最新本

蔣文華編

升学會考必備

高中解析幾何複習指導

現代教育研究社出版

解析幾何考試指導

編著者　蔣　文　華

發行者　李　小　峯

上海林森路四明里六號
總發行所　北　新　書　局

上海北西藏路251號
印刷者　大　新　印　刷　所

民國三十七年四月新二版

分發行所

北平 洛陽 潢川 漢口 開封 重慶

解析幾何試題總解目次

解析幾何試詳總解

一　點及坐標之試題

重要公式

1. 二點間距離之公式:

a. 二已知點間之距離: 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 爲二已知點,則其間距離爲:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{I})$$

b. 一已知點與原點之距離: 若 $P_1(x_1, y_1)$ 爲一已知點,則其與原點之距離爲:

$$d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{II})$$

2. 線分之分點公式:

a. 內分點: 若一點 $P(x, y)$ 內分 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 二點之聯線爲兩份而成比爲 γ, 則

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}\\ y&=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

b. 外分點: 若一點 $P(x,y)$ 外分 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 二點間之聯線爲兩份而成比爲 γ, 則

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1-\gamma x_2}{1-\gamma} \\ y&=\frac{y_1-\gamma y_2}{1-\gamma} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(IV)$$

c. 中點: 若一點 $P(x,y)$ 爲 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 二點聯線之中點,則

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ y&=\frac{1}{2}(y_1+y_2) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(V)$$

3. 直線之斜率公式:

若一直線通過 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 二點,而與 x 軸之交角爲 θ, 則此線之斜率爲:

$$m=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(VI)$$

4. 兩直線之平行與垂直:

設 m_1, m_2 各爲直線 l_1 與 l_2 之斜率;

若 $l_1 \parallel l_2$, 則

$$m_1=m_2\cdots\cdots\cdots\cdots(VII)$$

若 $l_1 \perp l_2$, 則

$$\left.\begin{aligned} m_1&=-\frac{1}{m_2} \\ m_2&=-\frac{1}{m_1} \end{aligned}\right\}\text{或 } m_1m_2=-1\cdots\cdots\cdots\cdots(VIII)$$

5. 兩直線之交角公式:

若 m_1, m_2 爲直線 l_1 與 l_2 之斜率，θ 爲相交之角，則

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IX})$$

6. 面積公式:

a. 三角形之面積: 若 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 與 $P_3(x_3, y_3)$ 爲三角形之角頂，則其面積爲:

$$^*\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{X})$$

b. 多邊形之面積: 若 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ $\cdots\cdots$ $P_n(x_n, y_n)$ 爲一任意 n 邊形之頂點，則其面積爲:

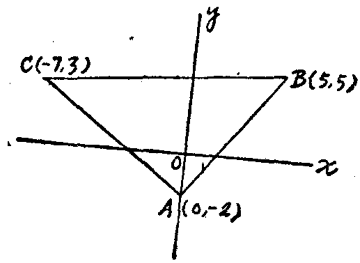
$$^*\bigcirc P_1P_2P_3\cdots P_n=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{XI})$$

---

* 各頂點之坐標須照反鐘方向依次而列，若照順鐘方向，則所得之值數同而號爲負。

試題總解

1. 證明以 $A(0,-2)$, $B(5,5)$, $C(-7,3)$ 爲頂點之三角形,乃爲一等腰三角形.(中央大學)



解 從公式(I)得:

$$AB=\sqrt{(5-0)^2+(5+2)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}.$$

$$AC=\sqrt{(-7-0)^2+(3+2)^2}=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}.$$

$\therefore$ $AB=AC$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 爲一等腰三角形.

2. 設三角形之三頂點爲 $(2,-2)$, $(-1,-1)$, $(1,5)$. 證此三角形爲一直角三角形.(上海市會考)

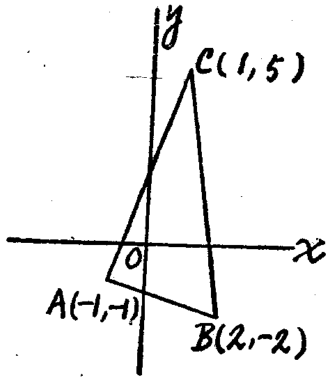
解 此題之解法可有下述之二:

(a) 從公式(I)解之,得

$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10},$$

$$AC=\sqrt{(1+1)^2+(5+1)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40},$$

$$BC=\sqrt{(1-2)^2+(5+2)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}.$$



$\therefore \quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=50.$

$\therefore \quad \angle A=\angle R.$

$\therefore \quad \triangle ABC$ 爲一直角三角形.

(b) 從公式(VI)解之,得:

$$m_{AB}=\frac{-2+1}{2+1}=-\frac{1}{3},$$

$$m_{AC}=\frac{5+1}{1+1}=3.$$

$\therefore \quad m_{AB}=-\dfrac{1}{m_{AC}}$, 由公式(VIII), 知

$AB\perp AC.$

$\therefore \quad \triangle ABC$ 爲一直角三角形.

3. 證明 $(3,2),(1,2\sqrt{3}),(-2,3),(-2\sqrt{2},-\sqrt{5})$ 四點同在以原點爲中心之圓周上.

從公式(II),知:

$$\gamma_1=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13},$$

$$\gamma_2=\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+12}=\sqrt{13},$$

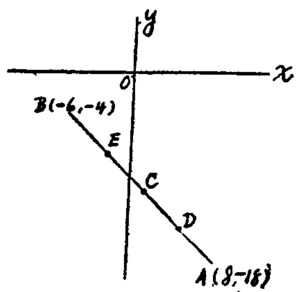
$$\gamma_3=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},$$

$$\gamma_4=\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+(-\sqrt{5})^2}=\sqrt{8+5}=\sqrt{13}.$$

$\therefore\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4.$

$\therefore$　四點同在以原點爲中心之圓周上.

4. 試將自 (8,−18) 至 (−6,−4) 二點間之距離平分爲四,求其分點.(上海市會考)



解　設 $C(x_1, y_1)$ 爲 AB 之中點, $D(x_2, y_2)$, $E(x_3, y_3)$ 各爲 AC, CB 之中點,從公式(V)得:

C:　$x_1=\frac{1}{2}(8-6)=1,$

　　$y_1=\frac{1}{2}(-18-4)=-11;$

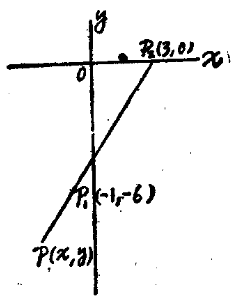
D:　$x_2=\frac{1}{2}(8+1)=4\frac{1}{2},$

$$y_2=\frac{1}{2}(-18-11)=-14\frac{1}{2};$$

$$E:\quad x_3=\frac{1}{2}(1-6)=-2\frac{1}{2},$$

$$y_3=\frac{1}{2}(-11-4)=-7\frac{1}{2}.$$

5. 從 $P_1(-1,-6)$ 與 $P_2(3,0)$ 聯線之 P_1 一端延長至 P，使 PP_2 四倍於 PP_1；求 P 點之坐標.（中山大學）



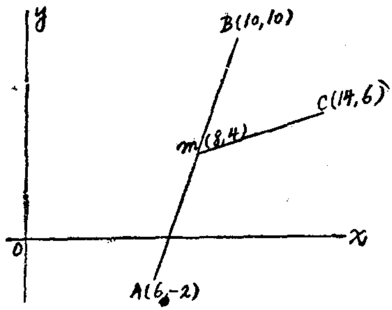
解 由題意知：　$\gamma=\dfrac{P_1P}{P_2P}=\dfrac{1}{4}.$

從公式(IV)得：

$$x=\frac{-1-\frac{1}{4}\cdot 3}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}}=-2\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{-6-\frac{1}{4}\cdot 0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=-8.$$

6. 證明 $C(14,6)$, 在以 $A(6,-2)$, $B(10,10)$ 爲直徑之圓周上.(中山大學)



解 從公式(V)知 AB 之中點,即圓之中心爲:

$$m:\quad x=\frac{1}{2}(6+10)=8,$$

$$y=\frac{1}{2}(-2+10)=4.$$

從公式(I)得

$$Am=\gamma=\sqrt{(8-6)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}.$$

$$Cm=\sqrt{(8-14)^2+(6-4)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=\gamma.$$

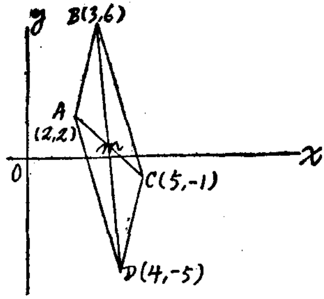
$\therefore$ $C(14,6)$ 在 AB 爲直徑之圓周上.

7. 證明 $(2,2)$, $(3,6)$, $(5,-1)$, $(4,-5)$ 爲一平行四邊形之四頂點.(北京大學)

解 此題有解法三種,今分述如下.

(a) 用公式(I)證明兩對對邊相等.

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(6-2)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17},$$



$$AD=\sqrt{(4-2)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53},$$

$$CD=\sqrt{(5-4)^2+(-1+5)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17},$$

$$CB=\sqrt{(5-3)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}.$$

$\therefore\quad AB=CD,\quad AD=BC.$

$\therefore\quad ABCD$ 爲一平行四邊形.

(b) 用公式 (VI) 及 (VII) 證明兩對對邊之斜率相等.

$$m_{AB}=\frac{6-2}{3-2}=4,$$

$$m_{CD}=\frac{-1+5}{5-4}=4;$$

$\therefore\quad AB \parallel CD.$

$$m_{AD}=\frac{-5-2}{4-2}=-\frac{7}{2}$$

$$m_{CB}=\frac{-1-6}{5-3}=-\frac{7}{2},$$

$\therefore\quad AD \parallel CB.$

∴　$ABCD$ 爲一平行四邊形.

(c)　用公式(V)證明兩對角線之中點合一.

m:　$$x_{BD}=\frac{1}{2}(4+3)=3\frac{1}{2},$$

$$y_{BD}=\frac{1}{2}(-5+6)=\frac{1}{2};$$

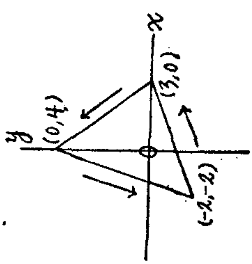
$$x_{AC}=\frac{1}{2}(5+2)=3\frac{1}{2},$$

$$y_{AC}=\frac{1}{2}(-1+2)=\frac{1}{2}.$$

∴　兩對角線 BD, AC 互相等分.

∴　$ABCD$ 爲一平行四邊形.

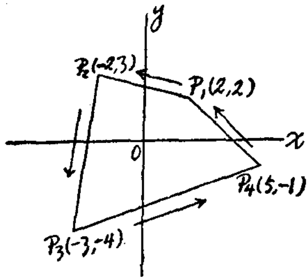
8. 三角形三頂點之坐標爲 (3,0), (0,4) 及 (−2,−2); 求其面積.(河南省會考)



解　從公式(X)得:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(12+8+6)=13.$$

9. 四邊形之四頂點爲 $(-2,3),(-3,-4),(2,2),(5,-1)$, 求其面積. (浙江省會考).

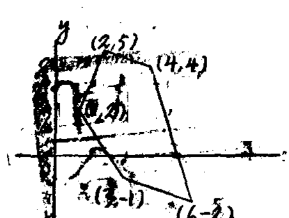


解 從公式(XI)得:

$$\triangle P_1P_2P_3P_4=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(6+8+3+10+9+20+2+4)=31.$$

10. 五邊形之頂點爲 $(1,2),(3,-1),(6,-2),(2,5),(4,4)$, 求其面積. (中央大學)



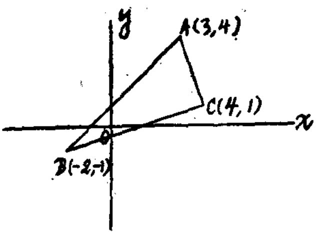
解 從公式(XI)得:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(24+20+4-1-6)-(8+5+6-6-8)]$$

$$=\frac{1}{2}(41-5)=18.$$

11. 三角形之三頂點爲 $A(3,4)$, $B(-2,-1)$, $C(4,1)$, 求其三角之大小.（交通大學）



解 從公式(VI)得:

$$m_{AB}=\frac{-1-4}{-2-3}=1,$$

$$m_{BC}=\frac{1+1}{4+2}=\frac{1}{3},$$

$$m_{CA}=\frac{4-1}{3-4}=-3.$$

$$\therefore \quad m_{BC}=-\frac{1}{m_{CA}}$$

$\therefore \quad \angle C = 90^\circ.$

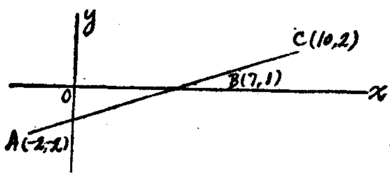
由公式(IX)

$$\tan B = \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB} m_{BC}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \quad \angle B = 26^\circ 34',$

$\therefore \quad \angle A = 90^\circ - 26^\circ 34' = 63^\circ 26'.$

12. 用三法證明 $A(10,2)$, $B(7,1)$, $C(-2,-2)$ 在一直線上.(浙江大學)



證 (a) 用距離公式(I)證明 $AB + BC = AC$.

$AB = \sqrt{(7+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$

$BC = \sqrt{(10-7)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},$

$AC = \sqrt{(10+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.$

$\therefore \quad AB + BC = AC.$

$\therefore \quad A, B, C$ 在一直線上.

(b) 用斜率公式(VI)證明 $m_{AB} = m_{BC}$.

$$m_{AB} = \frac{1+2}{7+2} = \frac{1}{3},$$

$$m_{BC} = \frac{2-1}{10-7} = \frac{1}{3}.$$