click gold medal

高中数学

奥林匹克竞赛解题方法大全

主编 周沛耕
王中峰

点击金牌

CLICK GOLD MEDAL

掌握一个解题方法 比做一百道题更重要

山西教育出版社

click gold medal

掌握一个解题方法　比做一百道题更重要

高中数学 奥林匹克竞赛 解题方法 大全

主编　周沛耕　王中峰

编著　周沛耕　王博程

屠新民　沈　杰

章　飞　肖　梁

邹　谨　刘志鹏

李　新　刘锦屏

点击金牌

山西教育出版社

出版宣言

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“竞赛辅导”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，竞赛成绩不理想，这是为什么？

究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好各门功课的根本保证；掌握方法，是攻克奥赛难题的有力武器。只有弄清原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种竞赛，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《点击金牌·中学生奥林匹克竞赛解题方法大全》就是期望为同学们提供最全面、最系

统、最实用、最完备的奥赛解题方法。

——我们以新课标为指导，以“突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能”为宗旨，按照新教材的全部知识点和奥赛的测试范围分类编写。书中既有方法点拨，思维开拓；又有例题分析，针对性的训练。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点评恰到好处。所讲所练虽源于教材，但高于教材，能使你在通向奥赛的道路上取得成功。

——我们时刻关注奥赛前沿动态，收集了大量最新的奥赛信息，为同学们增补了当前最具实战意义的试题；使之成为迄今最为系统、最为实用、最为完整的奥赛解题“教材”。

——我们奉行以学生为本的原则，恳切听取参赛同学的心声，使该书遴选的赛题更具前沿性、针对性和新颖性。

——我们吸收了最新的奥赛教学科研成果，在例题解析中为同学们提供了更多的解题方法，恳望有效激发同学们的创新思维，提高同学们的解题技能。

一分耕耘，一分收获。希望的种子已经播下，让我们共同期待开花结果的时刻吧!

编　者

2004年6月

序

高中阶段的数学教育分为两个方面：一方面是在高中课程内完成的初等数学教学任务，包括函数、方程、不等式、数列、复数、三角函数及离散数学中的计数初步、概率统计初步、微积分初步、解析几何、立体几何、向量初步等．这些知识是为升入大学做准备的，也是未来社会中青年人应知的常识，应当列入国民基本素质教育的范畴．另一方面是在高中课程以外为部分对数学有浓厚兴趣的学生开设的旨在进一步揭示数学的本质，开发学生智力，培养他们顽强、严谨、灵活的治学风气的数学专业课．课内教学的教学对象是全体高中学生，课外教学的教学对象是学有余力又聪明好学的部分学生．

本书以竞赛数学的形式向读者介绍了近年国际国内重大数学赛事中的优秀试题，对每个例题都给予恰当的点评或分析，便于读者领会题目中的教学思想．此外也收入了作者在指导省集训队、国家数学集训队期间使用的优秀例题．本书内容之广、资料之新、讲解之彻是近年同类读物不可比的，它是数学竞赛教练员和准备参加市级、省级、国家级、世界级高中数学竞赛的选手们的必读书．

竞赛数学训练使人灵巧、视野开阔．

例1 圆 $x^2+y^2=8$，点 $A(2,0)$，动点 M 在圆上，O 为原点，求 $\angle OMA$ 的最大值．(见图 1)

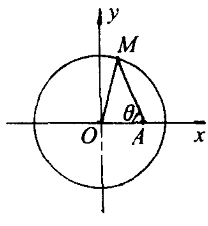

图 1

【解析】 把 $\angle OMA$ 看做某变量的函数，建立函数关系，再求该函数的最大值．谁都会这样想．问题是选哪个量为自变量？

【思路 1】 选 M 的位置变量为自变量，设 $M(2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t)$，根据夹角公式

$$\begin{aligned}\tan\angle OMA &= \frac{k_{AM}-k_{OM}}{1+k_{AM}\cdot k_{OM}} \\ &= \frac{\dfrac{2\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{2}\cos t-2}-\tan t}{1+\tan t\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{2}\cos t-2}\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sin t-\tan t(2\sqrt{2}\cos t-2)}{(2\sqrt{2}\cos t-2)+2\sqrt{2}\sin t\cdot\tan t}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t}.$$

设 $y=\tan\angle OMA$,则 $\sqrt{2}y-y\cos t=\sin t$,

$$y\cos t+\sin t=\sqrt{2}y,$$

$$\sqrt{y^2+1}\cdot\cos(t-\alpha)=\sqrt{2}y.$$

其中 $\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$,$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$,可见

$$\sqrt{y^2+1}\geqslant\sqrt{2}|y|,$$

$$\therefore\quad |y|\leqslant 1.$$

容易看出,取 $t=\frac{\pi}{4}$ 时,$y=1$,$\angle OMA=\frac{\pi}{4}$ 为最大值.

【评述】 容易想,但是不容易算,如果真的是走这条路的话,需要有较强的"算功".

【思路 2】 选 $\angle OAM=\theta$ 为变量.(见图 1)

在 $\triangle OMA$ 中,由正弦定理

$$\sin\angle OMA=\frac{OA}{OM}\cdot\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta.$$

当 $\sin\theta=1$ 时,$\sin\angle OMA$ 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\angle OMA$ 取最大值 $\frac{\pi}{4}$.

【评述】 抓住 OA、OM 为定值的特殊条件,选 θ 为变量来表达 $\sin\angle OMA$,十分轻松.

【思路 3】 延长 MA 交⊙O 于 N,选 MN 为变量.(见图 2)

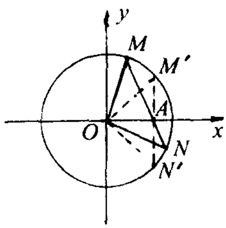

图 2

连接 ON,在等腰 $\triangle OMN$ 中,底边 MN 是过圆内定点 A 的动弦,显然当且仅当 $M'N'\perp OA$ 时 $M'N'$ 最短.

在等腰 $\triangle OMN$ 和 $\triangle OM'N'$ 中,腰长相等,$M'N'\leqslant MN$,因此 $\angle M'ON'\leqslant\angle MON$.

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(180^\circ-\angle MON)\leqslant\frac{1}{2}(180^\circ-\angle M'ON'),$$

即是 $\angle OMA\leqslant\angle OM'A=45^\circ$.

【评述】 当且仅当 $MN\perp OA$ 时 MN 最短,这是个简单的几何常识.这种思路的优点是突破了在 $\triangle OMA$ 中求 $\angle OMA$ 最大值的"视野",在底边变动的等腰 $\triangle OMN$ 中求 $\angle MON$ 的最小值.

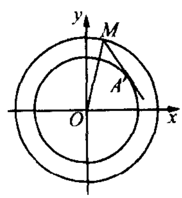

图 3

【思路 4】 由 M 动变成让 A 动.

因为 $OA=2$,$OM=2\sqrt{2}$,均为定值.

固定 O、M,让 A 动.A 在以 O 为圆心 2 为半径的圆上.显然当 A 点位于过 M 作⊙O 的切线的切点 A' 处时,$\angle OMA$ 有最大

值.(如图 3 所示)

在 Rt△ $OA'M$ 中,$OA'=2$,$OM=2\sqrt{2}$,$\angle OA'M=90^\circ$,因此$\angle OMA'=45^\circ$,它是$\angle OMA$ 的最大值.

【评述】 把题目中的动点 M 改换成动点 A,对于发现$\angle OMA$ 的最大值十分有利,这是看问题观点的改变带来的好处.

本题的好的思路还不止这几种,例如还可以考虑 O 到直线 MN 的距离,用这个距离为变量,利用求动弦 MN 的弦心距最大值的方法(想想看,这种思路与思路 3 有什么联系).如果把各种解题思路比较一下,就会发现思路 1 是"牛刀杀鸡"的方法.

例 2 $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$,求证:

$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma\leqslant\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha$.

【证法 1】 不妨设 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$,由

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\gamma-\sin\gamma\cos\alpha\\=&\sin\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\cos\beta-\cos\gamma)+\sin\gamma(\cos\gamma-\cos\alpha)\\=&\sin\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\cos\beta-\cos\gamma)+\sin\gamma[(\cos\gamma-\cos\beta)+(\cos\beta-\cos\alpha)]\\=&(\cos\alpha-\cos\beta)(\sin\alpha-\sin\gamma)+(\cos\beta-\cos\gamma)(\sin\beta-\sin\gamma).\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\alpha\geqslant\cos\beta\geqslant\cos\gamma$,$\sin\alpha\leqslant\sin\beta\leqslant\sin\gamma$,可见 $(\cos\alpha-\cos\beta)(\sin\alpha-\sin\gamma)+(\cos\beta-\cos\gamma)(\sin\beta-\sin\gamma)\leqslant 0$,即

$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma\leqslant\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha$.

【证法 2】 不妨设 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$,构造图形.

考虑以 O 为圆心、1 为半径的圆在第 1 象限中的圆弧.(见图 4)

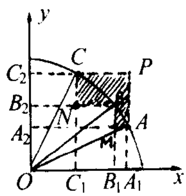

图 4

设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$B(\cos\beta,\sin\beta)$,$C(\cos\gamma,\sin\gamma)$.

作 AA_1,BB_1,$CC_1\perp x$ 轴于 A_1、B_1、C_1;作 AA_2,BB_2、$CC_2\perp y$ 轴于 A_2、B_2、C_2,设 AA_2、BB_1 交于 M,BB_2、CC_1 交于 N,则 M、N 在⊙O 内,设 A_1A、C_2C 的延长线交于 P、P 在圆外,由图 4 可以看出

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cdot\cos\beta=OA_2\cdot OB_1=S_{A_2OB_1M},\\&\sin\beta\cdot\cos\gamma=OB_2\cdot OC_1=S_{B_2OC_1N},\\&\sin\gamma\cdot\cos\alpha=OC_2\cdot OA_1=S_{C_2OA_1P},\\&\sin\alpha\cdot\cos\alpha=OA_2\cdot OA_1=S_{A_2OA_1A},\\&\sin\beta\cdot\cos\beta=OB_2\cdot OB_1=S_{B_2OB_1B},\\&\sin\gamma\cdot\cos\gamma=OC_2\cdot OC_1=S_{C_2OC_1C}.\end{aligned}$$

$\therefore$ $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta-\sin\gamma\cos\gamma$

$= S_{PCNBMA} \geq 0$,

$\therefore \quad \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha \geq \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma$.

【证法 3】 不妨设 $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$,则

$$\sin\alpha \leq \sin\beta \leq \sin\gamma,$$

$$\cos\gamma \leq \cos\beta \leq \cos\alpha.$$

由排序不等式定理知

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma \leq \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha.$$

【评述】 要证的不等式是关于 α,β,γ 的轮换对称不等式,所以允许排序,设 $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. 虽然证法 1 和证法 2 各有优点,但是远不如证法 3 简洁,从题目的数学本质看问题,正是排序不等式,因此证法 3 更好. 根据排序原理,不仅能证出本题中的不等式,还能发现当 $0 < \alpha,\beta,\gamma,\delta < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma + \sin\delta\cos\delta \leq \sin\alpha\cos\delta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta + \sin\delta\cos\alpha$$

等更一般的结果,好的解题方法不仅表现为简洁,还有可能推广命题.

[illegible] 函数 $f(x) = x^2 + ax + b, x \in \mathbf{R}$,求证:$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个值不小于 $\frac{1}{2}$.

【分析 1】 要证 $|a+b+1|,|2a+b+4|,|3a+b+9|$,对任何实数 a、b 而言至少有一个值不小于 $\frac{1}{2}$,即证明不存在实数 a,b,使

$$\begin{cases} |a+b+1| < \frac{1}{2}, \\ |2a+b+4| < \frac{1}{2}, \\ |3a+b+9| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

考虑坐标平面 aOb 内的区域

$$-\frac{3}{2} < a+b < -\frac{1}{2}, \qquad ①$$

$$-\frac{9}{2} < 2a+b < -\frac{7}{2}, \qquad ②$$

$$-\frac{19}{2} < 3a+b < -\frac{17}{2}, \qquad ③$$

由图 5 中明显看出点集①②③无公共点.

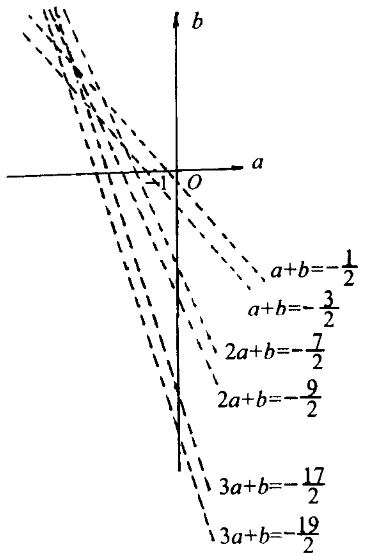

图 5

【分析 2】 把 $f(x)=x^2+ax+b$ 看成 $y_1=x^2, y_2=ax+b$ 之和.

假设 $|f(1)|<\frac{1}{2}$, $|f(2)|<\frac{1}{2}$, $|f(3)|<\frac{1}{2}$ 同时成立,在 aOb 平面内作出 $y_1=x^2, y_2=ax+b$ 的图像.

因为 $1^2=1, 2^2=4, 3^2=9$.

所以 $a+b$ 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,

$2a+b$ 的取值范围是 $\left(-\frac{9}{2},-\frac{7}{2}\right)$,

$3a+b$ 的取值范围是 $\left(-\frac{19}{2},-\frac{17}{2}\right)$.

也就是说函数 $y_2=ax+b$ 的图像必须过点 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 间的无端点的线段,又过点 $\left(2,-\frac{9}{2}\right)$, $\left(2,-\frac{7}{2}\right)$ 间的无端点的线段,还要过点 $\left(3,-\frac{19}{2}\right)$, $\left(3,-\frac{17}{2}\right)$ 间的无端点的线段.

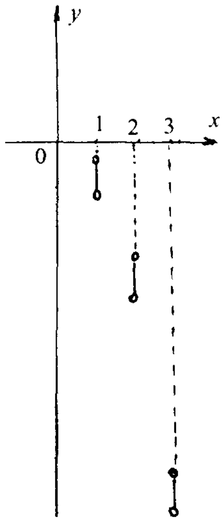

图 6

函数 $y_2=ax+b$ 的图像是直线,而过上述 3 个线段各自取 1 点的任何 3 点都不共线(见图 6),因此 $|f(1)|<\frac{1}{2}$, $|f(2)|<\frac{1}{2}$, $|f(3)|<\frac{1}{2}$ 不可能同时成立.

【分析 3】 $\because \quad f(1)-2f(2)+f(3)$

$$=(a+b+1)-2(2a+b+4)+(3a+b+9)=2.$$

$\therefore \quad |f(1)|+|f(1)|+|f(2)|+|f(3)|\geqslant|f(1)-2f(2)+f(3)|=2$,

可见 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个值不小于 $\frac{1}{2}$.

【分析 4】 函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图像与 $g(x)=x^2$ 的图像形状相同,显然 $g(1)-g(0)=1$.

考虑直线 $x=1, x=2, x=3, x=-\frac{a}{2}$,前 3 条直线中至少有两条在直线 $x=-\frac{a}{2}$ 同侧(可以含直线 $x=-\frac{a}{2}$).不妨设 $x=2, x=3$ 在直线 $x=-\frac{a}{2}$ 右侧.(见图 7)

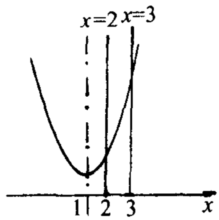

图 7

把函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图像与函数 $g(x)=ax+b$ 的图像比较,则有

$$f(3)-f(2)\geqslant g(1)-g(0)=1,$$

$\therefore\ \left[f(3)-\dfrac{1}{2}\right]+\left[-\dfrac{1}{2}-f(2)\right]\geqslant 0$，可见 $f(3)-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}-f(2)$ 中有非负数，这表明 $|f(3)|$，$|f(2)|$ 中有不小于 $\dfrac{1}{2}$ 的值.

【评述】 分析 1、分析 2 是反证法，分析 3、分析 4 是直接证明的方法，分析 1、2、4 运用了数形结合观点，分析 3 则只用代数不等变形，从繁简角度看问题，分析 3 较简单，从数学本质挖掘程度看问题，分析 4 更突出些. 这个题虽然算不上难题，但是从多角度的分析中能表现出竞赛数学对创新思维、发散思维的价值.

研究竞赛数学可以帮助人们形成科学的思维习惯，使人变聪明.

例4 平面上给定 100 个点，任何三点都不共线，考查以其中任何三点为顶点的所有三角形. 证明：其中锐角三角形不超过 70%.

【分析】 共有 C_{100}^{3} 个三角形，一个三角形一个三角形地分析是不现实的，先考虑较少的三角形.

如果只给定 3 个点，可能是个锐角三角形的顶点；如果只给定 4 个点，可能 4 个三角形中有 3 个是锐角三角形，例如图 8 中的 A、B、C、D，其中 $AB=AC=AD=BD$，$\triangle ABD$，$\triangle ABC$，$\triangle ACD$ 都是锐角三角形.

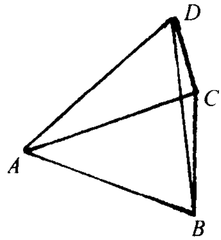

图 8

看来 3、4 数目太少，不能保证“锐角三角形数目不超过 70%”.

考虑 5 个点.

5 个点的凸包有三种：五边形、四边形、三角形.

如果给定 5 点的凸包是凸五边形 $ABCDE$，它的内角中至少有两个钝角，否则五边形内角小于 $180^\circ+4\times 90^\circ=540^\circ$，与五边形内角和是 540° 的事实矛盾.

如果两个钝角相邻，设 $\angle A$，$\angle B$ 是钝角，考查四边形 $BCDE$，它的内角中至少有 1 个不是锐角，设 $\angle CBE$ 不是锐角，这时 $\triangle BAE$，$\triangle ABC$，$\triangle CBE$ 都不是锐角三角形；如果两个钝角不相邻，设 $\angle A$，$\angle C$ 是钝角，考查四边形 $ACDE$，它的内角中至少有 1 个不是锐角，这时仍得到不少于 3 个非锐角三角形.

如果给定 5 点的凸包是凸四边形，则第 5 个点在形内. 设 E 在凸四边形 $ABCD$ 内（见图 9），这时四边形 $ABCD$ 的内角中一定有非锐角. 不妨设 E 在 $\triangle ABC$，$\triangle BCD$ 内，这时 $\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$ 中至少两个是钝角，$\angle BEC$，$\angle CED$，$\angle DEB$ 中也至少两个是钝角，这至少 4 个的钝角中至多两个相同，因此这时至少有 4 个是非锐角三角形.

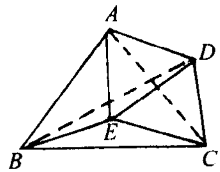

图 9

如果给定 5 点的凸包是三角形，则有两点在该三角形内，设 D、E 在 $\triangle ABC$ 内（见图 10），则 $\angle ADB$，$\angle BDC$，$\angle ADC$ 中至少有两个不是锐角，$\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$ 中至少有两个不是锐角，这时至少有 4 个非锐角三角形.

综上分析，平面上给定 5 点，无三点共线时，以任何三点为顶点的三角形中非锐角三角形至少有 3 个，因此锐角三角形至多有 $C_5^3-3=7$ 个，锐角三角形至多占 70%.

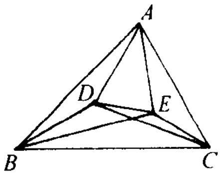

图 10

问题是 100 个点，不是 5 个点，以 5 点组为基础推算一下锐角三角形的个数.

100 个点中的 5 点组有 C_{100}^5 个，三角形个数有 C_{100}^3 个.

考虑一个非锐角三角形，包含这个三角形顶点的 5 点组有 C_{97}^2 个，去掉重复计数的影响，100 个点形成的非锐角单独的三角形至少有 $\frac{3C_{100}^5}{C_{97}^2}$ 个，它们占所有三角形数目的比至少是

$$\frac{3C_{100}^5}{C_{97}^2}\div C_{100}^3=\frac{3}{10}.$$

因此锐角三角形至多占 70%.

【评述】 5 点组是基础，这是“退”的思想，著名数学家华罗庚先生经常倡导“要敢于退，足够地退，退到最简单情形，把问题弄清楚后再进”.

这本书要慢慢地读，解题时要多总结、多思考，尽量找出与书中介绍的解法不同的解法，尽量体察题目中的数学本质，有的题目可以隔些时日再做一遍，把本书读两遍后你的能力就会有较大的提高.

这本书既是写给指导数学竞赛的教练员的，也是写给准备数学竞赛的同学们的，应该在学好课内数学知识的基础上研究本书.

参加本书写作的都是全国知名的中青年数学骨干教师，他们有丰富的指导数学竞赛的经验，他们和中学生的实际最贴近，因而对学生的帮助会更大.

编者

2004 年 4 月于北大附中

目录

序

第一部分 题 型 介 绍

第一章 代数

第二章 几何

(一)平面几何

第四章　初等数论

第二部分 实战训练

第一部分

题型介绍

第一章　代数

一、集合概念及集合上的运算

赛题精讲

Ⅰ.集合中待定元素的确定

充分利用集合中元素的性质和集合之间的基本关系，往往能解决某些以集合为背景的高中数学竞赛题.请看下述几例.

例1　求点集$\{(x,y)\mid\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\}$中元素的个数.

【思路分析】　应首先去对数将之化为代数方程来解之.

【略解】　由所设知 $x>0,y>0$ 及 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy$，

由平均值不等式，有

$$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant3\sqrt[3]{(x^3)\cdot\left(\frac{1}{3}y^3\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)}=xy,$$

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$（虚根舍去）时，等号成立.

故所给点集仅有一个元素.