要法則.....(28)
已知規跡之條件而求其方程式——已知方程式而求其軌跡——作圖——曲線性質之討論——能析成因數之方程式之圖形之作法——兩曲線之交點
試題總解.....(30)
3. 直線之試題.....(49)
重要公式.....(49)
平行於坐標軸之直線——已知斜率及在一軸上之截份之直線——已知過一點與斜率之直線——已知過二點之直線——已知在兩軸上截份之直線——法線式之直線——直線之斜率——三直線交於一點之條件——化 $Ax+By+C=0$ 之法線式——由一點至一直線之垂距——一直線之系
試題總解.....(52)
4. 圓之試題.....(69)

重要公式.....(69)

圓之方程式——圓之中心及半徑——從圓外一點至圓所引切線之長——圓之切線方程式——根軸——圓系

試題總解.....(71)

5. 圓錐曲線之試題.....(91)

重要公式.....(91)

圓錐曲線之類別——圓錐曲線之普通方程式——拋物線之各公式——橢圓之各公式——雙曲線之各公式——圓錐曲線之切線——圓錐曲線之法線——次切線與次法線——圓錐曲線之直徑

試題總解.....(97)

6. 移軸法之試題.....(119)

重要公式.....(119)

坐標軸之平移——坐標軸之旋轉——坐標軸之普遍移動——旋轉坐標消去 xy 項——普通二次方程式所表之曲線

試題總解.....(120)

7. 極坐標之試題.....(137)

重要公式.....(138)

正坐標與極坐標之關係——直線之極方程式——圓錐曲線之極方程式——兩點間之距離——極方程式之作圖法——極方程式圖形性質之討論

試題總解.....(140)

解析幾何試講總解

一 點及坐標之試題

重要公式

1. 二點間距離之公式:

- a. 二已知點間之距離: 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 爲二已知點, 則其間距離爲:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

- b. 一已知點與原點之距離: 若 $P_1(x_1, y_1)$ 爲一已知點, 則其與原點之距離爲:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

2. 線分之分點公式:

- a. 內分點: 若一點 $P(x, y)$ 內分 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 二點之聯線爲兩份而成比爲 γ , 則

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma} \\ y &= \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

b. 外分點: 若一點 $P(x, y)$ 外分 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 二點間之聯線爲兩份而成比爲 γ , 則

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \gamma x_2}{1 - \gamma} \\ y &= \frac{y_1 - \gamma y_2}{1 - \gamma} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (IV)$$

c. 中點: 若一點 $P(x, y)$ 爲 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 二點聯線之中點, 則

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (V)$$

3. 直線之斜率公式:

若一直線通過 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 二點, 而與 x 軸之交角爲 θ , 則此線之斜率爲:

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots (VI)$$

4. 兩直線之平行與垂直:

設 m_1, m_2 各爲直線 l_1 與 l_2 之斜率;

若 $l_1 \parallel l_2$, 則

$$m_1 = m_2 \dots\dots\dots (VII)$$

若 $l_1 \perp l_2$, 則

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ m_2 &= -\frac{1}{m_1} \end{aligned} \right\} \text{或 } m_1 m_2 = -1 \dots\dots\dots (VIII)$$

5. 兩直線之交角公式:

若 m_1, m_2 爲直線 l_1 與 l_2 之斜率, θ 爲相交之角, 則

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \dots\dots\dots (IX)$$

6. 面積公式:

a. 三角形之面積: 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 與 $P_3(x_3, y_3)$ 爲三角形之角頂, 則其面積爲:

$$* \Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (X)$$

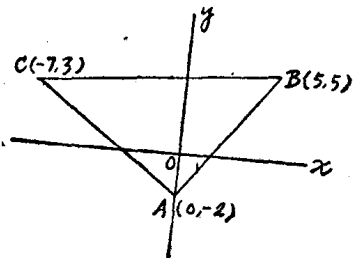
b. 多邊形之面積: 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$
 $\dots\dots P_n(x_n, y_n)$ 爲一任意 n 邊形之頂點, 則其面積爲:

$$* \square P_1 P_2 P_3 \dots P_n = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (XI)$$

* 各頂點之坐標須照反鐘方向依次而列, 若照順鐘方向, 則所得之值數同而號爲負.

試 題 總 解

1. 證明以 $A(0, -2)$, $B(5, 5)$, $C(-7, 3)$ 為頂點之三角形, 乃為一等腰三角形。(中央大學)



解 從公式(I)得:

$$AB = \sqrt{(5-0)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}.$$

$$AC = \sqrt{(-7-0)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}.$$

$$\therefore AB = AC$$

$\therefore \triangle ABC$ 為一等腰三角形。

2. 設三角形之三頂點為 $(2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 5)$. 證此三角形為一直角三角形。(上海市會考)

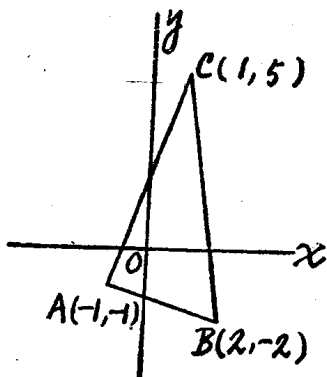
解 此題之解法可有下列之二:

(a) 從公式(I)解之, 得

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$$



$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = 50.$$

$$\therefore \angle A = \angle R.$$

$\therefore \triangle ABC$ 爲一直角三角形。

(b) 從公式 (VI) 解之, 得:

$$m_{AB} = \frac{-2+1}{2+1} = -\frac{1}{3},$$

$$m_{AC} = \frac{5+1}{1+1} = 3.$$

$$\therefore m_{AB} = -\frac{1}{m_{AC}}, \text{ 由公式 (VIII), 知}$$

$$AB \perp AC.$$

$\therefore \triangle ABC$ 爲一直角三角形。

3. 證明 $(3, 2), (1, 2\sqrt{3}), (-2, 3), (-2\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ 四點同在以原點爲中心之圓周上。

從公式 (II), 知:

$$\gamma_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13},$$

$$\gamma_2 = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13},$$

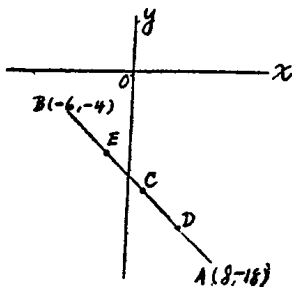
$$\gamma_3 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13},$$

$$\gamma_4 = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{8 + 5} = \sqrt{13}.$$

$$\therefore \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4.$$

\therefore 四點同在以原點為中心之圓周上。

4. 試將自 $(8, -18)$ 至 $(-6, -4)$ 二點間之距離平分為四, 求其分點。(上海市會考)



解 設 $C(x_1, y_1)$ 為 AB 之中點, $D(x_2, y_2)$, $E(x_3, y_3)$ 各為 AC, CB 之中點, 從公式(V)得:

$$C: x_1 = \frac{1}{2}(8 - 6) = 1,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(-18 - 4) = -11;$$

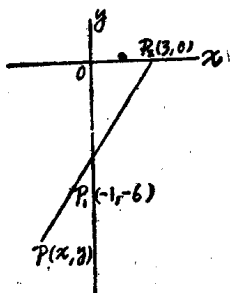
$$D: x_2 = \frac{1}{2}(8 + 1) = 4 \frac{1}{2},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(-18-11) = -14\frac{1}{2};$$

$$E: x_3 = \frac{1}{2}(1-6) = -2\frac{1}{2},$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-11-4) = -7\frac{1}{2}.$$

5. 從 $P_1(-1, -6)$ 與 $P_2(3, 0)$ 聯線之 P_1 一端延長至 P , 使 PP_2 四倍於 PP_1 ; 求 P 點之坐標。(中山大學)



翻 由題意知: $\gamma = \frac{P_1P}{P_2P} = \frac{1}{4}.$

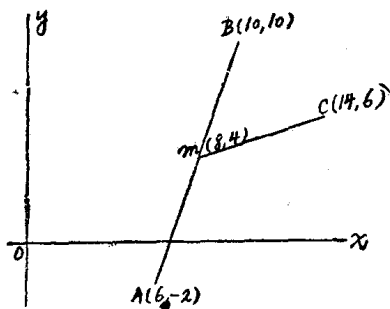
從公式(IV)得:

$$x = \frac{-1 - \frac{1}{4} \cdot 3}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = -2\frac{1}{3},$$

$$y = \frac{-6 - \frac{1}{4} \cdot 0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = -8.$$

(7)

6. 證明 $C(14, 6)$, 在以 $A(6, -2)$, $B(10, 10)$ 爲直徑之圓周上。(中山大學)



解 從公式(V)知 AB 之中點, 即圓之中心爲:

$$m: \quad x = \frac{1}{2}(6+10) = 8,$$

$$y = \frac{1}{2}(-2+10) = 4.$$

從公式(I)得

$$Am = \gamma = \sqrt{(8-6)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}.$$

$$Cm = \sqrt{(8-14)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \gamma.$$

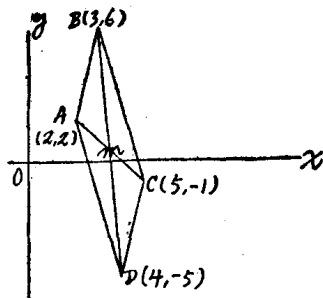
$\therefore C(14, 6)$ 在 AB 爲直徑之圓周上.

7. 證明 $(2, 2)$, $(3, 6)$, $(5, -1)$, $(4, -5)$ 爲一平行四邊形之四頂點。(北京大學)

解 此題有解法三種, 今分述如下.

(a) 用公式(I)證明兩對對邊相等.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17},$$



$$AD = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53},$$

$$CD = \sqrt{(5-4)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17},$$

$$CB = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}.$$

$$\therefore AB = CD, \quad AD = BC.$$

$\therefore ABCD$ 爲一平行四邊形。

(b) 用公式 (VI) 及 (VII) 證明兩對對邊之斜率相等。

$$m_{AB} = \frac{6-2}{3-2} = 4,$$

$$m_{CD} = \frac{-1+5}{5-4} = 4;$$

$\therefore AB \parallel CD.$

$$m_{AD} = \frac{-5-2}{4-2} = -\frac{7}{2}$$

$$m_{CB} = \frac{-1-6}{5-3} = -\frac{7}{2}.$$

$\therefore AD \parallel CB.$

∴ $ABCD$ 爲一平行四邊形。

(c) 用公式 (V) 證明兩對角線之中點合一。

$$m: x_{BD} = \frac{1}{2}(4+3) = 3\frac{1}{2},$$

$$y_{BD} = \frac{1}{2}(-5+6) = \frac{1}{2};$$

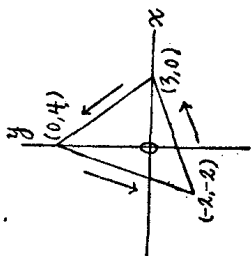
$$x_{AC} = \frac{1}{2}(5+2) = 3\frac{1}{2},$$

$$y_{AC} = \frac{1}{2}(-1+2) = \frac{1}{2}.$$

∴ 兩對角線 BD, AC 互相等分。

∴ $ABCD$ 爲一平行四邊形。

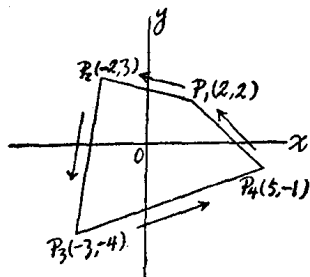
8. 三角形三頂點之坐標爲 $(3,0)$, $(0,4)$ 及 $(-2,-2)$;
求其面積。(河南省會考)



■ 從公式 (X) 得:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(12+8+6) = 13.$$

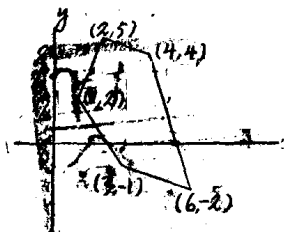
9. 四邊形之四頂點爲 $(-2,3), (-3,-4), (2,2), (5,-1)$, 求其面積。(浙江省會考)。



解 從公式(XI)得:

$$\begin{aligned} \Delta P_1 P_2 P_3 P_4 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (6+8+3+10+9+20+2+4) = 31. \end{aligned}$$

10. 五邊形之頂點爲 $(1,2), (3,-1), (6,-2), (2,5), (4,4)$, 求其面積。(中央大學)



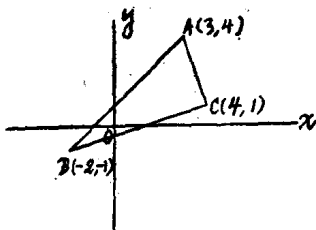
解 從公式(XI)得:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [(24 + 20 + 4 - 1 - 6) - (8 + 5 + 6 - 6 - 8)]$$

$$= \frac{1}{2} (41 - 5) = 18.$$

11. 三角形之三頂點為 $A(3,4)$, $B(-2,-1)$, $C(4,1)$, 求其三角之大小。(交通大學)



■ 從公式(VI)得:

$$m_{AB} = \frac{-1-4}{-2-3} = 1,$$

$$m_{BC} = \frac{1+1}{4+2} = \frac{1}{3},$$

$$m_{CA} = \frac{4-1}{3-4} = -3.$$

$$\therefore m_{BC} = -\frac{1}{m_{CA}}$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ.$$

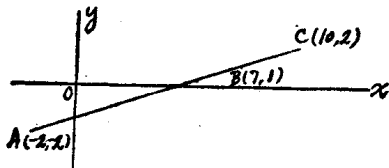
由公式 (IX)

$$\tan B = \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB}m_{BC}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle B = 26^\circ 34',$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - 26^\circ 34' = 63^\circ 26'.$$

12. 用三法證明 $A(10, 2), B(7, 1), C(-2, -2)$ 在一直線上。(浙江大學)



- 12 (a) 用距離公式 (I) 證明 $AB + BC = AC$.

$$AB = \sqrt{(7+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$

$$BC = \sqrt{(10-7)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},$$

$$AC = \sqrt{(10+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.$$

$$\therefore AB + BC = AC.$$

$\therefore A, B, C$ 在一直線上。

- (b) 用斜率公式 (VI) 證明 $m_{AB} = m_{BC}$.

$$m_{AB} = \frac{1+2}{7+2} = \frac{1}{3},$$

$$m_{BC} = \frac{2-1}{10-7} = \frac{1}{3}.$$