

张海澜 王秀明 张碧星 著

井孔的 声场和波



科学出版社
www.sciencep.com

井孔的声场和波

张海澜 王秀明 张碧星 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

井孔中的声学问题是声波测井的物理基础,经过长期的研究,逐步形成了一门研究横截面无限大的开的声波导的分支学科——井孔声学。本书讨论的问题包括单极子声源和多极子声源在理想的裸眼井和套管井中产生的声场、贴井壁声源的声场和多相介质及各向异性地层中的井孔声场,侧重介绍问题的物理背景,深入讨论了近年来受到关注的一些测井物理问题,并且着重介绍研究的思想和方法,包括模式分析、射线分析和多种数值计算方法。本书中相当部分的内容是作者近年来的工作成果,同时也选择了一些散见在各种文献中的重要内容。

本书可供声学和测井界的工作者及有关大专院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

井孔的声场和波/张海澜,王秀明,张碧星著.——北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-012849-4

I. 井… II. ①张… ②王… ③张… III. 声波测井-研究 IV. P631.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010561 号

责任编辑:胡 凯 张邦固 彭 斌 姚 晖 / 责任校对:朱光光

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年5月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2004年5月第一次印刷 印张: 17 1/4

印数: 1—2 000 字数: 322 000

定价: 42.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序 言

在石油勘探和开采中，油最终是从井孔抽出来的，测井孔的办法不可或缺。声波方法是测井的一种重要手段，这里指的是应用固体和液体中的声波。井孔声学对声波测井有重要的实际意义，是应用工程中一项重要的理论基础。

多年来，本书作者从声学的角度，结合测井的许多实际问题，跟踪国内外的动态，发展了井孔声学。现在总结长期的科研体会和研究成果，写成井孔的声场和波，我相信本书会在测井工程和声学理论相结合这个特点上体现出显著的价值，可以说，本专著的内容是比较新颖的。我和本书的两位作者同事多年，他们的学术水平都比较高，只期望他们在写作上能深入浅出些。

中国科学院院士

中国科学院声学研究所研究员

应崇福

2003年8月

前 言

声波测井是一种重要的测井方法，在油田勘探和开采、工程物探等许多领域有广泛的应用。为了设计开发有效的声波测井新仪器，为了从声波测井信号中准确地得到井孔和地层的性质，必须深入了解声波在井孔中传播的规律，了解地层和井孔性质对声波传播的影响。近几十年来，声波测井实际应用的需求刺激了这方面的研究迅速发展。而这些研究的发展，加上电子学、计算机技术和信号处理的飞速发展，又大大提高了测井的技术水平。

按照声学的观点，声波在井孔中的传播是一个声波导问题。声波导理论是经典声学的一个重要的组成部分。在声波导研究的历史上对有限大横截面的闭波导研究得比较多、比较透彻，结果比较完整。但是井孔外部是无限大的地层，这种横截面无限大的波导称为开波导。与闭波导相比，开波导问题比较复杂，有许多特殊的性质，历史上的研究也比较少。1970年以来，圆柱形或近似于圆柱形的开波导的声学问题得到了深入的研究，在许多声学 and 地球物理的期刊和会议上发表了许多论文，积累了大量的研究成果。井孔声学(borehole acoustics)这个词也用得越来越广泛，逐步成为声学的一个新的分支。

井孔声学是声波测井的理论基础，国内的许多研究人员在这个领域作了许多有特色的工作。工业部门许多一线的工程技术人员一直很重视这方面的研究，有些还直接参与了这方面的学术研究。本书的作者从20世纪80年代中期进入这个领域，在十多年的研究工作中取得了一些成果，同时在研究工作中我们深感缺少一本比较深入而实用的专著，在和诸多师长和同行交流中发现这是许多人的共同感觉。因此萌发了写本书的念头，希望达到下面几个目的。

首先，本书是关于井孔声学的一本专著。声学是一个比较小的学科，有关知识远不如力学、物理和信息科学那样普及。井孔声学近年来发展迅速，井孔声场的研究往往需要较多的声学知识，但是一直没有一本比较深入而全面的专著。因此我们写这本书，希望能够弥补这个缺陷，帮助读者多了解一些声学的概念。

其次，井孔声学的应用广泛，除了作为传统的石油工业声波测井的理论基础之外，近年来在跨孔勘探、工程物探和矿山勘探等问题中也有应用。井孔声学的研究方法和一般规律对许多和孔有关的声学问题也有参考和借鉴的意义，如锚杆探测、桩基测量和其他一些工业无损检测问题。因此许多实用部门需要了解井孔声学。井孔声学发展很快，内容很多，研究的方法也很多，我们面对大量材料做了认真的筛选，注重问题的物理本质和研究方法，侧重介绍各种重要的研究方法和成果。希望读者了解和掌握了这些方法后，能够把这些一般的规律和方法应用

于各种具体问题。

本书内容的一部分是我们多年来的研究成果，另外也包括许多散见在大量各种文献中的重要结果。虽然我们作了认真的努力，但是限于我们自身的水平和阅历，书中不妥和谬误之处在所难免，希望能够得到读者的赐教。

本书是三位作者共同努力的结果，其中第一到六章和第八章及附录 A~D 主要由张海澜执笔，第十一到十三章主要由王秀明执笔，第七、九、十和十四章及附录 E、F 主要由张碧星执笔。各部分完成以后三位作者又花了一些精力统一全书，使其风格尽量一致。

在本书的写作过程中、作者始终得到导师应崇福院士的支持和鼓励。书中涉及了作者的几项研究工作，这些工作主要是由国家自然科学基金资助的，先后参加这些研究工作的除了三位作者外，还有沈建国、林伟军、王东和张澄宇等人，在此一并表示感谢。

作 者

2003 年 10 月

目 录

序言

前言

第一章 绪论	1
§1.1 声波测井和井孔声学	1
§1.2 声波测井和井孔声学的发展	1
§1.3 本书的内容和结构	4
第二章 刚性壁圆柱流体介质声波导	6
§2.1 声波导中的模式	6
§2.2 点源激发的声场——实轴积分表示	11
§2.3 割线和留数的贡献——模式展开	14
§2.4 单个模式的瞬态分析	15
§2.5 广义射线表示	17
§2.6 计算例子	18
第三章 单极子源的井孔声场	22
§3.1 模型和分析方法	22
§3.2 接收波形	27
§3.3 声场分布	29
§3.4 广义射线	36
第四章 单极子源井孔声场的分析	39
§4.1 井孔的传播模式	39
§4.2 多值性和黎曼面	46
§4.3 割线积分和漏模	50
§4.4 分波贡献	56
第五章 套管井的井孔声场	61
§5.1 套管井孔声场分析方法	61
§5.2 套管井孔的黎曼面	66
§5.3 套管井孔声场的波形	68
第六章 测井仪器对声场的影响	73
§6.1 分析方法	73
§6.2 测井仪器直径的影响	75
§6.3 多单元激发	79

第七章 多极子声源的井孔声场	82
§7.1 多极子声源	82
§7.2 多极子声源在井孔中的声场	85
§7.3 多极子声源声场的分析	88
§7.4 多极子声源激发的波形	90
附录	92
第八章 偏心声源产生的井孔声场	94
§8.1 偏心声源的井孔声场分析方法	94
§8.2 偏心声源产生的声场波形	97
§8.3 偏心声源产生的声场分布	103
第九章 各向异性介质中的井孔声场	111
§9.1 对称轴与井轴平行的横向各向同性弹性固体井孔中的声场分析	111
§9.2 数值算例	113
附录	116
第十章 孔隙介质地层中的声波测井	118
§10.1 孔隙介质的性质	118
§10.2 孔隙介质地层井孔中的声场的分析	121
§10.3 孔隙介质地层井孔中声场的模式和波形	123
§10.4 横向各向同性孔隙介质地层井孔中的井孔声场的分析	132
§10.5 横向各向同性孔隙介质地层井孔中的井孔声场的模式和波形	134
附录	138
第十一章 井孔声场的有限差分模拟	140
§11.1 波动方程交错网格有限差分算法	141
§11.2 有限差分计算的性能	150
§11.3 数值计算例	158
第十二章 圆柱坐标系中的三维有限差分模拟	169
§12.1 圆柱坐标系中的交错网格有限差分算法	169
§12.2 地层的衰减	174
§12.3 径向横向各向同性的地层	176
§12.4 径向横向各向同性地层中多极子声场的有限差分计算	177
§12.5 计算实例	180
附录	185
第十三章 地应力地层中的井孔声场	188
§13.1 地应力引起的地层的各向异性	188
§13.2 非线性声波方程和 2.5 维交错有限差分计算方法	194
§13.3 计算例子	195

§13.4 等效介质模型	197
附录	198
第十四章 微扰法和有限元法在研究井孔模式中的应用	203
§14.1 用微扰法研究与对称主轴不平行的井孔的声场	203
§14.2 基于变分原理的微扰法	208
§14.3 有限元法	212
附录 A 波动方程和贝塞尔函数	217
A1 直角坐标系和柱坐标系中的微分算子	217
A2 波动方程及其在直角坐标系中的解	219
A3 波动方程在柱坐标系中的解和贝塞尔函数	220
附录 B 声波和弹性波方程	225
B1 流体介质中的声波方程	225
B2 固体介质中的弹性波方程	226
B3 柱坐标系中的弹性波方程	229
B4 坡印亭矢量	233
附录 C 群速度	236
附录 D 公式(2.15)和(2.28)的证明	238
附录 E 各向异性弹性介质中的弹性波	242
E1 各向异性介质的弹性波	242
E2 横向各向同性介质的弹性波	244
附录 F 孔隙介质中的弹性波	248
F1 各向同性孔隙介质中的弹性波	248
F2 横向各向同性孔隙介质中的弹性波	256
参考文献	261

第一章 绪 论

§1.1 声波测井和井孔声学

声波测井是一种重要的测井方法，在油田勘探和开采、工程物探等许多领域有广泛的应用。声波测井使用的仪器有许多不同的种类，它们的共同特点是能够发射和接收声波。不同的仪器发射和接收不同类型的声波，达到不同的检测目的。现代的测井技术测量地层和井孔的许多不同的声学参数，结合电磁波、(自然)静电位和放射性等其他测井方法，可以估计井外地层的性质，如地层孔隙度、含水饱和度、渗透率等，也可以分析地层应力，探测地层裂缝，还可以检测套管井中水泥胶结状态，评价固井质量。近代声波测井技术发展很快，在许多工业部门的作用越来越大。

为了设计开发有效的声波测井新仪器，为了从声波测井信号中得到准确的井孔和地层的性质，必须深入了解声波在井孔中传播的规律，了解地层和井孔性质对声波传播的影响。声波测井实际应用的需求刺激了这方面的研究迅速发展。而这些研究的发展，加上电子学、计算机技术和信号处理的飞速发展，又大大提高了测井的技术水平。新的原理和仪器不断出现，测量得到的数据质量不断提高，一方面为实际使用提供了更多更准确的信息，同时对基础研究提出了更高更精的要求。在过去的几十年中，研究和应用相互促进，都在快速地发展。在研究方面积累了大量的研究成果，逐步形成了井孔声学(borehole acoustics)这门分支学科。

通常井孔是一个长圆柱孔，内部是流体。井孔的深度比井孔半径大得多，声波沿着深度方向传播，形成所谓声波导结构。声波导理论是经典声学的重要组成部分，也是井孔声场分析的理论基础。在声波导研究的历史上对有限大横截面的闭波导的研究比较多、比较透彻，结果比较完整。但是井孔外部是无限大的地层，这种横截面无限大的波导称为开波导。与闭波导相比，开波导问题更为复杂困难，有许多特殊的性质，历史上的研究相对比较少。井孔声学的研究对象就是这种带有圆柱形或近似于圆柱形孔的开波导的声学问题，这也是本书的主要内容。

§1.2 声波测井和井孔声学的历史

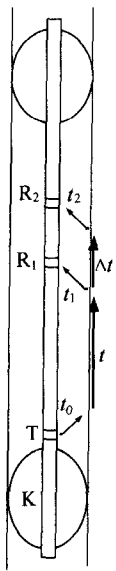
井孔声学的发展和油田的声波测井技术的发展有紧密的联系。声波测井技术在石油工业中的应用已经有半个多世纪的历史。在1971年以前，测井仪器测量井

外地层中纵波在井深方向传播的声速，由此可以划分地层，校正地面物探的结果。另外一项重要的应用是测量地层的孔隙度。岩层的孔隙度对于地层的含油特性至关重要。大量实验和理论证明声波在孔隙地层中传播的纵波速度 v_p 满足 Wyllie 时间平均公式

$$\frac{1}{v_p} = \frac{1-\phi}{v_i} + \frac{\phi}{v_f} \tag{1.1}$$

式中， v_i 和 v_f 分别是地层骨架的纵波速度和孔隙中的流体的声速； ϕ 是地层的孔隙度。在特定的岩层中 v_i 和 v_f 基本不变，因此如果通过测井可以得到地层的纵波声速，就可以得到地层的孔隙度。

图 1.1 是一个早期测井仪器的示意图。仪器是一个细长的圆柱体，用电缆放入井孔。仪器两端有扶正器(图 1.1 中 K)使其居中。仪器上的探头 T 发出声波脉冲，



探头 R_1 和 R_2 接收声波。声波可以通过井孔内外不同的途径传播，因此每个接收探头接收到的是一个复杂的波形。传播时间最短，最先到达接收探头的信号是沿着图 1.1 中用粗线标出的路径(射线)传播的。声波以纵波临界折射角从井内流体入射到井壁，产生的临界折射纵波以地层的纵波速度 v_p 沿井壁传播，同时向井内辐射声波，被 R_1 和 R_2 接收。当时的仪器功能比较简单，只能提取和利用最先到达的临界折射纵波信号，其他有用的信息都丢弃了。图 1.1 中每段路径边的符号表示传播的时间。从图 1.1 可见，如果井径和仪器的位置保持不变，声波从井壁传播到 R_1 和 R_2 的时间相等，即图 1.1 中的 $t_1 = t_2$ ，则 R_1 和 R_2 接收到信号的时间差应该是声波沿着井壁的一小段距离传播的时间差 $\Delta t = \frac{\Delta z}{v_p}$ 。这里 v_p 是临界折射

图 1.1 简单的声波测井仪器的示意图

波传播的速度，也就是地层中的纵波速度， Δz 等于 R_1 和 R_2 之间的距离，是仪器的已知参数。因此根据接收信号的时间差可以确定地层中的声波速度 v_p 。

当两个接收探头之间的井径变化时，从井壁到两个接收探头的传播时间不相等。为了解决这个问题，开发了所谓补偿测井仪器，结构如图 1.2。这种仪器在两个接收探头的上面增加了一个发射探头。当下面的发射探头发射时，两个接收探头接收信号的时差是 $\Delta t + t_2 - t_1$ 。当上面的发射探头发射时，两个接收探头接收信号的时差是 $\Delta t + t_1 - t_2$ 。取两个时差的平均，在液体中传播的时差就能抵消，得到的正是 Δt 。这种补偿测井仪器测量的声速比较准确，得到广泛的应用。

大多数测井仪器在井孔内测到的地层参数和无限大地层中的参数是有差别的, 因此必须对井孔的影响进行校正。但是, 根据简单的射线声学理论, 补偿测井技术测到的声速就是地层的纵波速度, 不能提供进一步校正处理的理论根据和方法。仪器的工作频率往往是根据经验通过实验确定的, 没有严格的理论基础。总的来说, 虽然在将近 20 年的使用过程中仪器的技术水平不断提高, 但是基本的工作原理一直没有大的突破。在井孔声学的研究方面更精确的波动理论的运用在 20 世纪 50 年代就已经开始。1952 年 Biot 首次采用波动理论研究井孔中的传播模式, 研究了伪瑞利波和斯通利波的频散曲线。模式分析是声学研究的基本方法, 它对井孔声场的分析有指导意义。但是限于当时的研究水平, 模式的分析和现场得到的波形还是有距离的, 难于互相对比。当时也不可能根据模式理论对大量实际井孔条件进行计算。因此在这一阶段人们对井孔声场的认识还很肤浅, 基本上只有原则性的了解, 缺乏定量的结果。理论对声波测井的指导意义很有限, 井孔声学的研究和声波测井技术的进展都比较缓慢。

这种情况一直延续到 20 世纪 70 年代。1970 年开始, 电子技术和相关工业技术的发展产生了全波列测井技术, 能够把接收探头收到的整个信号传到地面。当时测井界希望从中得到更多的信息, 特别是地层的横波声速, 因为根据纵波和横波声速可以得到地层的泊松比, 如果知道地层的密度, 还可以得到地层的弹性系数, 这些对于确定地层的特性是非常有用的。开始人们按照从纵波临界折射波提取纵波速度的经验, 试图根据波形的幅度、相位或瞬时频率等参数的变化, 找到横波折射波的到达时间。但是由于先到达的纵波折射波的干扰和横波与模式波的复杂关系, 提取横波折射波的到达时间很困难。人们尝试了许多以相关处理为代表的信号处理方法, 得到的效果有限, 反而发现横波信号和纵波信号的波形和频谱不尽相同, 而这是用射线声学理论难以说明的, 这就促进了井孔声学研究的新的发展。同时计算机和计算技术的迅速发展使进一步的数值研究成为可能。于是从 20 世纪 70 年代开始出现了许多采用离散波数法(也称为实轴积分法)计算不同地层条件下的全波列测井曲线的文献。但是人们很快发现单纯的数值模拟对测井的帮助是有限的, 因为井孔声学是一个复杂的问题, 数值计算的结果提供了不同条件下的测井波形, 但对这些波形的解释几乎和实际测井得到的全波列曲线同样困难。为了分析测井全波列, 20 世纪七八十年代一些研究者采用解析分析和数值计算结合的方法, 促进了理论的发展, 使各种模式波和地层的关系得到了深入的分析, 提出了垂直割线积分路径的概念, 证明了它们和临界折射波的关系。我们在研究工

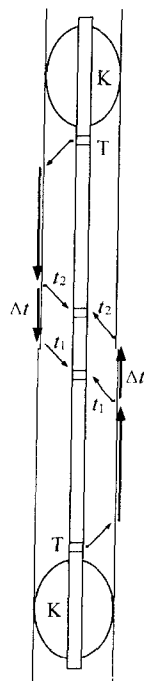


图 1.2 补偿测井仪器示意图

作中计算了高频窄脉冲声源在井孔内外产生的声场在空间的分布(时间切片),得到了直观的物理图像。这些计算结果和声学理论分析相结合,使人们逐步了解了声场中各种波的产生和传播的过程。同时人们认识到,声波测井得到的各种波和没有井孔的地层中的体波还是有差别的,而测井仪器的设计和测井结果的解释必须以深入了解井孔声场为基础。

20 世纪 80 年代以后,数字化传输和处理等先进技术加快了声波测井的发展,继长源距全波列测井仪器后,又出现了用偶极子声源直接测量地层横波的新技术。与此相适应,实轴积分法计算的范围也从单极子声源发展到多极子声源,从井外只有地层的裸眼井发展到包括钢管、水泥层和各种胶结层的套管井。有些文献还研究了各向异性地层和孔隙介质地层中的井孔声场问题。这些工作使人们对理想条件下的井孔声场有了一个比较完整的了解。

从 20 世纪 80 年代到 90 年代,井孔声学向更深入、更实用的方向发展。如果说在 20 世纪六七十年代用实轴积分计算测井波形需要用当时的大型计算机花很多的时间才能完成,因此还带有很强的学术研究色彩,那么由于计算机的发展,到 20 世纪八九十年代这样的计算可以在流行的个人计算机上实现。因此许多实际应用部门甚至个人可以用这样的方法计算大量不同地层和井孔的波形,为实际应用提供系统的参考数据,在实际仪器的设计和资料解释方面真正起到指导作用。

前面提到的研究对象都是比较理想的井孔,但是实际中常常遇到不那么规则的井孔,像井径不规则变化的井孔,地层更复杂的井孔等。这是更为接近实际的问题,但是对于这些问题基于实轴积分法一类的计算方法就无能为力了,必须使用诸如有限元、有限差分、边界元等所谓纯数值的计算方法。这一类问题的研究在 20 世纪八九十年代也有了长足的发展,其中计算机和计算技术的发展起了至关重要的作用。

三维测井问题的研究是这一时期的又一个特点。在这以前计算的井孔声场本质上都是二维的,这是与当时的计算能力相适应的。但这一时期出现的探头紧贴井壁的声波测井仪器激发的声场是三维的,倾斜地层、不规则井孔等一些实际的井孔问题也涉及三维声场问题,而飞速发展的计算机正好使这种需求得以实现。

从井孔声学的发展趋势可以看到,今后井孔声学将继续沿着更深入、更结合实际的方向发展,能够研究更具体的问题。国外这方面的研究重心已从大学移到企业的研究开发机构,国内研究机构和企业之间的协作将会更为密切。

§1.3 本书的内容和结构

本书按照由浅入深的顺序介绍井孔声学的各方面的内容。第二章介绍刚性壁流体圆柱波导的声学问题,这是声学的经典内容,不属于开波导问题。本书通过这个基本的例子,介绍波导的一些基本概念。第三、四两章介绍单极子声源在裸

眼井中激发的声场，这个理想的情况是井孔声学最基本的部分，也是和实际测井密切联系的部分，通过这一部分，希望读者在一开始就对井孔声场有一个清楚的物理图像。在这三章的基础上，第五到七章分别讨论了几种情况的井孔声场。这些内容大约是 20 世纪七八十年代的研究结果。从第八到十章介绍偏心声源的三维声场和各向异性及孔隙介质等复杂地层的井孔声场问题，这些问题更接近实际，也更复杂，大约是 20 世纪八九十年代的研究结果。第十一到十四章介绍有限差分等数值研究方法，这些方法能够研究更复杂、更实际的问题，越来越受到重视。

本书的几个附录是与正文有关的数学、物理、声学的基本内容的简要归纳。把这些内容分离出来作为附录处理的目的，一方面希望复杂的数学公式不要打断读者的思路，另一方面希望读者需要的时候可以方便地查找。根据同样的想法我们把有些章节中复杂的公式作为章的附录，放在章的末尾。

第二章 刚性壁圆柱流体介质声波导

并孔声场分析的理论基础是声波导理论。理论上声波导中的声场有模式展开、实轴积分和广义射线等几种不同的研究方法，它们在本质上是等价的，但是各有特点，适用于不同的研究问题。本章以流体介质的刚性壁圆柱声波导为例子，说明这些基本的概念和原理。刚性壁圆柱声波导的几何形状和边界条件都非常简单，因此它的许多现象可以用解析式进行透彻的分析。同时它的情况与并孔的情况比较接近，因此本章的讨论能为深入分析并孔声场做好准备。

§2.1 声波导中的模式

考虑一个半径为 a 的无限长圆孔，内部充满声速为 v 的流体，孔壁是刚性的。现在研究流体中的声传播，圆孔内部的流体构成一个刚性壁圆柱声波导。建立 $r\theta z$ 柱坐标系， z 轴与圆孔中心轴重合(图 2.1)。本章只考虑轴对称的情况。

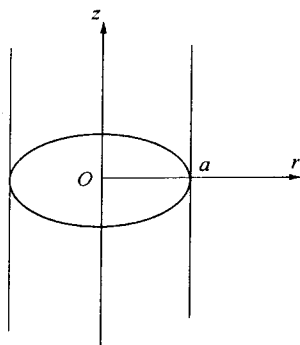


图 2.1 刚性壁圆柱声波导及坐标系

圆孔内流体中的声压满足波动方程，在包含轴线的区域里轴对称的解为(见附录 A)

$$p = J_0(\alpha r) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.1)$$

式中 J_0 是零阶第一类贝塞尔函数， k 是 z 方向的波数， $\omega = 2\pi f$ 是角频率， f 是频率。

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \quad (2.2)$$

式(2.1)的声场是时间的简谐函数，是稳态声场。在下面的讨论中常常略去因子 $\exp(-i\omega t)$ 。

$r = a$ 处的刚性孔壁要求声压对 r 的导数为零

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2.3)$$

即

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} J_0(\alpha r) \right|_{r=a} = -\alpha J_1(\alpha a) = 0 \quad (2.4)$$

一阶贝塞尔函数 J_1 有无穷多个实零点，记作 y_n , $J_1(y_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ，查表可知其中前几个为 $y_0 = 0$, $y_1 \approx 3.8317$, $y_2 \approx 7.0156$, $y_3 \approx 10.1735$ ，当 n 比较大时， $y_n \approx (n + 0.25)\pi$ 。

这些满足 $r = a$ 处边界条件的式(2.1)表示的稳态声场通常被称为模式，或简正模、本征模，记作 p_n

$$p_n = J_0(\alpha_n r) \exp[i(k_n z - \omega t)] \quad (2.5)$$

其中 $\alpha_n = y_n / a$ ，

$$k_n^2 + \alpha_n^2 = \omega^2 / v^2$$

即

$$k_n^2 + \frac{y_n^2}{a^2} = \omega^2 / v^2 \quad (2.6)$$

每一个模式的 k_n 和 ω 满足式(2.6)，称为频散关系。 n 称为模式的阶数。模式满足波动方程和边界条件，它反映波导本身的性质，与声源无关。模式在波导理论中起着关键的作用。

根据上面两式， $\alpha_0 = 0$ ， $k_0 = \pm \omega / v$ ，因此 $n = 0$ 时

$$p_0 = \exp[-i\omega(t \pm z/v)]$$

这是沿 z 轴正负方向传播的平面波。它们的速度就是 v ，没有频散，即速度不随频率变化。以下只考虑沿正 z 轴方向传播的波。当 $n > 0$ 时，每一个模式有一个截止角频率 $\omega_{cn} = \frac{y_n v}{a}$ ，对应着截止频率 $f_{cn} = \frac{y_n v}{2\pi a}$ 。当频率高于截止频率时， k_n 是实数，因此式(2.5)表示沿 z 轴方向传播的波，但它在 z 为常数的截面上振幅不相等，

而依贝塞尔函数变化。当频率低于截止频率时 k_n 是纯虚数 $k_n = i \left(\frac{y_n^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ，式

(2.5)表示沿 z 轴呈指数衰减的声场，称为凋落模。另一个 $k_n = -i \left(\frac{y_n^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 代表

沿 z 轴呈指数增大的声场，是负 z 轴方向的凋落模。

利用截止角频率可以把频散关系改写成

$$k_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{v^2} \quad (2.7)$$

对于传播模可以研究它们的传播速度。由式(2.5)， p_n 声波的相位是 $k_n z - \omega t$ ，因此当时间和距离的变化满足 $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_n}$ 时相位保持不变，即相位的传播速度为

$v_p = \frac{\omega}{k_n}$ ，称为相速度。对于刚性壁圆柱波导利用式(2.7)可得到

$$v_p = v \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{cn}^2}} \quad (2.8)$$

另一个重要的概念是群速度，它是波包(脉冲)传播的速度。这里通过一个简单的例子引进这个概念，对一般情况的讨论放在附录 C 中。

考虑在频率 ω_0 和波数 k_0 附近的两个平面波，它们的频率和波数分别为 $\omega_0 \pm \Delta\omega$ 和 $k_0 \pm \Delta k$ 。由它们组成的波是

$$\begin{aligned} & \exp[i(k_0 - \Delta k)z - (\omega_0 - \Delta\omega)t] + \exp[i(k_0 + \Delta k)z - (\omega_0 + \Delta\omega)t] \\ &= \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \{ \exp[-i(\Delta k z - \Delta\omega t)] + \exp[i(\Delta k z - \Delta\omega t)] \} \\ &= 2 \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \cos(\Delta k z - \Delta\omega t) \end{aligned}$$

式中指数项代表频率 ω_0 和波数 k_0 的平面波，相速度是 $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$ 。它的幅度受余弦

函数的调制，形成波包。由此可见当时间和距离的变化满足 $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ 时调制幅度

不变，即波包的传播速度为 $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ，称为群速度。当 $\Delta\omega$ 和 Δk 很小时，得到 ω_0

和 k_0 处的群速度为 $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ 。对于刚性壁圆柱波导利用式(2.7)可得到

$$v_g = v \frac{\sqrt{f^2 - f_{cn}^2}}{f} \quad (2.9)$$