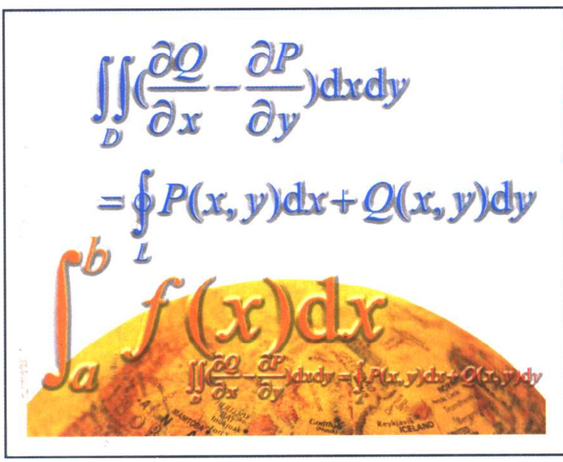
高等学校数学教材系列丛书

高等数学——题型·方法



→ 解题方法

→ 典型例题

→ 综合练习

→ 模拟考题

→ 考研题型

梁晓毅 编

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

高等数学——题型·方法

梁晓毅 编

西安电子科技大学出版社

2004

图书在版编目(CIP)数据

高等数学——题型·方法/梁晓毅编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2004.8
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 7-5606-1427-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.梁…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062406 号

策　　划　戚文艳
责任编辑　戚文艳
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西画报社印刷厂
版　　次　2004 年 10 月第 1 版　2004 年 10 月第 1 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 23.25
字　　数　576 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　30.00 元
ISBN 7-5606-1427-2/O·0072(课)

XDUP 1698001-1

前 言

“高等数学”(或“微积分”)是大学理工科和部分文科专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必试课程，它在大学基础课中的重要地位不容置疑. 为了帮助大学生学好并强化“高等数学”，我们根据国家教委的高等学校工科数学课程教学指导委员会发布的“高等数学课程教学基本要求”，并参照硕士研究生入学考试数学大纲，结合多年的教学经验而编写了这本辅导教材.

本书特色：紧扣大纲，结构紧凑，例题典型，注重方法，启迪思路.

本书按照教学内容共分 11 章，内容包括：函数 极限 连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 各章的结构为基本内容、基本要求、基本解题方法、典型例题精解、综合练习题，而且每章的综合练习题都按照考研题模式结合高校学期期末考试的试题形式编排，结构新颖，都附有答案或提示，便于读者进行自我测验与检查. 书中题型多为高校学期考试及考研题中频繁出现的类型，有些就是考研试题的原题. 题型覆盖面广，难度由浅入深，不但注重基础训练，而且注重综合性与灵活性，通过总结题型，归纳方法与技巧，启迪读者思路，提高解题能力.

由于编写时间仓促，加之编者水平所限，书中缺点和不足之处在所难免，诚恳期待同行与读者赐教.

本书在编写过程中，得到了西安电子科技大学出版社以及陕西科技大学数学教研室部分同仁的大力支持，在此一并表示感谢.

编者

2004 年 5 月

目　　录

第一章 函数 极限 连续

1.1 基本内容

1. 函数的概念及其性质

1) 定义

设 X 和 Y 为两个非空实数集，若存在某一对应法则 f，使得对于 X 中任意一个数 x，Y 中都有唯一确定的实数 y 与它对应，则称 f 为定义在 X 上的函数，记为

$$f: X \to Y$$

或简记为 $y=f(x)$.

高等数学研究的基本对象就是函数. 在函数的定义中，定义域和对应法则是函数概念的两个要素.

在函数记号 $y=f(x)$中，记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，此对应法则 f 与自变量，因变量用什么字母表示无关，且不限于表示某一个数学表达式，也可以由几个数学表达式表示(分段函数).

2) 函数的几种简单性质

(1) 奇偶性　$f(x)$的定义域 D_f 是关于原点对称的，若对 $\forall\ x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若对 $\forall\ x\in D_f$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) 单调性　对于$\forall\ x_1,\ x_2 \in (a,\ b) \subset D_f$，当$x_1 < x_2$时，有$f(x_1) < f(x_2)$（或$f(x_1) > f(x_2)$），则称函数$y=f(x)$在$(a,\ b)$内单调增加（或单调减少）.

(3) 周期性　$f(x)$在$D_f=(-\infty,\ +\infty)$内定义，若存在常数$T\neq 0$，对$\forall\ x$，有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T为$f(x)$的周期. 通常所说的周期是指最小正周期.

(4) 有界性　若存在正数M，对于$\forall\ x \in X \subset D_f$，恒有$|f(x)| \leqslant M$，称$f(x)$在$X$上有界.

3) 基本初等函数、复合函数和初等函数

(1) 基本初等函数　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(2) 复合函数　若$y=f(u)$的定义域D_f，$u=\varphi(x)$的定义域D_φ，值域U_φ，而$U_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$，则可定义$D_\varphi$的一个子集到$U_f$（$y=f(u)$的值域）的函数：$y=f[\varphi(x)]$，称为由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数. y是因变量，x是自变量，u是中间变量. 要注意分段函数的复合函数.

(3) 初等函数　由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合步骤而得到，且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

2. 极限的概念、性质和运算

1) 定义

(1) 数列的极限　设有数列$\{x_n\}$和常数A，如果对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得满足$n>N$的一切n，都有$|x_n - A| < \varepsilon$成立，则称A是数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，这时也称$\{x_n\}$收敛于$A$. 如果$\{x_n\}$没有极限，则称$\{x_n\}$是发散的. 数列$\{x_n\}$是否收敛以及收敛时收敛到何值与$\{x_n\}$的前面有限项无关.

(2) 函数的极限　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域有定义，A 为一常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,-a)(a>0)$ 内有定义，A 为一常数，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 X，使得满足 $|x|>X$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷大时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3) 单侧极限　左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，也可记作 $f(x_0-0)=A$；右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0+0)=A$.

命题　极限存在⇔左，右极限存在且相等.

此结论常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性.

由于自变量的变化状态及其相应函数的变化趋势的不同，因而函数的极限有多种形式，自变量及因变量的变化趋势不论怎样，总可以分成两类.

自变量的变化状态：

1° $x\to\infty$，包括 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$；

2° $x\to x_0$，包括 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0$.

因变量的变化趋势有：

1° $f(x)\to A$；

2° $f(x)\to\infty$，包括 $f(x)\to-\infty$，$f(x)\to+\infty$，$f(x)\to\infty$.

若把它们加以组合，共有 24 种形式，读者可以列表整理.

2) 无穷小量

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小量，简称为

无穷小.

(1) 无穷小的运算　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小. 由此可以推出：常数与无穷小的乘积为无穷小. 有限个无穷小的乘积为无穷小.

(2) 函数、极限与无穷小的关系　$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$.（其中 A 为常数，$\lim\alpha(x)=0$.）

(3) 无穷小与无穷大的关系　在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

3) 极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$$

$$\lim[f(x)g(x)]=A\cdot B$$

此性质可以推广到任意有限个函数的情形.

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

4) 极限的性质

(1) 唯一性　若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限存在，则极限唯一.

(2) 保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A<B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<g(x)$.

若存在 x_0 的某个空心邻域 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\leqslant B$.

（3）有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

5）极限存在准则及两个重要极限

（1）夹逼准则　若 x_0 的某个空心邻域内，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

（2）单调有界准则　若数列 $\{x_n\}$ 单调且有界，则数列 $\{x_n\}$ 必有极限.

1° 若 $\{x_n\}$ 为单调增加数列，且 $\exists\ M$，对 $\forall\ n$，有 $x_n\leqslant M$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2° 若 $\{x_n\}$ 为单调减少数列，且 $\exists\ m$，对 $\forall\ n$，有 $x_n\geqslant m$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（3）两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，可以推广到

$$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$f(x)\neq 0$.

6）无穷小的比较及代换定理

设 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，$(\beta(x)\neq 0)$，

1° 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=0(\beta(x))$.

如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\alpha$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小. 特别地，若 $c=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小，

记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ 或 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

命题　设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是两个无穷小，则

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$$

如果 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\alpha(x)|}{|x|^k}=c\,(c\neq0)$，则称当 $x\to0$ 时 $\alpha(x)$ 是关于 x 的 k 阶无穷小($k>0$, $k\in\mathbf{R}$).

常见的等价无穷小如下($x\to0$ 时)：

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\mathrm{sh}x\sim\mathrm{arsh}x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\,(\alpha\neq0)$；$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\ a\neq1)$. 请记住这些等价小.

2° 等价无穷小的代换性质.

设 $\alpha(x)$、$\overline{\alpha(x)}$、$\beta(x)$、$\overline{\beta(x)}$ 是无穷小，且 $\alpha(x)\sim\overline{\alpha(x)}$，$\beta(x)\sim\overline{\beta(x)}$，如果 $\lim\dfrac{\overline{\beta(x)}}{\overline{\alpha(x)}}$ 存在，那么

$$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\frac{\overline{\beta}(x)}{\overline{\alpha}(x)}$$

注意　若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积，则可以对其中的任意一个或几个无穷小因子做等价无穷小代换，而不是改变原式的极限，但如果分子或分母中的项为加减项，则不能做代换.

3. 连续与间断

1) 连续的定义

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某一邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续可以由以下三种形式来定义：

1° $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

3° 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

2) 连续的性质

$f(x)$在 $x=x_0$ 连续时，具有局部保号性，即若 $f(x_0)>0$(或 $f(x_0)<0$)，则$\exists\ \delta>0$，使得对$\forall\ x\in U(x_0,\ \delta)$，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)，这里$U(x_0,\ \delta)$表示 x_0 的某 δ 邻域.

若函数 $f(x)$在开区间$(a,\ b)$内每一点都连续，则称 $f(x)$在开区间$(a,\ b)$内连续；若 $f(x)$在$(a,\ b)$上连续，且在端点 a 和 b 处分别右连续和左连续，即

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

则称 $f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续.

3) 函数的间断点

若 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$的间断点. 间断点一般分为两类：

1° 第一类间断点，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$均存在的间断点. 它又分为跳跃型和可去型两种：

跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；

可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

对可去型间断点，可以补充(当 $f(x)$在 x_0 处没有定义时)或者改变(当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$时)$f(x)$在 x_0 的函数值，定义新函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x=x_0 \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$在 x_0 处连续.

2° 第二类间断点，凡是不属于第一类间断点的间断点. 常见的有无穷型(若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个是无穷大)和振荡型(若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个无穷次振荡)两种.

4) 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值存在定理　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则必存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$，使得对一切 $x \in [a, b]$ 都有

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最小值 $f(x_1)$ 和最大值 $f(x_2)$.

(2) 有界性定理　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内有界，即存在正数 M，使对 $\forall\ x \in [a, b]$ 有 $|f(x)| \leqslant M$.

(3) 介值定理　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，若 μ 是 $f(a)$，$f(b)$ 之间任何一个数，则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = \mu$.

推论 1　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的最小值、最大值 $(m < M)$，则对任意 $\mu \in (m, M)$，至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \mu$.

推论 2　零点定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$.

推论 3　若单调函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则存在唯一的 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$.

注意　推论 3 在证明方程的根的存在唯一性时经常用到.

1.2 基本要求

(1) 理解函数的概念.

(2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3) 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5) 会建立实际问题中简单的函数关系式.

(6) 理解极限的概念(对极限的 $\varepsilon - N$，$\varepsilon - \delta$ 及 $\varepsilon - X$ 的定义可在学习中逐步加深理解).

(7) 掌握极限四则运算法则.

(8) 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),记住两个重要极限.

(9) 了解无穷小、无穷大,以及无穷小的阶的概念,记住常用的等价无穷小.

(10) 理解函数在一点连续的概念及其区间(包括开、闭、半开区间)上的连续函数的概念.

(11) 了解间断点的概念,并会判别间断点的类型.

(12) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大、最小值定理).

1.3 基本解题方法

1. 求函数定义域的方法

函数由解析式子给出时,其定义域是使解析式子有意义的一切实数. 为此求函数的定义域时应遵守以下原则:

(1) 在分式中分母不能为零.

(2) 偶次根式内非负.

(3) 在对数中真数大于零.

(4) 反三角函数 $\arcsin x$,$\arccos x$,要满足 $|x|\leqslant 1$.

(5) 两函数和(差)的定义域,应是两函数定义域的公共部分.

2. 求函数极限的方法

求函数的极限是本章的重点之一,其方法贯穿于全章内容之中,归纳起来有以下几种方法:

(1) 利用极限定义.

(2) 直接利用极限四则运算定理求极限.

(3) 先进行恒等变换(如消去公因子；分子、分母同除最高次幂；分子、分母同乘以共轭根式等)，再用极限四则运算法则求极限.

(4) 利用两个重要极限(或通过定理代换化为两个重要极限形式后再求极限).

(5) 利用无穷小的性质及无穷小与无穷大的关系求极限(等价无穷小代换).

(6) 在以后章节中将会学习到其它的一些求极限的方法(主要有洛必达法，泰勒公式法及利用定积分的定义法).

(7) 利用夹逼准则.

(8) 利用函数的连续性(在连续点处直接代入求出极限).

3. 函数间断点的求法及类型判断

(1) 对初等函数求间断点，就是求函数无定义的点.

(2) 对分段函数求间断点，除了求出每段表达式的间断点外，还应特别考察分界点处是否间断.

(3) 判断间断点的类型，它由间断点处的极限情况而定.

(4) 对于可去间断点，即若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$$

则可以补充定义，$f(x_0)=A$，而使 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

1.4 典型例题精解

【例 1-1】 当 $0<u<1$ 时，函数 $f(u)$有定义，求函数 $f(\sin 2x)$ 的定义域.

解 由题意有 $0<\sin 2x<1$，于是可得

$$2n\pi < 2x < (2n+1)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

故所求定义域为$\left(n\pi, \dfrac{2n+1}{2}\pi\right)$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.