

经济管理 的动态理论

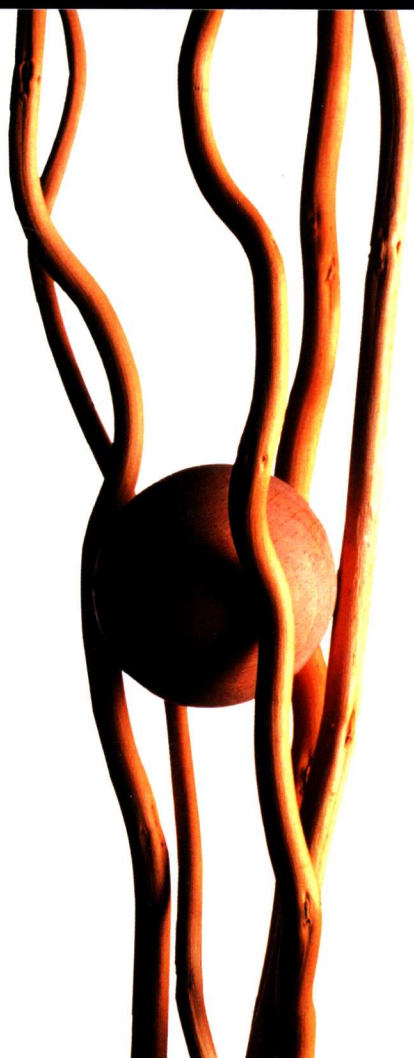
稳定与失衡

THE DEVELOPMENT
THEORIES OF
ECONOMY MANAGEMENT

STABILITY AND
IMBALANCE

徐玖平 胡知能 著

 科学出版社
www.sciencep.com



经济管理的动态理论

——稳定与失衡

徐玖平 胡知能 著

国家自然科学基金项目(编号:79760060;70171021)
教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

针对经济管理系统中的非线性现象,以整体和动态的观点,注重时空性与随机性,强调宏观与微观的统一,将定量分析与定性分析、实证分析与计算机模拟相结合,把经济行为、市场运行机制等建立在 Banach 空间基础之上,对经济管理系统的稳定性和失衡现象进行了研究,重点陈述了通货膨胀、政府行为、动态市场、开放经济等动态经济现象。

本书可供管理科学、系统科学、应用数学、系统工程与工商管理等专业
的本科生、研究生和教师阅读,也可作为参考书使用。书中涉及到的某些论
题还可直接作为相应专业硕士、博士研究生的研究论文选题,一般的经济管
理工作者也可从中得到一些有益的结论。

图书在版编目(CIP)数据

经济管理的动态理论:稳定与失衡/徐玖平,胡知能著. —北京:科学出版
社,2004

ISBN 7-03-012822-2

I. 经… II. ①徐… ②胡… III. 动态经济学-研究 IV. F019.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 005710 号

责任编辑:陈 亮/责任校对:刘小梅

责任印制:安春生/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 4 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2004 年 4 月第一次印刷 印张: 13 3/4

印数: 1—3 000 字数: 257 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

本书是作者在承担的国家自然科学基金项目“风险度与鞍点型效益极大化的投资管理技术研究”(编号 79760060)和“多目标随机决策方法与理论”(编号 70171021),以及中国科学院开放实验室项目“转轨经济中货币经济的动态理论”(1998 年)、“不完全竞争下非均衡宏观经济系统的动力学理论”(1999 年)、“非对称信息宏观金融系统的动力学理论”(2000 年)的研究工作基础上撰写的一部学术专著。

经济管理与自然科学的最大区别,是前者没有真正的实验室,其研究的结论必须放到社会经济实践中去检验,要经历一个漫长的阶段,这就迫使人们去创造既可靠又简明的经济管理分析方法体系来发现、探索、检验经济管理理论。实践证明,逻辑推理是验证真理的可靠方法之一,通过严格逻辑推理检验的结论,能真正揭示和反映经济管理的本质及发展规律,并经得起实践的检验。逻辑推理分析还可用来发现先于管理经验的新理论与规律,从而加快人们对经济管理理论与规律认识的深化。经济管理的动态理论问题,正好适合于用逻辑推理手段来进行分析研究,系统科学在经济管理动态理论的研究中大显身手,并成为经济管理动态理论研究方法论的基础。

本书运用系统科学的理论与方法研究经济管理系统中的非线性关系,从复杂的经济管理现象背后寻求经济管理系统演化的一些基本规律,指导经济管理的实践,佐证经济管理的基本规律。从实践意义上看,经济管理与系统科学需要交叉,经济管理的动态理论既不是完全照搬系统科学的理论和方法,更不是系统科学的理论与方法在经济管理中的简单应用。但是,建立经济管理动态理论体系确实需要从系统科学中汲取“营养”,在研究中形成具有综合性特征的横断学科。从研究某些具体经济管理系统的非线性关系着手,将经济管理和系统科学在高维层面上交叉渗透,构筑崭新的经济管理理论与方法,最终达到揭示经济管理系统中非线性关系的共性规律。如果说 19 世纪经典物理学的成就,表现了经典数学的力量,其发展形成了数理思辩模式和思维方法,那么,自 20 世纪中叶以来的半个世纪里,社会经历了高速的经济增长,这也展现了经济管理动态理论的空前学术魅力,自然科学数理思辩和公理化方法对经济管理深入渗透

和广泛浸漫,使经济管理动态理论不断发展成熟起来,形成经济管理动态理论的正规模式。

在支撑经济管理动态理论的传统经济学中,具有比较完善数学理论体系的主流经济理论有新古典主义经济和凯恩斯主义经济。在新古典主义经济系统中,系统的“因”与“果”一一对应、运行在“平衡”的轨道上而最终将达到某种均衡状态,这种演化机械与确定的线性描述和现实经济现象并不完全符合。新古典经济学派在线性描述中引入非线性项,得到了具有周期性的经济系统模型,但这仍与经济系统中多个“周期”并存的现象不符。凯恩斯主义经济学派则强调历史时间的一维性与经济系统的不确定性。然而,新古典经济理论却没有注重这些,结果使其理论陷入了困境。凯恩斯经济理论认为经济发展与通货膨胀之间存在某种“确定”的关系,但是经济系统的非线性关系所导致其表现形式的复杂程度竟是其难以把握的。

在实际经济管理系统中,政策具有连续性,但是很多现象并没有表现出相应的稳定性,系统偏偏发生失衡,产生许多新结构。这些在实际经济管理中表现为突变的、意料不到的现象,并不是原有系统连续演化出来的。反之,当期待系统出现新的结构性调整与突变现象发生时,经济管理系统却表现出人意料的稳定性。这些传统理论解释不了的现象充分表明:经济管理系统中的稳定与失衡现象需要新的观点来阐述,需要在经济管理的不研究中寻找新的理论来进行分析。要打破这个困境,必须发展对经济管理系统研究所需要的理论,包括了系统理论中的非线性科学理论。对经济管理中的复杂现象的很多研究工作看起来是比较初步,远不能像传统的经济管理研究所得到的理论那样自成体系,但在实际中的应用却一样的成功和有效,表现出了良好的发展趋势。

非线性的经济管理模型有时比较复杂,这并不影响对它的研究,其原因是经济管理系统原型是非线性与复杂的,反映它的模型最好是非线性的。不能因为经济管理动态系统复杂而放弃研究,这可算是一个方向性与战略性问题。因此,本书在这方面做了一定的尝试,以系统的观点对经济管理中的动态行为进行建模与分析,对经济管理系统的稳定和失衡现象进行了研究,分析在经济管理系统中系统何以保持稳定?何以失去稳定?系统在失去稳定后的趋势又是什么?等等。由于经济管理系统的复杂性,在目前要全面深入研究它有不少困难,在一本书内陈述清楚是不可能的。所以,本书选择转轨经济进行分析和研究,特别是针对中国 20 世纪 90 年代以来的经济现象进行研究,主要取得了以下几方面的理论和应用成果:

(1) 把经济行为、市场运行机制等建立在 Banach 空间基础之上,由此得到了自成体系的经济空间,使得经济管理理论建立在较为坚实的数学基础之上。然后在此经济空间之下,对经济管理系统的稳定与失衡进行了定量的分析和研究。

(2) 传统的经济分析认为, 公众预期通货膨胀率与货币增长率之间有显著的相关性, 货币增长率的连续变化引起公众预期通货膨胀率的连续变化. 在非对称信息条件下, 应用突变理论, 建立一个关于公众预期通货膨胀形成规则的动力学模型, 并对预期通货膨胀率突变现象进行了分析. 通过对模型中参数值的讨论, 给出了发生突变的参数条件, 得到公众预期发生突变的条件以及中央银行适宜的货币发行区间.

(3) 以企业、政府、消费者三方面为其基本变量因素, 针对有政府行为时实行财政盈余、赤字等实际问题, 建立了考虑财政、金融政策为约束条件的经济动力学模型. 讨论了货币经济动力学系统平衡时的许多经济动力学性质, 以及当经济处于不景气状态时, 特别是对于转轨经济来说, 财政、金融政策在经济激励中的效果, 并给出了经济出现周期现象的理论解释. 对于中国处于转轨时期的经济进行了动力学方面的分析, 得到了一些对实际政策有一定理论指导意义的结论.

(4) 由于西方经济理论的分析研究大多建立在完善的市场经济体制之上, 目前中国的市场经济尚不完善, 而货币政策是社会主义市场经济宏观调控体系的重要组成部分, 因此必须结合现实国情研究中国的经济问题. 结合中国经济和金融体制的实际情况以及货币政策传导机制, 建立了中国货币政策宏观调控的动态大系统模型, 构造大系统的最优控制算法, 在研究货币政策的非中立性后, 结合实例进行相应的系统分析. 这对于研究中国的货币政策问题, 特别是对于解决经济运行中深层次问题具有重要的理论价值和现实意义.

(5) 针对一般市场中的价格突变现象, 应用动力学分析方法, 对动态市场的价格突变进行了分析, 并且针对一类特殊的市场——垄断市场, 分析了市场中质量与价格等因素的动力学性质与动态控制, 应用动态控制系统理论对动态市场的调控进行了理论上的分析. 在此基础上, 指出银企双方在贷借活动中可以通过建立相互信赖的长期交易契约来达到节约投资资金使用成本的一个理论依据. 指出了企业“名声”所具有的经济价值能减少经济活动中的机会主义行为, 分析的结果可能会对银行商业化、企业现代化及投资管理决策提供一个参考.

(6) 随着科技的进步, 经济的全球化得到了很大的发展, 各个地区的经济密切地联系在一起, 这种联系达到了前所未有的深度和广度, 不同地区的经济发展相互影响. 就此, 本书先对区域经济进行动态分析, 并逐步扩展到整个国家层次的开放经济的动态分析. 由于外债战略是国家宏观经济战略的重要组成部分, 合理稳健的外债规模与结构将有助于国民经济的健康发展, 反之则可能导致外债系统的不稳定甚至崩溃. 所以, 针对外债系统进行系统性的动力学分析, 得到了一些理论上的结果, 这对外债系统进行分析和预测具有十分重要的现实意义.

经济管理系统是一个十分复杂的大系统, 涉及了系统间的互相联系、互相

制约与促进的关系分析. 以系统的观点, 站在战略的高度, 运用定量的方法对转轨经济进行了研究. 经济管理动态理论应用整体和动态的观点研究经济管理系统中的非线性现象, 它强调时间与空间统一、宏观与微观统一、确定与随机统一. 在研究方法上凸显定量分析的作用和模型群技术, 充分展现定量分析与定性分析、实证分析与计算机模拟相结合的系统研究优势.

从研究纵深发展看, 经济管理的动态理论首要的问题是建立起真正反映实际的经济管理现象之非线性模型, 把经济管理问题的逻辑必然性的真实与人们假设的真实严整统一在数学模型之中, 通过数学深邃的分析, 活跃的思维想像, 严谨的逻辑推理, 迂回的技法技巧, 不仅能够回答经济管理中怎样的逻辑前提将导致怎样的逻辑结论, 而且还能将经济管理理论完善在严谨的科学基础上, 同时使直觉与逻辑、感性与理性得到真正的统一.

经济管理动态研究中难度比较大的问题之一, 便是经济变量的调整速度. 实际上就是经济变量的时空尺度, 对已建立的经济管理非线性模型加之分析, 时空的标尺是一个非常重要的事情. 模型的多用性与局限性是经济管理动态理论最棘手的问题之一, 在短期分析中是正确的结论可能在长期分析中不成立, 反之亦然. 这两种情形下的复杂性和经济管理行为中的加总分析和反加总分析都是同样的重要.

经济管理系统的演化迫使其系统失去平衡状态, 向着更高级的稳定的或更复杂的方向发展. 反应在管理模型中有可能是外部参数的变化而产生非稳定性, 并向着新的时空发展, 如此的演化将给经济管理的经济预测带来混沌现象. 当然, 这种经济混沌的存在具有特别重要的意义, 它具有可测性和可接受性, 它是更为有序之源. 未来的研究不是从其混沌概念本身出发, 而是从有序和一定的理性机制出发来探索. 混沌是一种观察到的现象, 而不是一种机制. 也就是说, 引起混沌的基本机制不是随机的而是确定的, 未来的研究也应该更加对此加以注意.

总之, 希望本书的出版能对经济管理系统的复杂性研究起一定的作用, 在一定意义上有助于揭示其理论依据. 本书所做的研究仅是一个开始, 更多的困难还未解决, 从定量分析上看, 对经济管理系统不能完全理解的行为还有待于更进一步的研究来发现和解决.

作 者

2004 年 1 月

目 录

第 1 章	基础知识	1
1.1	Banach 空间	1
1.1.1	基本概念	1
1.1.2	微分理论	4
1.2	动力学系统	10
1.2.1	基本定理	10
1.2.2	一般性质	14
1.2.3	平衡态	17
1.2.4	稳定性	24
1.2.5	突变理论	28
第 2 章	经济空间	32
2.1	商品空间	32
2.2	生产活动	35
2.3	消费活动	40
2.3.1	可行消费	40
2.3.2	消费者偏好	42
2.3.3	效用函数	46
第 3 章	通货膨胀	50
3.1	通货膨胀表现的实质	50
3.2	公众预期通货膨胀的突变分析	53
3.2.1	模型	54
3.2.2	突变	54
3.2.3	分析	56
3.3	非对称信息下的预期通货膨胀	57
3.3.1	预期模型	57
3.3.2	经济周期	60

3.4	非对称信息下宏观博弈的政策行为与动态效应.....	61
3.4.1	动力学模型.....	62
3.4.2	动力学分析.....	65
3.4.3	行为的效应.....	67
第4章	政府行为.....	71
4.1	无政府支出的简单模型.....	71
4.1.1	货币经济模型.....	72
4.1.2	模型动态分析.....	74
4.1.3	货币经济分析.....	79
4.2	有政府行为的货币经济.....	80
4.2.1	基本思想.....	80
4.2.2	经济行为.....	83
4.3	转轨经济财政金融政策动态效应.....	88
4.3.1	模型建立.....	88
4.3.2	动态分析.....	91
4.3.3	动态效应.....	94
4.4	货币政策宏观调控的大系统模型.....	95
4.4.1	传导机制.....	95
4.4.2	系统模型.....	96
4.4.3	最优控制.....	104
4.4.4	系统分析.....	107
4.5	扩展的 Sidrauski 动态经济模型.....	112
第5章	动态市场.....	119
5.1	动态市场的突变.....	119
5.1.1	价格的折叠突变模型.....	120
5.1.2	价格的尖点突变模型.....	122
5.1.3	市场中价格突变分析.....	124
5.1.4	市场价格突变的实证.....	125
5.2	垄断产品质量与价格的动态效应.....	126
5.3	垄断产品的价格歧视分析.....	133
5.4	垄断产品纵向控制与整合分析.....	138
5.4.1	纵向控制模型.....	139
5.4.2	纵向整合模型.....	141
5.4.3	模型综合分析.....	143

5.5	企业与银行交易关系的动态分析.....	144
5.5.1	企业投资与金融机构	145
5.5.2	银行与企业契约分析	146
第 6 章	开放经济	160
6.1	区域经济的微分动力学系统	160
6.1.1	空间聚集	161
6.1.2	动态模型	163
6.1.3	模型分析	168
6.1.4	分岐现象	172
6.2	汇率及关税对贸易的影响	177
6.3	行业内两国竞争贸易分析	181
6.3.1	竞争出口模型.....	181
6.3.2	竞争贸易策略.....	184
6.4	外债系统分析与稳态预测	186
6.4.1	数学模型	186
6.4.2	预测分析	188
第 7 章	研究展望	192
7.1	经济管理变量的调整速度	192
7.2	经济管理研究的时间幅度	195
参考文献		199
索 引		206

第 1 章 基础知识

1.1 Banach 空间

1.1.1 基本概念

为了把经济管理的动态系统统一到 Banach 空间之下, 这里专门介绍一下 Banach 空间的有关基本概念与理论, 以保持本书在一定意义下的封闭性, 可参见文献 [1-3] 等.

1.1.1.1 赋范线性空间的特性

为了叙述完备起见, 先给出代数学中关于线性空间的概念.

【定义 1.1】(线性空间) 设 E 是某些元素的集合, K 是复数域 C 或实数域 R , 称 E 为一复的或实的线性空间, 是指它满足:

(1) E 构成一个“加法群”, 即在 E 内定义了一种运算“+”(称“加法”), 其使得 $\forall x, y, z \in E$, 必有

- ① $x + y \in E$ (封闭性);
- ② $x + y = y + x$ (变换性);
- ③ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (结合性);
- ④ $\exists \theta \in E$ 使得 $\forall x \in E$, 总有 $x + \theta = x$ (θ 称为“零元”);
- ⑤ $\forall x \in E, \exists -x \in E$, 使得 $x - x = 0$ ($-x$ 称为 x 的“逆元”).

(2) (复或实) 数域 K 与集 E 之间定义了一种运算“ $\cdot$ ”(有时此符号可略), 称为“数乘”, 其使得 $\forall x \in E, \alpha, \beta \in K$, 必有

- ① $\alpha \cdot x \in E$ (封闭性);
- ② $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (结合性);
- ③ $1 \cdot x = x$.

(3) 上面的加法与数乘运算之间具有以下关系, $\forall x, y \in E, \alpha, \beta \in K$ 均有两种分配律:

$$\textcircled{1} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$\textcircled{2} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

范数是最优化方法中常遇到的一个概念,为此先给出范数的定义.

【定义 1.2】(范数) 在 n 维线性空间 R^n 中, 定义实函数 $\|x\|$, 使其满足以下三个条件:

(1) 对任意 $x \in R^n$ 有 $\|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时 $\|x\| = 0$;

(2) 对任意 $x \in R^n$ 及实数 α 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

(3) 对任意 $x, y \in R^n$ 有 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称函数 $\|x\|$ 为 R^n 上的向量范数.

对于任意 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, 1 \leq p < \infty$, 称 $(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ 为向量 x 的 p -范数, 记作 $\|x\|_p$, 即

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

特别地, 称 $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 为 ∞ -范数, 记作 $\|x\|_\infty$.

【定义 1.3】(赋范线性空间) 称 E 为复的或实的赋范线性空间, 是指 E 是一复的或实的线性空间, 并且对 E 中每一元 x 按一定法则使其与一非负实数 “ $\|x\|$ ” 相对应, 此对应关系满足:

(1) $\|x\| \geq 0$, 且有 $\|x\| = 0$, 等价于 $x = \theta$;

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式);

(3) $\forall x, y \in E, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (绝对齐性).

则称 $\|x\|$ 为元 x 的范数.

由上面定义, 还可以得到如下另外两个“减弱”后的定义. 当上述对应的 $\|x\|$ 满足条件 (1), (2) 及条件:

(3') 当 $\|-x\| = \|x\|$, $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\| = 0$, $\lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\alpha x_n\| = 0$ 时, 将 $\|x\|$ 称为元 x 的准范数, 相应的空间称为赋准范线性空间.

而当上述 $\|x\|$ 满足条件 (1), (3) 及条件:

(1') 当 $\|x\| \geq 0, x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ 时, 将 $\|x\|$ 称为元 x 的拟范数, 相应空间称为赋拟范线性空间.

【性质 1.1】 对于赋范(准范)线性空间 E 中的任意两个元 x, y , 当定义数 $d(x, y) = \|x - y\|$ 时, 容易验证其满足如下关于“距离”定义三条公理:

(1) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

从而在一般拓扑学意义下, E 构成一个距离空间. 特别地, 由以上可知, 赋范线性空间是一种特殊的距离空间, 它还具有以下特性:

(4) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (对“平移”不变);

(5) $d(\alpha x, \theta) = |\alpha| d(x, \theta)$ (绝对齐性), 这是一般具有距离的线性空间所没有的性质.

为了说明赋范线性空间的另一基本特性, 先给出如下关于抽象空间中“线段”和“凸集”的定义:

【定义 1.4】 设 E 为线性空间, x, y 为 E 中任意两个元, 那么, 集 $\{\lambda x + (1-\lambda)y | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 就称为由 x, y 所组成的线段, 记为 $[x, y]$. 类似地, 当以上线段中不含 x 元或不含 y 元, 或同时不含 x, y 元时, 则分别称为半开半闭线段或开线段, 记为 $(x, y], [x, y)$ 和 (x, y) .

【定义 1.5】 线性空间 E 中的集 V 称为凸集, 是指 $\forall x, y \in V$, 均有 $[x, y] \subset V$.

由于赋范空间是距离空间, 有了距离的概念, 就可以引入“收敛”的概念了.

【定义 1.6】 设 E 为赋范线性空间, $\{x_n\} \subset E, x_0 \in E$, 称元列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 是指 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

这种收敛, 有时亦称为按范数收敛.

【定义 1.7】 设 E 是一线性空间, 集 $M \subset E$. 如果 M 满足条件 $\forall x, y \in M, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$, 则 M 称为 E 的一个线性子空间 (线性集). 当 $M \neq E$ 时, 称 M 为 E 的真子空间; 如果 E 还是距离空间, 上面 M 在 E 中是闭集, 那么 M 称为 E 的闭线性子空间.

【定义 1.8】 设 E 是一线性空间, 称 E 中的元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性相关, 是指存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得有 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$; 否则称其为线性无关. 如果 E 中有某 n 个元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关, 而 E 中其他的元均可由它线性表出, 则称 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 E 的基, 称 E 为有限维的, 并称 n 为 E 的维数.

容易验证, 上面关于维数的定义是确定的. 也即, 基的元虽然可以变, 但其个数是确定的.

【定义 1.9】 设 E 为一复 (实) 线性空间. 如果对于 E 中任意两个元素 x, y (有先后次序), 均存在一个复 (实) 数 “ (x, y) ” 与此有序的两元相对应, 并且该复数满足以下性质, 对 $\forall x, y, z \in E, \alpha \in C$ (或 R) 均有:

$$(1) (x+y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$(2) (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ (当为实数时为 } (x, y) = (y, x));$$

$$(3) (\alpha x, y) = \alpha(x, y);$$

$$(4) (x, x) \geq 0 \text{ (由 (2) 知 } (x, x) \text{ 必为实数), 并且当 } x \neq 0 \text{ 时, 必有 } (x, x) > 0.$$

那么, 数 (x, y) 就称为 x 与 y 的内积. 定义了内积的线性空间就称为内积空间.

1.1.1.2 Banach 空间的定义

【定义 1.10】 距离空间中的元列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 列, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ (自然数), 只要 $n, m > N$, 就有距离 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ 成立; 如果该空间的任意 Cauchy 列均有极限存在 (属于空间), 那么, 这个空间就称为完备的.

【定义 1.11】(Banach 空间) 赋范线性空间 E 称为 Banach 空间 (或简记为 (B) -空间), 是指它按距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 是完备的.

与定义 1.11 相应的完备的赋“准范”线性空间称为 Fréchet 空间 (或简记为 (F) -空间), 完备的“内积”空间称为 Hilbert 空间 (或简记为 (H) -空间). 常用的 n 维复欧氏空间作为通常意义上的线性空间是一个 (B) -空间, 其中元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 为 n 维复数向量, 相应的范数为 $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}$ ($\forall x \in C^n$).

【性质 1.2】 任意有限维的赋范线性空间均是 (B) -空间.

1.1.2 微分理论

现在阐述 Banach 空间微分的有关理论, 即 Banach 空间中连续映射的导数、偏导数和高阶导数的概念及其基本性质.

1.1.2.1 导数

【定义 1.12】 设 X 和 Y 是数域 K 上的 Banach 空间, A 是 X 的开子集, f 和 g 是 A 到 Y 的两个映射, 若对 $x_0 \in A$, 成立

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

则称 f 和 g 在 x_0 相切.

注意: (1) 若两个映射 f 和 g 在 x_0 相切, 且它们在 x_0 连续, 则 $f(x_0) = g(x_0)$. 否则, 将导致

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = \infty$$

(2) 相切有传递性: 若 f 和 g 在 x_0 相切, g 和 h 在 x_0 相切, 则 f 和 h 在 x_0 也相切.

在与 f 映射相切的种种映射中, 形如 $g: x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ 的映射具有特别重要的意义, 其中, u 是 X 到 Y 的线性映射.

【定理 1.1】 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, f 是 X 到 Y 的映射. 在形如 $g: x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ 的映射中, 至多有一个与 f 在 x_0 相切, 其中, u 是 X 到 Y 的线性映射.

现在定义连续映射的导数.

【定义 1.13】 设 X 和 Y 是数域 K 上的 Banach 空间, A 是 X 中的开集, $f: A \rightarrow Y$ 为连续映射, 若对 $x_0 \in A$, 存在 X 到 Y 的线性映射 u , 使得映射 $g: x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ 与 f 在 x_0 相切, 就称 f 在 x_0 可微, 并称线性映射 u 为 f 在 x_0 的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$.

【定理 1.2】 若 $A(\subset X)$ 到 Y 的连续映射在 $x_0 \in A$ 可微, 则导数 $f'(x_0)$ 是 X 到 Y 的连续线性映射, 即 $f'(x_0) \in \mathcal{F}$. 如记 $f'(x_0) = u$, 则对每个 $t \in X$, 都有

$$\|u(t)\| \leq \|u\| \|t\|$$

其中, $\|u\| = \sup_{\|t\| \leq 1} \|u(t)\|$. 习惯上把 $u(t)$ 记成 $u \cdot t$ 或 $f'(x_0) \cdot t$.

注意: (1) 若 f 在 A 中每一点都可微, 就说 f 在 A 中可微, 而 $x \rightarrow f'(x) = Df(x)$ 是 $A \rightarrow \mathcal{F}$ 的映射, 记成 f' 或 Df , 并称 f 为在 A 中的导数.

(2) 若 f 在 x_0 可微, 通常记

$$f(x_0 + s) - (f(x_0) + u(s)) = o(s)$$

其中, $\|o(s)\| \leq \varepsilon \|s\|$, 且 $o(s) \in Y$ 是 Banach 空间 Y 中依范数的高阶无穷小元.

【定义 1.14】 设 $(X_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 是数域 K 上的赋范线性空间, 若在积集 $X_1 \times X_2$ 上定义如下的加法与数乘运算:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), & (x_1, x_2), (y_1, y_2) &\in X_1 \times X_2 \\ a(x_1, x_2) &= (ax_1, ax_2), & a \in K, (x_1, x_2) &\in X_1 \times X_2 \end{aligned}$$

则 $X_1 \times X_2$ 是一线性空间; 如再定义范数

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2} = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}$$

则 $X_1 \times X_2$ 成为赋范线性空间, 称为 X_1 和 X_2 的积空间.

【定理 1.3】 积空间 $(X_1 \times X_2, \|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2})$ 中有两个闭子空间 $X'_1 = X_1 \times \{0\}$ 和 $X'_2 = \{0\} \times X_2$, 它们分别与 X_1 和 X_2 同胚, 且 $X = X_1 \times X_2$ 中任一元 (x_1, x_2) 可唯一地分解成

$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$$

其中, $(x_1, 0) \in X'_1, (0, x_2) \in X'_2$.

其投影映射 $P_1: (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)$ 和 $P_2: (x_1, x_2) \rightarrow (0, x_2)$ 是 $X_1 \times X_2$ 中的连续映射, 而且 $X'_1 \times X'_2$ 到 X 的映射 $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2$ 是同胚映射.

应当指出, X'_1 和 X'_2 可以看成是 X 的一种分解, 称 X 为 X'_1 与 X'_2 的拓扑直和. 不难把拓扑直和的概念推广到一般的情形.

【定理 1.4】 设 $Y_1, \dots, Y_m$ 是 m 个 Banach 空间, $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ 是其积空间, $f = (f_1, \dots, f_m)$ 是 Banach 空间 X 中的开集 A 到 Y 的连续映射, 则 f 在 $x_0 \in A$ 可微的必要和充分条件, 是每个 f_j 在 x_0 可微, 且

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0))$$

其中, $f'_j(x_0) \in \mathcal{F}(X, Y_j) (j = 1, \dots, m)$; $f'(x_0) \in \mathcal{F}(X, Y_1) \times \dots \times \mathcal{F}(X, Y_m)$.

【定理 1.5】 设 X, Y 和 Z 都是 Banach 空间, A 是 X 中含 x_0 的开集, $f: A \rightarrow Y$ 是连续映射, 且 $y_0 = f(x_0)$; B 是 Y 中含 y_0 的开集, $g: B \rightarrow Z$ 也是连续映射. 若 f 在 x_0 可微, g 在 y_0 可微, 则复合映射 $h = g \circ f$ 在 x_0 可微, 且

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

为了讨论逆映射的可微性, 先引进可微同胚的概念.

【定义 1.15】 设 X 和 Y 是 Banach 空间, A 和 B 分别是 X 和 Y 中的开子集. 若映射 $f: A \rightarrow B$ 是同胚映射, 且 f 在 A 中可微, 则称 f 为 A 到 B 上的可微同胚映射, 简称可微同胚.

由定义可见, 若 f 是 A 到 B 上的可微同胚, 则 f 是双方单值、双方连续的, 且对每个 $x_0 \in A$, $f'(x_0) \in \mathcal{F}$. 但由此却不能推出 $f'(x_0)$ 的逆映射为单值, 当然更谈不上推出其为可微.

【定理 1.6】 设 X 和 Y 是 Banach 空间, A 和 B 分别是 X 和 Y 中的开子集, f 是 A 到 B 的同胚, g 是 f 的逆同胚. 若 f 在 $x_0 \in A$ 可微, 且 $f'(x_0)$ 是 X 到 Y 上的线性同胚, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 可微, 且 $g'(y_0)$ 是 $f'(x_0)$ 的逆映射.

【定理 1.7】 设 X 和 Y 是 Banach 空间, L 是 X 中的线段, $f: L \rightarrow Y$ 是连续映射. 若 f 在 L 中每一点可微, 则

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \|t\| \sup_{0 < \theta < 1} \|f'(x_0 + \theta t)\|$$

【推论 1.1】 设 X 和 Y 是 Banach 空间, L 是 X 中的线段.

$$L = \{x \in X | x = a + \lambda(b - a), \lambda \in [0, 1]\}$$

其中, $a, b \in X$.

又 A 是 L 在 X 中的开邻域, 则对每个 $x_0 \in A$, 有

$$\|f(b) - f(a) - f'(x_0)(a - b)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in (a, b)} \|f'(x) - f'(x_0)\|$$

注意: 定理 1.7 是 Banach 空间中的微分中值定理, 它是以不等式的形式来表述的.

1.1.2.2 偏导数

下面以二变元映射为例来讨论偏导数, 所得结果不难推广到多变元映射的情形.

【定义 1.16】 设 X_1, X_2 和 Y 都是 Banach 空间, A 是积空间 $X_1 \times X_2$ 中的开子集, f 是 A 到 Y 的映射. 对于 $(a_1, a_2) \in A$, 称映射 $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ 为 X_1 中的开子集 $A_1 = \{(x_1, a_2) | x_1 \in X_1 \cap A\}$ 到 Y 的关于第一变元的偏映射. 若这个偏映射在 a_1 可微, 就说 f 关于第一变元可微, 并称其导数为 f 在关于 (a_1, a_2) 第一变元的偏导数, 记成 $\partial_1 f(a_1, a_2)$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, 显然 $\partial_1 f(a_1, a_2) \in \mathcal{F}(X_1, Y)$. f 关于第二变元的可微性及其在 (a_1, a_2) 关于第二变元的偏导数 $\partial_2 f(a_1, a_2)$ 可类似定义.

【定义 1.17】 若 Banach 空间 X 的开子集 A 到 Banach 空间 Y 的可微映射 f 的导数 Df 是 A 上的连续映射, 就称 f 为连续可微映射.

【定理 1.8】 设 X_1, X_2 和 Y 都是 Banach 空间, A 是积空间 $X = X_1 \times X_2$ 中的开子集, $f: A \rightarrow Y$ 为连续映射, 则 f 在 A 中连续可微的必要和充分条件是 f 在 A 中每一点关于其第一变元, 第二变元都可微, 且偏导数 $(x_1, x_2) \mapsto \partial_2 f(x_1, x_2)$ 和 $(x_1, x_2) \mapsto \partial_1 f(x_2, x_2)$ 在 A 中连续. 此外, 还成立

$$Df(x_1, x_2) \cdot (t_1, t_2) = \partial_1 f(x_1, x_2) \cdot t_1 + \partial_2 f(x_1, x_2) \cdot t_2$$

即全微分等于每个偏微分之和.

注意: 在上面定理中取特殊的 Banach 空间, 便可获得几个常见的结论.

(1) $X = E^n$ (或 C^n). 若 f 是 X 的开子集 A 到 Banach 空间 Y 的可微映射, 则偏导数 $\partial_k f(a_1, \dots, a_n)$ 是 $\mathcal{F}(X_k, Y)$ 中的元, 而 f 的导数映射

$$Df(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow \sum_{k=1}^n \partial_k f(a_1, \dots, a_n) \xi_k$$

显然, 如 Df 在 A 中连续, 则每个 $\partial_k f$ 也在 A 中连续; 反之, 如每个 $\partial_k f$ 在 A 中存在且连续, 则 f 在 A 中连续可微.

(2) $X = E^n, Y = E^m$ (或 $X = C^n, Y = C^m$). 此时映射 $f: X \rightarrow Y$ 可写成 $f = (f_1, \dots, f_m)$, 其中, $f_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是在 E^n 上定义的函数. 依定理 1.4, f 可微的充要条件是每个 f_j 可微, 而依 (1), $f_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 连续可微的充要条件是每个偏导数 $\partial_k f_j$ 存在且连续. 因此, f 的导数是映射 $(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta_m)$, 其中

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \partial_k f_j(a_1, \dots, a_n) \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$