



普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书

张 艳 王晓静 程士珍 编著

线性代数

(第二版)

金牌辅导

章	节	要	点
难	点	解	析
习	题	详	解
活	学	活	用

中国建材工业出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书

线性代数(第二版)

金牌辅导

张艳 王晓静 程士珍 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第二版)金牌辅导/张艳等编著. —北京:
中国建材工业出版社, 2004. 11
(普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书)
ISBN 7-80159-745-1

I. 线… II. ①张… III. 线性代数—高等学校
—教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 101678 号

内 容 提 要

本书是根据普通高等教育“十五”国家级规划教材的教学基本要求, 作为线性代数课本的辅助教材而编写的. 内容包括矩阵、行列式、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值、特征向量与二次型、线性空间与线性变换. 每一章均在简要总结基本内容的基础上, 通过典型例题的分析, 介绍线性代数解题方法及技巧. 每一章都附有《线性代数》教材的习题解答和活学活用的例题.

本书可作为高等院校的习题课教材, 也可作为科研人员的辅导教材, 亦可作为自学《线性代数》人员的参考材料.

线性代数(第二版)金牌辅导

张艳 王晓静 程士珍 编著

出版发行: 中国建材工业出版社

地 址: 北京市西城区车公庄大街 6 号

邮 编: 100044

经 销: 全国各地新华书店

印 刷: 北京鑫正大印刷有限公司

开 本: 850mm × 1168mm 1/32

印 张: 7.5

字 数: 194 千字

版 次: 2004 年 11 月第一版

印 次: 2004 年 11 月第一次

书 号: ISBN 7-80159-745-1/G·137

定 价: 11.00 元

网上书店: www.ecool100.com

本书如出现印装质量问题, 由我社发行部负责调换. 联系电话: (010) 88386904

前 言

为了加深对线性代数课程内容的理解,提高学生综合分析和灵活运用能力,以进一步提高教学质量,我们编写了《线性代数(第二版)金牌辅导》一书.本书依照普通高等教育“十五”国家级规划教材《线性代数(第二版)》的内容,按六章编写.每一章包括四部分内容:

- 一、章节要点;
- 二、难点解析;
- 三、习题详解;
- 四、活学活用.

每一章的章节要点是对教材中该章内容的总结;难点解析部分大多选自线性代数中的典型例题,通过对典型例题的分析,介绍线性代数中基本解题方法及解题技巧;习题详解给出了“十五”国家级规划教材《线性代数》(第二版)全部练习与习题的详尽题解,对于具有多种解法的题目,由于解题方法不唯一,希望读者不要被提示所限制;活学活用中所介绍的例题多是对本章解题方法和技巧的灵活运用,希望读者可以通过它们提高举一反三的能力.

由于水平所限,加之时间仓促,难免有错误及不妥之处,恳请读者多提宝贵意见.

编者

2004.8

目 录

第一章 矩阵	1
章节要点	1
难点解析	4
习题详解	8
活学活用	27
第二章 行列式	30
章节要点	30
难点解析	35
习题详解	42
活学活用	63
第三章 向量组的线性相关性	66
章节要点	66
难点解析	69
习题详解	78
活学活用	94
第四章 线性方程组	97
章节要点	97
难点解析	101
习题详解	119
活学活用	144

第五章 特征值、特征向量与二次型	146
章节要点	146
难点解析	151
习题详解	168
活学活用	199
第六章 线性空间与线性变换	203
章节要点	203
难点解析	207
习题详解	219
活学活用	232

第一章 矩 阵

【章节要点】

一、矩阵的概念

1. 定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 当 $m = n$ 时, A 也称为 n 阶方阵.

2. 几类特殊矩阵

(1) 单位矩阵: 主对角线上元素都是 1, 其余元素全为零的方阵称为单位矩阵, 记为 I .

(2) 对角矩阵: 主对角线上元素为任意常数, 而主对角线外的元素都是零的矩阵.

(3) 三角矩阵: 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角形矩阵; 主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角形矩阵, 上、下三角形矩阵统称三角矩阵.

(4) 矩阵的转置: 将矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行与列的元素互换后得到的矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记为 A' 或 A^T .

(5) 对称矩阵: 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 即 $A' = A$, 则称 A 为对称矩阵. 如果 $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 即 $A' = -A$, 则称 A 为反对称矩阵.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的相等: 相等的矩阵必须具有相同的行数与列数, 两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 相等是指对应位置上的元素分别相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). 记作 $A = B$.

2. 矩阵的和与差: 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 定义 $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

3. 数乘矩阵: 数 k 与矩阵 A 相乘定义为 $kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$.

4. 矩阵乘法: 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$ 与 $B = (b_{ij})_{s \times n}$, A 与 B 的乘积定义为 $C = AB = (C_{ij})_{m \times n}$, 其中 $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}$.

5. 方阵的幂: 对方阵 A , 定义 $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个 } A \text{ 相乘}}$, 称为 A 的 k 次幂.

三、方阵的逆阵

1. 定义: 对给定的方阵 A , 如果存在方阵 B 使 $AB = I = BA$, 则称 A 为可逆矩阵, B 称为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

2. 性质: (1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 唯一;

(2) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(3) 若 $k (\neq 0) \in R$, A 可逆, 则 kA 也可逆, 且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$;

(4) 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(5) 若 A 可逆, 则 A' 也可逆, 且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

3. 计算: 用初等变换求逆矩阵, 即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \mid I)$ 施行初等行变换, 当把 A 变成单位矩阵 I 时, 原来位置的 I 就变成 A^{-1} .

四、矩阵的分块

进行分块矩阵的加、减、乘法与转置运算时,应将子块当作通常矩阵的元素看待.

设 A 为分块对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

如果 $A_{ii} (i=1,2,\cdots,k)$ 都可逆,则 A 也可逆,且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^{-1} \end{bmatrix}$$

五、初等变换

1. 定义:矩阵的初等行变换指下列三种变换:

(1)对换变换 互换矩阵第 i 行与第 j 行的位置,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$.

(2)数乘变换 用一个非 0 常数 k 乘以矩阵的第 i 行,记为 kr_i .

(3)倍加变换 将矩阵的第 i 行元素的 k 倍加到第 j 行上,记为

$$r_j + kr_i$$

若把上述定义中的行换成列,就称为矩阵的三种初等列变换,相应地分别记为 $c_i \leftrightarrow c_j$, kc_i 和 $c_j + kc_i$. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

2. 初等变换的作用

(1)任意一个矩阵都可以通过有限次初等行变换化为行阶梯形.

(2)任意一个矩阵都可以通过有限次初等行变换化为行最简形.

(3)任意一个矩阵都可以通过有限次初等变换化为标准形.

【难点解析】

一、求逆矩阵

求逆矩阵常见的方法有

1. 初等变换求逆: $(A \parallel I) \xrightarrow{\text{行}} (I \parallel A^{-1})$
2. 分块求逆
3. 利用定义: $AB = I$, 则 $A^{-1} = B$

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $(A - 2I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

解 $A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

故 $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 A 的分块矩阵为 $\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{33} \end{bmatrix}$

其中 $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A_{22} = 2$ $A_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

容易计算 $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $A_{22}^{-1} = \frac{1}{2}$ $A_{33}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

例3 设 A, B 均为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位矩阵, 若 $A + B = AB$, 求 $(A - I)^{-1}$.

解 由 $A + B = AB$

$$\Rightarrow A = AB - B$$

$$\Rightarrow A = (A - I)B$$

$$\Rightarrow A - I - (A - I)B = -I$$

$$\Rightarrow (A - I)(B - I) = I$$

$$\text{所以 } (A - I)^{-1} = B - I$$

二、求矩阵的高次幂 A^m

常用的方法有两种:

1. 用矩阵乘法的结合律

(1) 若 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为列矩阵, 则 $A^m = \alpha\beta^T \cdot \alpha\beta^T \cdots \alpha\beta^T$

$= \alpha(\beta^T \alpha) \cdots (\beta^T \alpha) \beta^T = (\beta^T \alpha)^{m-1} \cdot \alpha \beta^T$, 其中 $\beta^T \alpha$ 为数.

(2) 若 $P^{-1}AP = B$, 则 $A = PBP^{-1}$, 于是

$$A^m = PBP^{-1}PBP^{-1} \cdots PBP^{-1}$$

$$= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \cdots B(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^mP^{-1}$$

2. 先求出 $A^2, A^3, \dots$, 再用数学归纳法, 求 A^m .

例 1 已知矩阵 $A = PQ$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = [2, -1, 2]$, 求 A ,

A^2, A^{100} .

分析 解本题的关键是注意 PQ 为矩阵, 而 QP 为数, 可以利用矩阵乘法的结合律达到目的.

$$\text{解 } A = PQ = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [2, -1, 2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$QP = [2, -1, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{故 } A^2 = PQ \cdot PQ = P(QP)Q = 2PQ = 2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2^2 A$$

$\vdots$

$$\text{故 } A^{100} = 2^{99} \cdot A = 2^{99} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

例 2 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

求 A^{11} .

解 由 $P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}$

容易计算 $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{故 } A^{11} &= (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\cdots\Lambda(P^{-1}P)\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda^{11}P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1+2^{13} & 4+2^{13} \\ -1-2^{11} & -4-2^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 3 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^n .

解 用数学归纳法

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般地, 设 $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由数学归纳法知

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三、解矩阵方程

解题提示

1. 先化简, 将给出的关系式变为 $AX = B$ 或 $XA = B$ 或 $AXC = B$.

2. 再通过左乘或右乘可逆阵将以上形式分别变为 $X = A^{-1}B$ 或 $X = BA^{-1}$ 或 $X = A^{-1}BC^{-1}$.

例 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + I = A^2 + X$, 求

矩阵 X .

解 由于 $AX + I = A^2 + X$, 即

$$(A - I)X = A^2 - I = (A - I)(A + I)$$

因为 $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵, 所以

$$X = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【习题详解】

练习 1.1

1. 设 A 为 4×5 矩阵, 若其元素 $a_{ij} = i - j$, 试求出 A .

解 由于 $a_{ij} = i - j$, 故

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 在下列矩阵中,指出对角矩阵,三角形矩阵,单位矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

解 对角矩阵有 D , 上三角形矩阵有 A , 下三角形矩阵有 B 、 C , 无单位矩阵.

练习 1.2

$$1. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

试求 $2A$, $A+B$, AB 及 BA .

$$\text{解 } 2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -5 & 6 & 12 \\ -1 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 16 \\ -5 & 4 & -16 \\ 3 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

显然 $AB \neq BA$, 故矩阵乘法一般不满足交换律.

$$2. \text{ 已知 } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix},$$

试求出矩阵方程 $2X+3A=4B$ 中的 X .

解 由于 $2X+3A=4B$, 故 $2X=4B-3A$

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } X &= 2B - \frac{3}{2}A \\
 &= 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 & -5 & -7 & -38 \\ -5 & 3 & 4 & 30 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, 计算 A^2 和 A^{2n} (n 是大于 1 的自然数).

数).

$$\text{解 } A^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

一般地 设 $A^{2(n-1)} = \begin{bmatrix} 2^{n-2} & -2^{n-2} \\ -2^{n-2} & 2^{n-2} \end{bmatrix}$, 则

$$A^{2n} = A^2 A^{2(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-2} & -2^{n-2} \\ -2^{n-2} & 2^{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

由数学归纳法知

$$A^{2n} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的自然数})$$

4. 设 A, B 是两个同阶方阵, 试问: 在什么条件下如下等式才能成立?

$$(1) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2;$$

$$(2) (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

解 (1) 由 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

而 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

因此等式成立的条件为: $AB = BA$

$$(2) \text{ 由 } (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$\text{而 } (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = A^2 - AB + BA - B^2$$

因此等式成立的条件为: $AB = BA$

5. 设 A 为 n 阶对称矩阵, 则 $A^2 = 0$ 当且仅当 $A = 0$.

证明: 若 $A = 0$, 显然 $A^2 = 0$

假设 $A^2 = 0$, 因为 A 为 n 阶对称矩阵, 故 $A' = A$

不妨设 $A = (a_{ij})$

$$A^2 = AA' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{所以 } a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{即 } A = 0$$

练习 1.3

$$1. \text{ 已知 } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 试验证 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{证明: } \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$