吉林大学研究生立项教材

运筹学

OPERATIONS RESEARCH

郭立夫 主编

吉林大学出版社

吉林大学研究生立项教材

运　筹　学

郭立夫　主　编
赵玉娟　副主编

吉 林 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学／郭立夫主编．一长春：吉林大学出版社，
2002.8
ISBN 7-5601-2743-6

Ⅰ．运... Ⅱ．郭... Ⅲ．运筹学－高等学校－教材
Ⅳ．022

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第053135号

责任编辑：杨　枫
封面设计：孙　群
联系电话：0431-5661152
　　　　　0431-5661101

运筹学

郭立夫 主编

吉林大学出版社出版发行
（130021 长春市明德路3号）
吉林大学教育印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 20.375印张 447千字
2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
ISBN 7-5601-2743-6/O·278
定价：30.50元

前　言

运筹学是近五十年才发展起来的新兴学科，现在它已经成为经济计划、系统工程、现代管理等各个领域的强有力的工具。

自 1978 年以来，我国有关院校的经济管理类专业普遍开设了运筹学课程，运筹学是这类专业的重要基础课程。

本书分为两篇，第一篇运筹学是根据国家教委 1996 年《运筹学》教学大纲征求意见稿编写的。内容包括：线性规划、整数规划、动态规划、图论与网络分析、决策论、排队论六个部分，本篇既可作为工商管理硕士（MBA，EMBA）及工业工程硕士教材，也可作为管理工程类，工商管理类本科教材。授完本篇约需 70—80 学时。第二篇高等运筹学，是运筹学的后继课程，本篇是按管理类硕士研究生的《运筹学Ⅱ》教学大纲编写的。该篇可作为管理类硕士研究生的教材，授完本篇需 40 学时。内容包括：大规模线性规划的算法、非线性规划、多目标规划、对策论、马尔可夫过程及应用五个部分。本书最后是附录“Excel 与规划求解。”该部分介绍了采用 Excel 求解单变量方程、线性规划、无约束极值、非线性规划的解法。

各类学校可根据不同的学时数，在内容上有所取舍。

本书的使用对象是经济管理类专业的学生。内容安排上注意“模型的建立”和“应用举例”，强调培养学生实际应用能力。在讲法上力求深入浅出，通俗易懂，不仅便于在校学生学习，而且使各类在职人员易于自学。

书中各章后面附有习题，读者可以从中选取适量习题作为练习，以便更好掌握所学内容。

参加本书编写的有郭立夫、赵玉娟、李时、刘春山、张晓瑞等同志。郭立夫、赵玉娟担任主编。

本书得到了吉林大学研究生教材建设基金的资助，在此表示深深感谢。

本书虽然是在多年使用的讲义基础上编写的，但是限于我们的水平，书中不妥和错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

二〇〇二年八月

绪　论

运筹学(Operations Research 缩写 OR)是管理专业所必修的一门主要课程,也是许多其他专业的基础课。在现代化的管理中,运筹学正起着日益重要的作用。

运筹学这门新兴的学科是第二次世界大战期间在英国首先出现的。当时雷达刚刚发明,但是在开始使用时却不能很好地和高炮配合。为了帮助参谋人员研究新的反空袭雷达控制系统,1940 年 8 月在得过诺贝尔奖金的物理学家布莱克特(P. M. S. Blackett)教授领导下建立了一个研究小组。这个特殊的小组第一次应用了 Operational Research 这个名词,意思是军事活动研究。当时这个小组包括有物理学家、数学家、生理学家、天文学家、军官等人,研究工作从空军扩展到海军和陆军。不久美国也建立了类似的小组,但称之为 Operations Research。第二次世界大战期间,这方面的研究成功地解决了许多非常复杂的战略和战术问题。他们研究了飞机出击的时间和队形、商船护航的规模、水雷的布置、对深水潜艇的袭击以及战略轰炸等大量问题,都取得了异常显著的效果。

第二次世界大战以后,从事这项活动的许多专家转到了经济部门、民用企业、大学或研究所,研究在民用部门应用类似方法的可能性,因而促进了运筹学有关方法的研究和实践。运筹学作为一门学科逐步形成并开始迅速地发展。

运筹学虽然是一门新兴的学科,但是这项技术的思想方法在我国古代就有过不少的记载,例如齐王赛马。

齐王赛马的故事是说:齐王和田忌赛马,双方各自出上、中、下三个等级的马各一匹。当时齐王的马比田忌的马强一些。可是田忌用下马对齐王的上马,用中马对齐王的下马和用上马对齐王的中马。结果田忌二胜一负,以劣胜优。可见古人早就研究过对策方法了。

尽管某些朴素的运筹思想在国内和国外的历史中都可以找到不少的记载,但作为一门科学来研究,则还是近几十年来的事。我国从五十年代开始引进现代运筹学理论后,四十年来得到了迅速的发展。现在不仅全国各地成立了各种运筹学会或运筹学专业组,还在许多理工科大专院校中普遍开设运筹学课程。

英文"OR"一词,直译是"作业研究"。中国科学工作者从《史记・高祖本记》书中,"夫运筹于帷幄之中,决胜于千里之外"一语中,摘取"运筹"一词作为 OR 的意译,其含义是运用筹划,出谋献策,以策略取胜等。比较确切地反映了 OR 一词的内涵。

运筹学这门学科的历史比较短。在某种意义上说,还不象其他学科那样成熟和定型。就运筹学的定义来说,就有各式各样大同小异的定义。

运筹学权威人士丘奇曼(Churchman)认为:运筹学是"运用科学的方法、技术和工具来处理一个系统运行中的问题,使系统的控制得到最优的解决方法"。

英国运筹学会认为:"运筹学是把科学方法应用在指导和管理有关的人员、机器、物资以及工商业、政府和国防方面资金的大系统中所发生的各种问题。其独特的方法是发展一个科学的系统模式,列入随机和风险等各种因素的尺度,并运用这个模式预测和比较各种决策、战略并控制方案所产生的后果。其目的是帮助主管人员科学地决定方针和政策。"

美国运筹学会认为:"运筹学所研究的问题,通常是在要求分配有限资源的条件下,科

学地决定如何最好地设计和运营人机系统。”

其他对运筹学的提法还有“应用的科学”、“定量化的常识”、“决策的科学方法”、“管理的数学方法”等等。负责英国运筹小组的布莱克特教授则称他的工作是“作业的科学分析”。我国对运筹学也有很多不同的提法，例如有的把运筹学看作是指“运用系统的科学方法，经由模型的建立与测试以便得到最优的决策”。有的学者把运筹学看做是系统工程的前身，有的则认为是许多定量管理方法的总称。

我国最近出版的管理百科全书中有关运筹学这个名词的词意是这样写的：

“运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。”并指出它是一门应用科学。但是除了经济管理领域之外，在其它领域中运筹学也是适用的。

运筹学是一门新兴的学科，从40年代出现到现在，在内容上有很大的发展。以《运筹学国际文摘》收集编写的各国运筹学论文的内容为例，按技术分类就有50多种，主要有：决策论、对策论、图论、信息论、马氏过程、网络、各种规划论（凸规划、分数规划、几何规划、目标规划、整数规划、线性规划、非线性规划、参数规划、二次规划、运输规划等）、排队论、动态规划、模拟、统计回归、随机过程、时间序列分析等等。还有人工智能，模糊数集，成本效益分析，数值分析，优化理论，控制过程，有限元分析等等。可见在运筹学名称下所包括的内容是极为丰富的。

应用运筹学解决问题的过程，实际上就是一个决策的过程。它的核心问题是建立模型。

运筹学模型具有两个非常重要的特点：一是要尽可能简单，二是要能完整地描述所研究的系统。建立模型时，一定要以科学的态度弄清楚问题中涉及的各种因素，并且用科学的语言即模型表达出来。这就要求对表示各种因素的变量，假设出一个关系式来，或者说建立一个数学模型。模型要能代替现实供我们分析研究。模型不仅要将有关的各种因素按它们的相互影响关系加以描述，还要对可能采取的行动的结果进行评价。建立模型时有时需要对许多因素都作深入的描述和评价，有时可以只对其中一部分作一般的探讨。这在开始建立模型时往往是不易判断的。一般说来建立的模型要尽量简单，只要适合所要研究的问题就行。有时过于详细的模型可能给分析计算带来很多困难，反过来有时过于简单的模型则所得到的结果又不现实可行。所以选择什么样的模型和确定建立模型的范围并不是很容易的，往往需要有丰富的经验和熟练的技巧。运筹学是以运用科学的方法来解决大系统管理中出现的复杂问题为目的，要真正把问题解决好，往往先把复杂的问题中最关键的因素抽象成简单的问题，通过对简单问题的求解，再把问题深化。这样才能从简单到复杂，系统而科学地解决管理中面临的各种问题。

运筹学模型一般由两个部分组成。

1. 都有一个明确的目标，这个目标就是从众多的可行方案中挑选出一个最优方案，所以有人给运筹学下了这样一个定义：“运筹学是为决策者提供最优决策的一种数学方法”。这种说法是有一定道理的。

2. 用来表达目标的变量（称为决策变量）都要受一组条件的约束（称为约束条件），它反映了问题本身所受到的客观条件的限制。

因此，运筹学模型大都表示为求一组决策变量，在一组约束条件下，使某一(或某些)目标达到最优。

运筹学作为一门应用科学，有以下一些特点：

1. 多种专家的协作。运筹学从一开始就是由许多知识专长不同的集体努力而取得成果的。这是由于运筹学推广应用的领域非常广泛，而具备了运筹学知识的人又不可能对各个知识领域都很精通，这就需要有各方面专家的集体智慧协作努力。当然配合运筹学专家的各方面专业人才也应具备一定的运筹学基本知识。

2. 从系统的观点来解决问题。在一个系统中，任何一部分的活动总对会其它部分的活动产生影响。因此，当问题之间互相紧密制约时，不能简单孤立地分别考虑其解决办法，而必须全面考虑它们之间的相互作用，单个问题的最优解，对于整个系统未必是最优的。

3. 采用科学方法并使用模型。运筹学是用来解决管理中面临的问题的，运筹学总是从实际情况出发建立一个合适的模型来分析研究实际问题。

4. 需要电子计算机。运筹学模型并不是都要用很复杂的数学方法，而是较多地用简单的数学方法进行大量类似的重复计算，因此它是离不开计算机的。计算机的发展推动了运筹学的发展，反过来，运筹学的发展也扩大了计算机的应用。

运筹学发展到现在虽只有五十多年历史，但是内容已相当丰富，应用范围非常广泛，并且还处在不断发展中，新的思想，观点和方法不断地出现。本书作为一本教材，所提供的运筹学思想和方法都是基本的，是作为学习运筹学的读者所必须掌握的基本知识。

目　　录

第二篇 高等运筹学

第一篇　运筹学

第一章　线性规划与单纯形法

线性规划 (linear programming)是运筹学最重要的分枝。自 1947 年美国人丹捷格(G. B. Dantzig)提出求解线性规划的单纯形法以来，它在理论上趋向成熟，实际上的应用日益广泛与深入，现在几乎各行各业都可以建立线性规划模型。比如制定企业最佳经营计划、确定产品最优配料比、寻找材料的最优下料方案、研究各种资源的最优分配方案等等。由于线性规划模型具有应用的广泛性，计算技术比较简单，更主要由于它易于在计算机上实现它的算法，所以，线性规划已成为现代管理科学的重要基础和手段之一。

§1　线性规划问题

1.1　线性规划问题的数学模型

线性规划是研究在一组线性不等式及等式约束下，使得某一线性目标函数取得最大(或最小)的极值问题。下面我们通过几个例子来介绍线性规划问题的数学模型。

例 1. 某工厂生产Ⅰ，Ⅱ两种型号计算机，为了生产一台Ⅰ型和Ⅱ型计算机，所需要原料分别为 2 和 3 个单位，需要的工时分别为 4 和 2 个单位。在计划期内可以使用的原料为 100 个单位，工时为 120 个单位。已知生产每台Ⅰ、Ⅱ型计算机可获利润分别为 6 和 4 个单位，试确定获利最大的生产方案。

这是一个非常简化的实际问题，为了解决这个问题，我们先来建立该问题的数学模型。

设 x_1, x_2 分别表示计划期内产品Ⅰ，Ⅱ的产量。因为计划期内生产用的原料和工时都是有限的，所以在确定产品Ⅰ，Ⅱ的产量时要满足下面约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 \\ x_1, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

一般满足上述约束方程组的解不是唯一的，根据题意我们需要的是既满足约束条件，又使得所获利润最大的生产方案。若以 Z 表示总利润，我们的目标是：$\max Z=6x_1+4x_2$

综合上述，该问题可用数学模型表示为：

目标函数　$\max Z=6x_1+4x_2$

约束条件 $\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 \\ x_1\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$

例 2　某昼夜服务的公交线路每天各时间区段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时间	所需人数
1	6:00—10:00	60
2	10:00—14:00	70
3	14:00—18:00	60
4	18:00—22:00	20
5	22:00—2:00	20
6	2:00—6:00	30

设司乘人员在各时间段一开始时上班，并连续工作八小时，问该公交线路至少应配备多少司乘人员。列出该问题数学模型。

设 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_6$ 为各班新上班人数，考虑到在每个时间段工作的人数既包括该时间段新上班的人又包括上一个时间段上班的人员，按所需人员最少的要求可列出本例的数学模型。

目标函数 $\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

$$
\text{约束条件} \begin{cases} x_1 + x_6 \geqslant 60 \\ x_1 + x_2 \geqslant 70 \\ x_2 + x_3 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 20 \\ x_4 + x_5 \geqslant 20 \\ x_5 + x_6 \geqslant 30 \\ x_1\ x_2 \cdots x_6 \geqslant 0 \end{cases}
$$

上面两例都是一类优化问题，它们具有下述特征：

(1)每个问题都用一组未知变量 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 表示所求方案，通常这些变量都是非负的。

(2)存在一组约束条件，这些约束条件都可以用一组线性等式或不等式表示。

(3)都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知量的线性函数，称为目标函数。目标函数可以求最大也可以求最小。

具有上述特征的问题称为线性规划问题。线性规划问题的数学模型形式如下：

目标函数 $\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

$$
\text{约束条件} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant (\overset{\geqslant}{=}) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leqslant (\overset{\geqslant}{=}) b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leqslant (\overset{\geqslant}{=}) b_m \\ x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n \geqslant 0 \end{cases}
$$

1.2 图解法

如何求解线性规划模型是本章讨论的中心问题，为对求解线性规划的解法有个直观的启迪，首先介绍只有两个变量的线性规划的图解法。

例 1 的模型中仅包含两个变量，所以能在平面直角坐标中将满足约束条件的点表示出来。约束条件 $2x_1+3x_2\leqslant 100$，$4x_1+2x_2\leqslant 120$ 都代表包括一条直线的半个平面，考虑到 $x_1,x_2\geqslant 0$，所以满足所有约束条件的点应在坐标系第一象限两个半平面交成的公共区域 $OQ_1Q_2Q_3$ 内，称该区域为可行域。

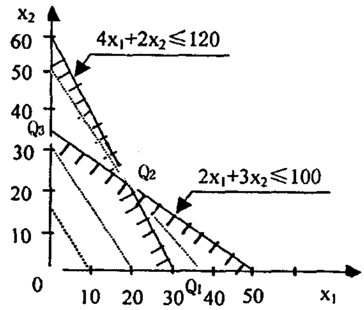

图 1－1

满足约束条件的点称为可行解。例 1 的可行解就在凸多边形 $OQ_1Q_2Q_3$ 的边界及其内部上(见图 1－1)显然该可行域包含无穷多个可行解，为了在这无穷多个可行解中找到最优解，我们在坐标系中画出目标函数表示的一族平行线。观察这族平行线移动时对应的 Z 值变化可以看出，这族平行线愈向右上方移动，对应 Z 值愈大。由于平行线族在 Q_2 点脱离可行域，所以例 1 在 Q_2 点取得最优解。Q_2 是 $2x_1+3x_2=100$ 和 $4x_1+2x_2=120$ 的交点，解方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=100\\4x_1+2x_2=120\end{cases}$$

得

$$x_1=20,x_2=20$$

因此例 1 的解是：生产Ⅰ型Ⅱ型计算机分别为 20 台，能得到最大利润为 200 单位。

从图解法可以看出在一般情况下

1°具有两个变量的线性规划问题的可行域是凸多边形。

2°若线性规划存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到。

上例中得到问题的最优解是唯一的，但是线性规划问题的解还可能出现以下几种情况：

(1)无穷多个最优解。 若例 1 的目标函数变为 $\max Z=4x_1+2x_2$，则当目标函数对应的一族平行线向右上方移动时，Z 值不断增大，最终脱离可行域时将与边界 Q_1Q_2 重合，所以线段 Q_1Q_2 上所有点都使目标函数取得最大值，这时问题具有无穷多个最优解。(见图 1－2)

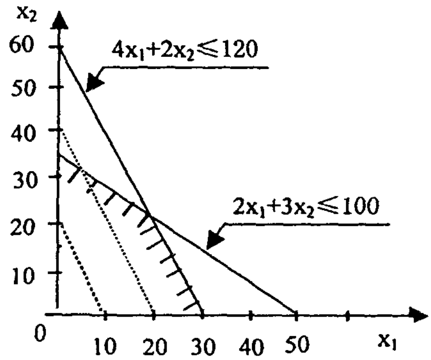

图 1－2

(2)**无可行解**。如果约束中存在相互矛盾的约束条件，则导致可行域是空集，此时问题无可行解(见图 1－3)。

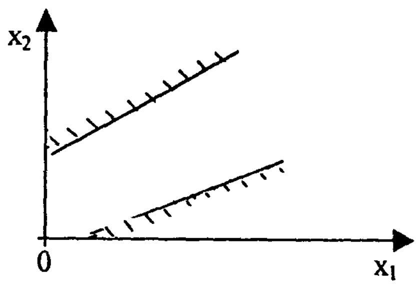

图 1－3

(3)**无有限最优解**。对下述线性规划问题

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1 x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解求解结果见图 1－4　从图中可以看出可行域无界，而且在可行域中找不到最大值点，目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无有限最优解或无界解。

从以上图解法可知线性规划的解可能有 4 种情况，其中有唯一最优解和多个最优解是常见的情况。无可行解往往是由于模型的约束中存在相互矛盾的约束条件造成的，而无有限最优解往往是由于缺少必要的约束条件。

用图解法只能求解含有 2 个变量的问题，作为算法，它没有实际价值。但是利用图解法我们可以直观地了解到线性规划的几种情况，更重要的是在一般情况下，可行域是凸多

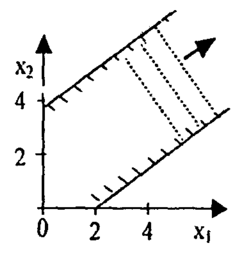

图 1－4

边形，最优解可以在凸多边形有限个顶点中间取得。这一结论将搜索最优解的范围从可行域中的无穷多个点缩小到有限几个点。我们后面将把这一结论推广到一般的多维线性规划上。

§2. 线性规划问题的标准型与解的概念

2.1 线性规划标准型

线性规划的数学模型中，目标函数既可以是求最大值，又可以是求最小值，约束条件既可以是不等式，又可以是等式，这种多样性给讨论线性规划的解法带来诸多不便。为此我们规定线性规划标准型如下：

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1\quad x_2\cdots x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

通常我们称 c_j　$j=1,2\cdots n$ 为价值系数，b_i　$i=1,2\cdots\cdots m$ 为资源系数，a_{ij}为技术系数，或约束系数，在模型中它们是常数。

若记　$x=(x_1\ x_2\cdots x_n)^T$　　$c=(c_1\ c_2\cdots c_n)$

$$b=(b_1\ b_2\cdots b_m)^T\quad A=(P_1P_2\cdots P_n)=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\qquad\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

则标准型亦可记作

$$\max Z=cx$$

$$\begin{cases} Ax=b \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

或

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}p_jx_j=b \\ x_j\geqslant 0\quad j=1,2,\cdots n \end{cases}$$

任何形式的线性规划都可以变为与其等价的标准形式。

(1)如果目标函数是 $\min Z=cx$，则可令 $\bar{Z}=-Z$　将目标函数变为 $\max\bar{Z}=-cx$。

(2)如果某约束为不等式形式，例如

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2++a_{in}x_n\leqslant b_i$

则在约束的左端加一个非负变量 x_{n+i}即可将约束变为

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2++a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i$

这个非负变量 x_{n+i}称为松弛变量。

同理如果约束为“$\geqslant b_i$”形式，则可在约束的左端减一个非负变量 x_{n+i} 而将约束变为等式。称 x_{n+i} 为剩余变量或松弛变量。

(3)如果 x_j 没有非负限制，则可令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中 $x_j'、x_j''\geqslant 0$，代入目标及约束中。

例 3　将下面线性规划化为标准型

$$\min Z=3x_1-x_2$$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 1\\ x_1-x_2\geqslant -1\\ x_1\geqslant 0\end{cases}$$

解：令 $\bar{Z}=-Z$　　　$x_2=x_2'-x_2''$

则标准型如下：

$$\max Z=-3x_1+x_2'-x_2''$$

$$\begin{cases}x_1+x_2'-x_2''+x_3=1\\ x_1-(x_2'-x_2'')-x_4=-1\\ x_1,x_2',x_2'',x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

2.2　线性规划解的概念

为了帮助我们分析线性规划求解过程，先介绍线性规划解的概念。

$$\max Z=cx \qquad (1)$$

$$(L)\begin{cases}Ax=b & (2)\\ x\geqslant 0 & (3)\end{cases}$$

对于问题(L)我们有如下概念

可行解：满足(2)　(3)的解。

可行域：可行解的集合。一般记作 $D=\{X|Ax=b,x\geqslant 0\}$

最优解：满足(1)的可行解。

基：设 A 是 $m\times n$ 阶系数矩阵($m\leqslant n$)，秩 $A=m$

$A=(p_1,p_2\cdots p_n)$，则 A 中一定存在 m 个线性无关的列向量，称由 m 个线性无关的列向量构成的可逆矩阵 $(p_{j1},p_{j2}\cdots p_{jm})=B$ 为(L)的一个**基**，称与 B 中的列向量对应的变量 x_{j1} $x_{j2}\cdots x_{jm}$ 为**基变量**，其余变量称为**非基变量**。

基本解：记基变量为 $x_B=(x_{j1}\ x_{j2}\cdots x_{jm})^T$，称满足方程组

$Bx_B=b$ 的解：$x_B=B^{-1}b$　　其余 $x_i=0$　为(L)的一个基本解。

基可行解：若 B 对应的基本解　$x_B=B^{-1}b\geqslant 0$，则称该解为基可行解，称 B 为**可行基**。容易验证基可行解一定是可行解，我们后面将指出基可行解是可行域中特殊的解。

例 4　求出下面线性规划的所有基本解，并指出那些是基可行解。

$$\max Z=2x_1+x_2$$

$$\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 15\\ 6x_1+2x_2\leqslant 24\\ x_1\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：标准化得