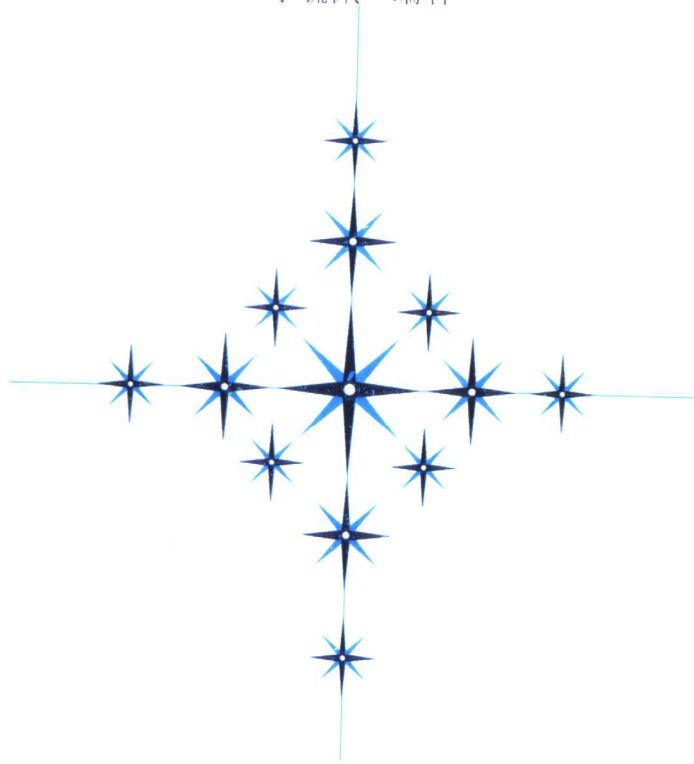


圆面积之谜

李毓佩 编著



S1218.0303

内 容 提 要

本书采用讲故事的形式,介绍了开普勒、牛顿等数学家求圆面积和瞬时速度的动人情景,描绘了他们开创的新的数学思想和方法。这就是微积分的思想和方法。生动有趣地了解一点微积分的产生和应用的情形,不仅可以增加学习数学的兴趣,还可以启发思想,开阔眼界,这对学好初中数学也是有帮助的。

责任编辑: 文赞阳 薛晓哲

插 图: 赵正阳 华克齐 左建华

目 录

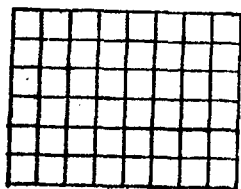
圆面积之谜	1
难求的速度	18
智慧的构思	35
巧妙的方法	59
惊人的预言	70

圆面积之谜

怎样求圆面积?我们现在有公式可用,很快就算出来了。但是在过去漫长的年代里,人们为了研究和解决这个问题,不知遇到了多少艰难和困苦,花费了多少精力和时间。

割补求面积

在平面图形中,以长方形的面积最容易求了。用大小一样的正方形砖铺垫长方形地面,如果横向用8块,纵向用6块,那一共就用了 $8 \times 6 = 48$ 块砖。所以求长方形面积的公式是:长 $\times$ 宽。



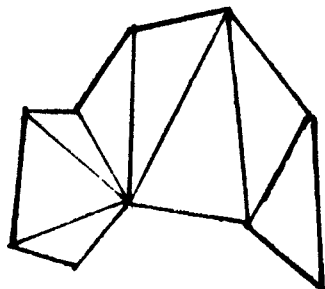
求平行四边形的面积,可以用割补的方法,把它变成一个与它面积相等的长方形。长方形的长和

宽，就是平行四边形的底和高。所以求平行四边形面积的公式是：底 $\times$ 高。



求三角形的面积，可以对接上一个和它全等的三角形，成为一个平行四边形。这样，三角形的面积，就等于和它同底同高的平行四边形面积的一半。所以求三角形面积的公式是： $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$ 。

任何一个多边形，因为可以分割成若干个三角形，所以它的面积，就等于这些三角形面积的和。



4000 多年前修建的埃及胡夫金字塔，底座是一个正方形，占地 52900 平方米。它的底座边长和角度计算十分准确，误差很小，可见当时测算大面积的技



术水平很高。

古老的难题

圆是最重要的曲边形。古埃及人把它看成是神赐予人的神圣图形。怎样求圆的面积，是数学对人类智慧的一次考验。

也许你会想，既然正方形的面积那么容易求，我们只要想办法做出一个正方形，使它的面积恰好等于圆面积就行了。你的想法很好，可是要做出这样的正方形很难啊。

$$\boxed{S} = \textcircled{S}$$

你知道古代三大几何难题吗？其中的一个，就是你刚才想到的化圆为方。这个起源于古希腊的几何作图题，在 2000 多年间，不知难倒了多少能人，直到 19 世纪，人们才证明了这个几何题，是根本不可能

用圆规和无刻度的直尺做出来的。

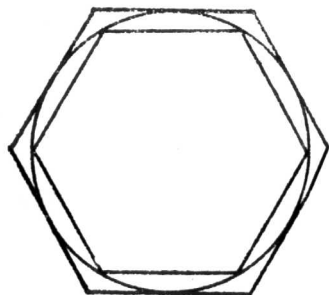


化圆为方这条路走不通,人们不得不开动脑筋,另找出路。

我国古代的数学家,从圆内接正六边形入手,让边数成倍增加,用圆内接正多边形的面积去逼近圆面积。

古希腊的数学家,从圆内接正多边形和外切正多边形同时入手,不断增加它们的边数,从里外两个方面去逼近圆面积(见下页上图)。

古印度的数学家,采用类似切西瓜的办法,把圆



切成许多小瓣,再把这些小瓣对接成一个长方形,用长方形的面积去代替圆面积。



他们煞费苦心,巧妙构思,不怕困难,为求圆面积做出了十分宝贵的贡献。

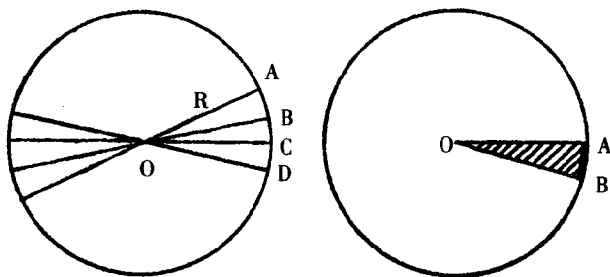
酒桶的学问



16 世纪的德国天文学家开普勒，是一个重视观察、肯动脑筋的人。他曾把丹麦天文学家第谷遗留下来的大量天文观测资料，认真地进行整理分析，提出了著名的“开普勒三定律”。开普勒第一次告诉人们，地球围绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。

开普勒当过数学教师，他对求面积的问题非常感兴趣，曾进行过深入的研究。他想，古代数学家用分割的方法去求圆面积，所得到的结果都是近似值。为了提高近似的程度，他们不断增加分割的次数。但是，不管分割多少次，几千几万，只要是有限次，所求出来的总是圆面积的近似值。要想求出圆面积的精确值，必须分割无穷多次，把圆分成无穷多等分才行。

开普勒也模仿切西瓜的方法，把圆分割成许多小扇形；不同的是，他一上来就把圆分成无穷多个小扇形。



因为这些小扇形太小了，小弧 $\widehat{AB}$ 也太短了，所以开普勒就把小弧 $\widehat{AB}$ 和小弦 $\overline{AB}$ 看成是相等的，即 $\widehat{AB} = \overline{AB}$ 。

这样一来，小扇形 AOB 就变成为小三角形 AOB 了；而小三角形 AOB 的高就是圆的半径 R。于是，开普勒就得到：

小扇形 AOB 的面积 = 小三角形 AOB 的面积 = $\frac{1}{2} R \times \overline{AB}$ 。

圆面积等于无穷多个小扇形面积的和，所以：

$$\begin{aligned} \text{圆面积 } S &= \frac{1}{2} R \times \overline{AB} + \frac{1}{2} R \times \overline{BC} + \frac{1}{2} R \times \overline{CD} \\ &\quad + \cdots \\ &= \frac{1}{2} R \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots) \\ &= \frac{1}{2} R \times (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \cdots) \end{aligned}$$

在最后一个式子中，各段小弧相加就是圆的周长 $2\pi R$ ，所以有：

$$S = \frac{1}{2} R \times 2\pi R = \pi R^2$$

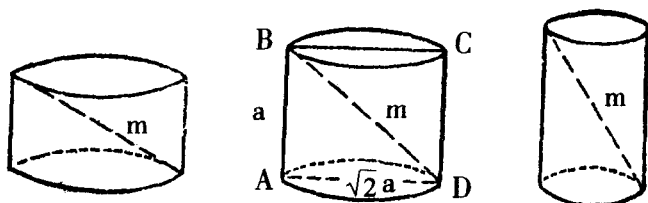
这就是我们熟悉的圆面积公式。

开普勒运用无穷分割法，求出了许多图形的面积。1615年，他把自己创造的这种求面积的新方法，发表在《葡萄酒桶的立体几何》一书中。

这个奇怪的书名是有来由的。有一天，开普勒到酒店去喝酒，发现奥地利的葡萄酒桶，和他家乡莱

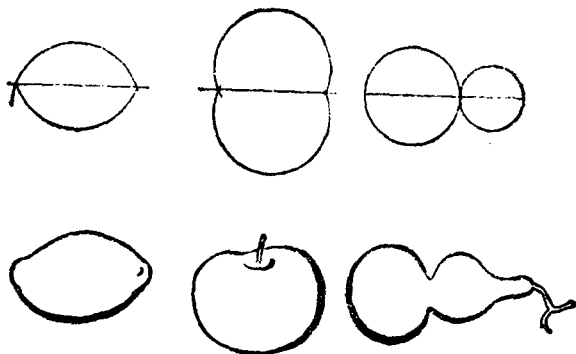


茵的葡萄酒桶不一样。他想，奥地利葡萄酒桶为什么偏要做成这个样子呢？高一点好不好？扁一点行不行？这里面会不会有什么学问？经过研究，开普勒发



现，当圆柱形酒桶的截面 $ABCD$ 的对角线长度固定时，比如等于 m ，以底圆直径和高的比为 $\sqrt{2}$ 时体积最大，装酒最多。奥地利的葡萄酒桶，恰好是按这个比例做成的。这一意外发现，使开普勒非常高兴，决定给这本关于求面积和体积的书，起名为《葡萄酒桶的立体几何》。

在这本书中，开普勒除介绍了他求面积的新方法外，还介绍了他求出的近百个旋转体的体积。比如，他计算了圆弧绕着弦旋转一周，所产生的各种旋转体的体积。这些旋转体的形状，有的像苹果，有的



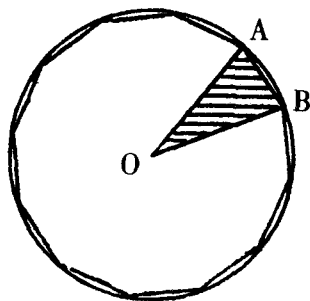
像柠檬,有的像葫芦。

问题在哪里?

开普勒大胆地把圆分割成无穷多个小扇形,又果敢地断言:无穷小的扇形面积,和它对应的无穷小的三角形面积相等。他在前人求面积的基础上,向前迈出了重要的一步。

《葡萄酒桶的立体几何》一书,很快在欧洲流传开了。数学家高度评价开普勒的工作,称赞这本书是人们创造求面积和体积新方法的灵感源泉。

一种新的理论,在开始的时候很难十全十美。开普勒创造的求面积的新方法,引起了一些人的怀疑。他们问道:开普勒分割出来的无穷多个小扇形,它的面积究竟等于不等于零?如果等于零,半径 OA 和半径 OB 就必然重合,小扇形 OAB 就不存在了;如



果它的面积不等于零，小扇形 OAB 与小三角形 OAB 的面积就不会相等。开普勒把两者看作相等就不对了。

面对别人提出的问题，开普勒自己也说不清楚。

他在想什么？

卡瓦利里是意大利物理学家伽利略的学生，他研究了开普勒求面积方法中的问题。

卡瓦利里想，开普勒把圆分成无穷多个小扇形，这每个小扇形的面积到底等于不等于零，就难以确定了。但是，只要小扇形还是图形，它是可以再分的呀。开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去，那分到什么程度为止呢？这些问题，使卡瓦利里陷入了沉思之中。





有一天，当卡瓦利里的目光落到自己的衣服上时，他忽然灵机一动：唉，布不是可以看成为面积嘛！布是由棉线织成的，要是把布拆开的话，拆到棉线就为止了。我们要是把面积也像布一样拆开，拆到哪儿为止呢？应该拆到直线为止。几何学规定直线没有宽度，把面积分到直线就应该不能再分了。于是，他把不能再细分的东西叫做“不可分量”。棉线是布的不可分量，直线是平面面积的不可分量。

卡瓦利里还进一步研究了体积的分割问题。他想，可以把长方体看成为一本书，组成书的每一页纸，应该是书的不可分量。这样，平面就应该是长方体体积的不可分量。几何学规定平面是没有薄厚的，这样想也是有道理的。

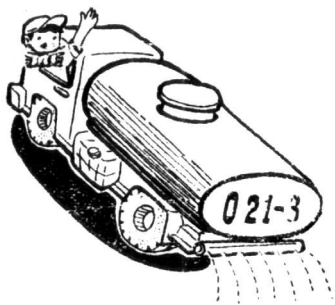
卡瓦利里紧紧抓住自己的想法，反复琢磨，提出了求面积和体积的新方法。

1635年,当《葡萄酒桶的立体几何》一书问世20周年的时候,意大利出版了卡瓦利里的《不可分量几何学》。在这本书中,卡瓦利里把点、线、面,分别看成是直线、平面、立体的不可分量;把直线看成是点的总和,把平面看成是直线的总和,把立体看成是平面的总和。

独特的方法

卡瓦利里怎样用不可分量求面积的呢?现在以椭圆为例,介绍如下:

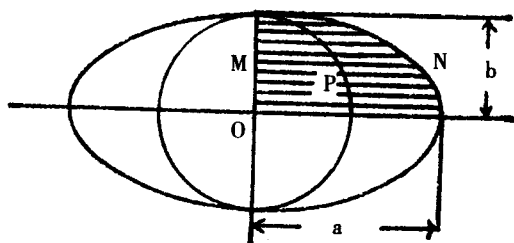
椭圆有一条长轴和一条短轴,如图相交于 O ,把椭圆分成了4等份。



卡瓦利里设 a 和 b 是长轴和短轴的一半;以椭圆中心 O 为圆心,以 b 为半径,在椭圆内作一个圆。

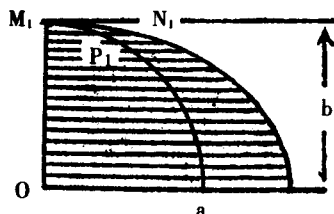
他根据不可分量的想法,把椭圆面积的四分之一,看成是由无穷多条平行于 a 的线段组成,每一条线段与圆交于一点(见下页上图)。

卡瓦利里根据椭圆的性质推出,任一条和 a 平



行的线段 MN, 与圆交于 P, 一定有:

$$\frac{MP}{MN} = \frac{b}{a}$$



他把这样引出的无穷多条平行线段, 由小到大编上 $M_1 N_1, M_2 N_2, M_3 N_3, \dots$ 就可以得到一大串比例式:

$$\frac{M_1 P_1}{M_1 N_1} = \frac{M_2 P_2}{M_2 N_2} = \frac{M_3 P_3}{M_3 N_3} = \dots = \frac{b}{a}$$

比例有这样一个性质: 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 成立, 那么 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ 也成立。他利用比例的这个性质, 就得到: