初中代数

重点知识归纳与验收

长 春 出 版 社

东北朝鲜民族教育出版社

《中学基础知识基本技能训练丛书》

初中代数
重点知识归纳与验收

高乃申 高乃莹
高 琪 方纯义 编

长 春 出 版 社
东北朝鲜民族教育出版社

初中代数重点知识归纳与验收

高乃申　等编

责任编辑：吴昌振　孙慧平　　封面设计：王国庆

长春出版社出版　　新华书店总店北京发行所发行

（长春市重庆路40号）　　北京怀柔县[illegible]山印刷厂印刷

开　本：787×1092　1/32　　1990年3月第1版

印　张：6.0625　　1991年9月第3次印刷

字　数：136 000　　印数：52001—59200册

ISBN 7-80573-141-1/G·36　　定价：2.35元

出版说明

基础知识、基本技能是中学阶段各科教学和训练的主要着眼点，亦是检验中学生对各科知识掌握、理解程度的参照坐标。

本套丛书就是从“双基”出发，遵循初、高中各科教学大纲的宗旨，根据近年来初、高中升学考试的总体趋势，按照初、高中各学科的知识体系编写而成的。

本丛书按学科分册，各册均由“学好××学科的钥匙”、“重点知识归纳与运用”、“升学考试模拟试题”“参考答案”四部分组成。其中主体部分的“重点知识归纳与运用”包括“知识归纳”“理解与运用”、“知识验收”等项。

由于本丛书立足于学科重点知识的系统归纳，既适用于初、高中升学考试的总复习，也可作为初、高中学生日常学习用书。

编　者

1990年1月

《中学基础知识基本技能训练丛书》
编　委　会

目　　录

学好初中代数的钥匙

数学是门重要的自然科学，它来源于人类的实践，又服务于人类，是人们进行生产斗争和科学实验的工具。几乎每一门科学，如物理、化学、天文、地理……都离不开数学。所以，每一个青年学生都应努力学好数学。那么，怎样才能学好数学呢？我们提出下面的建议，希望它能成为你打开学好初中代数的钥匙。

一、准确地牢记公式、定理和法则

数学中的公式、定理和法则是进行推理论证、计算的依据。它们本身的证明方法又是我们学习各种数学方法的来源。因此，对于公式、定理和法则，必须记牢，同时要记准。认为学数学只是理解和运用，不需花费工夫去记忆的想法是万万要不得的。应该知道，对数学中该记的知识，首先是准确牢记，这是学好数学的基础。否则，若不记，推理论证、解题、计算等就无从说起，就没办法做；若记不准确，推理论证、解题、运算等就要出错误。数学的概念必须准确，决不能含糊地记住“大概意思”，决不能出现“可能是……”、“大约是……”的情况，如果这样，就学不好数学。

对于法则和定理的推导，其证明方法要重视、要掌握。往往常用的数学方法就是从这里学来的。不掌握证明、指导方法，对数学双基的提高和解题能力的提高，会有很大的影响。

例如，对乘法公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$若记不准确，无法进行运算。一元二次方程求根公式记不牢，无法准确地解二次方程，判别

式记不住或根与系数的关系记不清，遇到有关问题，就是想出解法，也是没有办法把题正确做出来，所以公式必须牢记。

又如，对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 定义必须记准。

例1 当k为何值时，方程 $(k-1)x^2-2kx+1=0$ 有相异实根。

有的同学误解成：$\because \Delta=(-2k)^2-4(k-1)>0$，

即 $4k^2-4k+4=4(k-\frac{1}{2})^2+3>0$，

$\therefore$ k为全体实数时方程有相异实根。

上面解法中求出k的范围是错误的，原因是没有记准一元二次方程定义，忽略了$a\neq 0$这一条件。正确结果应是$k\neq 1$的全体实数。

所以，记公式、概念等，必须记准。

例2 推导一元二次方程求根公式

一元二次方程，$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

方程两边都除以二次项系数，得$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

将常数项移至右边，得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，

在方程两边各加上一次项系数一半的平方，

得 $x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$，

即 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

$\because$ $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，当 $b^2-4ac\geq 0$ 时得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

在该公式的推导过程中引出了数学中一个重要的数学方法——配方法.它是初中代数学习中一个很重要的方法,也是高中数学学习的重要方法,其应用广泛.学习公式推导过程也是学习数学方法的过程，所以对于公式推导必须很好掌握。

二、正确理解与使用数学概念解题

学好数学，必须概念清楚，正确理解概念，唯此才能在解题中正确使用。否则，会造成推理和计算的错误。因此正确理解概念是掌握数学基础知识的前提。

我们有些同学往往对正确理解和运用数学概念的重要性认识不足，经常在解题中出现概念性错误。

例 1　化简：$\sqrt{a^2}$。

解：$\sqrt{a^2}=\pm a$。

又解：$\sqrt{a^2}=a$。

这两种解法都是错误的，第一种解法错在对算术根概念不清；第二种解法错误在于误认为a必为非负数.正确解法为

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0,\\ -a & a<0.\end{cases}$$

例 2　解方程$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x+2}=0$。

解：将原方程移项，平方得

$$x^2-1=2x+2$$

即　$x^2-2x-3=0$

解得　$x_1=-1$，$x_2=3$。

代入原方程检验，$x=3$是增根舍去，原方程的根是$x=-1$。

如果算术根概念清楚，则很快看出，上述方程只有当$\begin{cases}x^2-1=0\\2x+2=0\end{cases}$时才能成立，迅速解出$x=-1$是原方程的根，避免一些不必要的繁锁解题过程。

例3　写出$\lg C=-2.4087$的首数与尾数。

解：∵　$\lg C=-2.4087=-2-0.4087$，

∴　$\lg C$的首数为-2，尾数为-0.4087.

显然解错了，产生错误的原因是对于常用对数的首数、尾数概念不清。常用对数的尾数是正的纯小数或0。

正确解法：

$$\begin{aligned}\lg C&=-2+(-0.4087)\\&=(-2-1)+(1-0.4087)\\&=-3+0.5913,\end{aligned}$$

∴　$\lg C$的首数是-3，尾数是0.5913。

例4　化简：$\sqrt{\lg^2 7-\lg 49+1}$。

错解：　$\sqrt{\lg^2 7-\lg 49+1}$

$=\sqrt{(\lg 7-1)^2}$

$=\lg 7-1$。

产生错误的原因：①算术根概念不清；②对于对数简单性质不清。

正确解法：原式$=\sqrt{(\lg 7-1)^2}=1-\lg 7$。

例5　解方程：$|x-1|+|x+4|=5$。

对于含有两个绝对值符号的方程，有的同学觉得不知从

祠下手，其实解它只不过是绝对值定义的应用。

解：当$x<-4$时，原方程去掉绝对值符号，得

$1-x-x-4=5$，∴ $x=-4$。

当$-4\leqslant x<1$时，原方程变为：

$1-x+x+4=5$ 是恒等式，∴ $-4\leqslant x<1$。

当$x\geqslant1$，原方程变为：

$x-1+x+4=5$，∴ $x=1$。

通过上面一些例子我们看到，正确理解与运用数学概念对学好数学是十分重要的，概念是进行正确思维的根据。

要学好数学，必须把概念的学习放在首要地位。

三、培养准确、迅速的计算能力

运算能力是学生的基本功，当确定好解题方法，运算则是这些方法得以实现的重要保证。思路再好，没有过硬的运算技能，题还是不能正确解出。在学习时，要扎扎实实，一丝不苟地去演算，从中掌握运算方法和规律。

学生的运算能力，表现在运算的准确、迅速、灵活三个方面，其中准确是首要的。若要提高运算能力应努力做到：

1．对基本公式、法则要熟，要有对一式多变形式的使用能力。

例如，利用余弦定理进行计算，若是求边则应熟练写出，第一公式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，……若是求角，则应熟练写出第二公式，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，……

对于正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$要熟悉，也要熟悉它的多变形式，如$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=$

$2R\cdot\sin C$，或$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，这样计算时需要哪种形式能准确迅速直接写出，才能达到计算迅速的目的。

例1　已知$x+y=4$，求代数式x^3+y^3+12xy的值。

解：原式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+12xy$

$=(x+y)[(x+y)^2-3xy]+12xy$

$=4[4^2-3xy]+12xy$

$=64$。

显然该题要准确、迅速计算，一要乘法公式熟，二要配方熟方能达到目的。

例2　计算$(\lg 5\cdot\lg 20)+(\lg 2)^2$。

解：原式$=\lg\frac{10}{2}\cdot\lg(2\times 10)+(\lg 2)^2$

$=(\lg 10-\lg 2)(\lg 2+\lg 10)+(\lg 2)^2$

$=(1-\lg 2)(1+\lg 2)+(\lg 2)^2$

$=1-(\lg 2)^2+(\lg 2)^2$

$=1$。

此题必须熟练使用对数运算公式,才能准确计算出结果。

2．运算中注意每步的运算根据是否正确，并要掌握一些常用的运算规律。

运算根据确凿，不会发生法则性错误．本来，数学运算的实质就是根据概念、法则，从已知推导出结果的一种推理过程．运算中出现的错误，往往是对某些步骤所根据的概念或法则掌握不好，所以在计算中要培养自己做到步步有据。

另外，掌握一些常用的规律能提高运算速度和灵活性。

例3　计算：$[-2^{-1}\times(-2)^2]^{-1}+\sqrt{(-2)^2}$。

解：原式$=[-\frac{1}{2}\times 4]^{-1}+2$

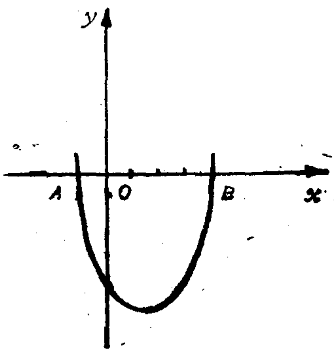
$$=(-2)^{1}+2$$

$$=1\frac{1}{2}.$$

该题计算根据：①负整指数幂定义；②算术根定义；③明确运算顺序。

有些运算规律要善于学习和积累，初中代数运算中常用规律：①掌握由高级运算到低级运算的规律，即先进行三级运算（乘方、开方运算），其次是二级运算（乘、除运算），最后是一级运算（加减运算）；②同级运算从左到右；③括号内外是先内后外，括号的运算顺序是先小次中最后大；④一算式中既有分数又有小数一般是小数化分数统一成分数或分数化小数统一成小数；⑤注意运算律的使用；⑥正负数乘除法中先定符号；⑦注意相反数概念应用，可出现相消项，注意同类项概念使用，可合并同类项；⑧注意形数结合提高运算灵活性.

例 4　已知二次函数$y=x^2-3x-4$的图象与x轴交A、B两点，求AB长。



解。令$x^2-3x-4=0$

$\therefore\quad x_1=-1,\ x_2=4$。

即抛物线与x轴交于

$A(-1,\ 0)$

$B(4,0)$二点，如左图。

$\therefore\quad AB=1+4=5$。

显然该题通过数形结合直接由A、B坐标求出AB的长。

3．熟记一些常用数据和有关图形及一些基本式子能提高计算速度。

①1—25自然数的平方数；②1—10的立方数；③特殊角三角函数值；④常用的小数分数互化：$0.5=\frac{1}{2}$，$0.6=\frac{3}{5}$，$0.25=\frac{1}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$，$0.75=\frac{3}{4}$，$0.\dot{3}=\frac{1}{3}$；⑤正三角形边长为a，高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，垂心到一顶点距离$\frac{\sqrt{3}}{3}a$，垂心到一边距离，$\frac{\sqrt{3}}{6}a$，面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$；⑥几组勾股数（3,4,5）（6，8，10），（15，20，25）；⑦$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$的近似值。

4．知难而进，不怕麻烦，坚持到底。

有些同学计算中往往因为数"不整齐"、太大或计算过程太繁而失去信心。但成功往往产生于再坚持一下的努力之中。注意培养自己坚持到底的精神和学习毅力，才能在学习中取得最后的胜利。

四、掌握常用的数学方法

初中代数学习中应该重点掌握的数学方法有：配方法，换元法及待定系数法。

1．配方法

将二次三项式ax^2+bx+c变为完全平方式与某一常数之和（或完全平方式）的形式，即$a(x-\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，这种方法为配方法。具体步骤：

① 提取二次项系数；

②加上一次项系数一半的平方同时再减去一次项系数一半的平方；

③根据公式写成完全平方式，同时合并常数项。

配方法在二次三项式、二次方程、二次函数中应用广泛，并且贯穿于初、高中大部分内容，因此配方法在数学中地位十分突出，要掌握好。

例 1　分解因式：x^4+x^2+1。

解：原式 $=x^4+2x^2+1-x^2$（加 x^2 再减 x^2）

$$=(x^2+1)^2-x^2$$

$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x).$$

例 2　化简：$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$。

解：原式 $=\sqrt{8-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$

$$=\sqrt{5+3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

例 3　解方程：$2x^2+5x-1=0$。

解：把方程各边除以 2，得

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

配方 $(x+\frac{5}{4})^2=\frac{33}{16}$,

开方 $x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$,

$\therefore$ $x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}$, $x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}$.

例 4　已知函数 $y=x^2+mx+n$，当 $x=5$ 时有最小值 -2，求 m、n 的值。

解：$y=(x^2+2\cdot\frac{m}{2}x+\frac{m^2}{4})-\frac{m^2}{4}+n$

$$=(x+\frac{m}{2})^2+(n-\frac{m^2}{4}),$$

由题设知$\begin{cases} -\dfrac{m}{2}=5, \\ n-\dfrac{m^2}{4}=-2. \end{cases}$

解得　$m=-10$，$n=23$。

例5　求证当$a\neq b$时，$4^a+4^b-4^{\frac{a+b+1}{2}}$必为正数。

证明：原式$=4^a+4^b-4^{\frac{a}{2}}\cdot 4^{\frac{b}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}$

$$=(2^a)^2+(2^b)^2-2\cdot 2^a\cdot 2^b$$

$$=(2^a-2^b)^2,$$

$\because$　$a\neq b$,

$\therefore$　$2^a-2^b\neq 0$。

$\therefore$　$(2^a-2^b)^2>0$。

$\therefore$　$4^a+4^b-4^{\frac{a+b+1}{2}}$必为正数。

2．换元法

解题中用新的变量去代替原式中的某些量就是换元，用这种方法解题就是换元法。

换元法能化高次式为低次式，化分式为整式，化无理式为有理式等等。

例1　解方程：（1）$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$；

（2）$\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}=2$。

解：（1）设$u=x^2+x$,

原方程变为　$u^2+4u-12=0$。

解得　$u_1=-6$，$u_2=2$，

即　$x^2+x=-6$，$x^2+x=2$，

亦即　$x^2+x+6=0$，$x^2+x-2=0$。

显然，方程$x^2+x+6=0$无实根。解$x^2+x-2=0$，

得　$x_1=-2$，$x_2=1$是原方程的根。

（2）　原方程变形为

$$\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2.$$

设　$\frac{2x}{x+2}=y$，则原方程变为：

$$y+\frac{1}{y}=2.$$

去分母得$y^2-2y+1=0$，

解得　$y_1=y_2=1$，　$\therefore \frac{2x}{x+2}=1$.

解得　$x=2$，经检验是原方程的根。

例2　已知：$\frac{x}{a-b}=\frac{x}{b-c}=\frac{z}{c-a}$（$a$、$b$、$c$各不相等），求证：$x+y+z=0$.

证明：设　$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=t$

$\therefore$　$x=t(a-b)$，$y=t(b-c)$，$z=t(c-a)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad x+y+z&=t(a-b)+t(b-c)+t(c-a)\\&=t(a-b+b-c+c-a)=0.\end{aligned}$$

3．待定系数法

先设出某些未知系数，然后根据所给条件来确定这些未知系数的方法叫待定系数法。

它是数学中常用的一种方法。

例1　已知：$\frac{4x+1}{(x-2)(x-5)}\equiv\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}$，试确定$A$、$B$的值。

解：$\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}$