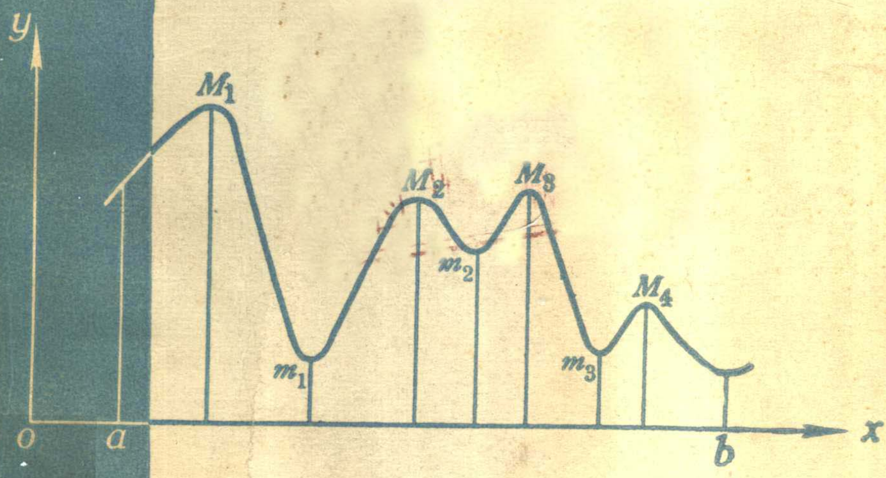
高中数学教学法

（代数部分）

薩·耶·利亚平 主编



人民教育出版社

高中数学教学法

（代数部分）

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

С. Е. ЛЯПИНА

МЕТОДИКА

ПРЕПОДАВАНИЯ

МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ II

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

8—10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ —— 1956

*

高中数学教学法

（代数部分）

〔苏联〕 薩·耶·利亚平主編

李汉佩　陈昌平　雷垣　曹錫华等譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店經售

京华印书局印装

統一书号：7012·484　字数：306 千

开本：850×1168 毫米　1/32　印張：$12\frac{3}{16}$　插頁：2

1960 年 1 月第一版

1962 年 4 月第一次印刷

北京：1－13,000 册

定价：1.20 元

目　录

第一章　数的教学

§1. 无理数

无理数是中学代数課中特别困难的部分。要想在中学里对实数理論作出严密完整的闡述，一般地說，学生总是接受不了的。近代的教学法企图使中学的数学課处理得更加合乎科学性，这是一种良好的傾向，但是如果想按照魏尔斯特拉斯、康托和戴德金的实数理論的精神实質給中学的无理数課以合乎科学性的結构，那么无論我們做得怎样謹愼小心，都只会反而使这种良好的傾向遭到破坏。

許多老的中学教科书都是企图严格地处理无理数的。它們当中有些(例如，列别琴捷夫的，格拉維的，以及其它等等)还曾經因为他們的革新精神，它們在方法上、观点上的先进性以及在論述上的科学性而受到过人們的贊揚的。这种处理方法不但超出了教学大綱指示的范圍(在大綱中只要求給出无理数和它的运算的概念)，而且还会使認眞的学生受到直接的危害，使他們在意識上产生徒劳无益的过分紧張。

根据現有的教学計划，无理数是在八年級，而且是在学年的第一季度学习．就学生这时的一般知識和数学知識的发展水平来說，在不曲解思想内容的条件下，无論对教材作怎样的精簡，在讲解上作怎样的簡化，要使学生对无理数和它們的运算的本質有正确的观念，这是一个困难的任务．

在以前的大綱里公布过关于无理数的教学内容．其中列入："无理数概念．无限十进不循环小数．关于无理数运算的概念．"，但是沒有說明从分配給代数的"冪与方根"这整个单元的 30 課时，以及分配給几何的"相似图形"的 30 課时中，究竟拿出多少課时来用在无理数上．尽管課时的大体上的分配可以間接地說明必要的教材的范

圍，但是上面所說的教师們的这个合理的疑問却是沒有答案.

在进行无理数的教学时，教师們自然首先希望知道，在八年級究竟必須学习无理数理論中的哪些材料，究竟有多少課时可以用在这整个工作上面，必須学习的教材在时間上又如何分配，怎样才能保証自覺地掌握这些知識，怎样根据題材的特点来布置家庭作业，以及怎样才能保証不是形式主义地檢查学生掌握知識与完成家庭作业的情况等等．如果說，即使轟动一时的所謂教学法的現成方案，在任何情况下都不能令人滿意的話，那么对于大綱中的比較复杂的单元，特別是象八年級課程中的无理数这样的一些单元，更不应当仅仅給出一些一般原則性的考慮．这时只有充分詳細而具体的教学法指示才会对教师有实际的帮助.

由于八年級无理数的教学安排上的种种困难，往往迫使甚至于是有經驗的和熟練的教师也受到这样的誘惑：快一些和无論怎样去“逃过”大綱中这个不愉快的地方．也正因为这样，就常常碰到这样的情形：或者是講解上的不能容許的簡陋，或者是表面的、形式的流暢的叙述，看不出有什么明显的漏洞，但是除了两三个强記住的定义以外，差不多什么也沒有教給学生．构成这种虛假的太平景象，还有着另一因素，那就是由于这种講授的結果在学生的意識上所造成的“白色污点”不会馬上引起任何严重的后果，也并不妨碍他們順利地完成通常所給的关于“冪与方根”这一单元的典型的練习.

由于摆在教师面前的关于无理数教学的种种問題的特殊的复杂性，在接近中学的数学輿論界中引起了广泛的議論．也許大綱中的任何其他部分都不曾象中学的无理数教学这个問題那样引出了这么多的各种各样的文章．在这些文章中首先应当提出的是下列的三篇，这是有着很高水平的三篇．我們認为熟悉它們，对教师来說，是

很必要的.

1) А. Я. 欣欽, “中学的基本数学概念与数学定义”（教育出版社, 1940, 第 50 面).

这篇文章的 §4 討論了无理数, 它虽然只提出了一些原則性的和一般性的見解, 但是它以关于无理数教学上所必須遵循的方針的深刻見解武装了教师.

2) П. С. 亚历山大罗夫与 А. Н. 哥尔摩哥罗夫, “无理数”(“中学数学”杂志, 1941, №3, 第 1—15 面).

文章分13节, 它也是作者准备出版的代数教科书第二册中的一章. 至于教师在自己的教学工作中能运用这一章的教材到怎样的程度, 以及作为教科书而論, 当八年級学生依据它而在家里巩固課堂上所講授的材料时, 是否能够胜任, 这些都还是問題, 但是我們坚决推荐它作为教师必备的参考书. 虽然不是其中每一节都可以完全直接用到課堂上去, 但是整篇文章对教师在安排无理数的教学上提供了正确的方向和坚固的基础.

3) Г. М. 菲赫金哥尔茨, “中学里的无理数”(“中学数学”教学法汇編, 1947, 第二卷, 列宁格勒省教师进修学院出版, 第 24—44 面). 这篇文章是菲赫金哥尔茨在 1944 年向列宁格勒的教师們所作的演講經过修改而写成的.

这篇写得卓越而又簡朴的文章的特点首先是它所有的“中学的感情”. 它提供了在掌握无理数的整个工作上的詳細計划, 在一些情况下附以易于接受的証明, 并对于那些严格証明为学生所难于接受的定理, 給出了令人信服的数值例子. 可以說, 这篇文章作为教学法的与教材的参考資料是这样的具体, 它毫无疑义地可以帮助教师对于中学无理数教学上的几乎一切的基本問題都能获得答案.（可惜的是, 汇編出版的份数太少, 以致教师們不能广泛地利用菲赫金哥尔茨的文章.）

教师們也还应当熟悉其他有关无理数的文章．这不仅仅是一般地使人开扩眼界，而且也能使人知道近代教学法文献中关于学校里对无理数概念的各种不同的引入方法，而且特别重要的是，它还能使人对有关无理数教学法的一些具体問題进行独立思考时获得新的綫索．譬如說，在 D. K. 法捷耶夫与 И. C. 索明斯基的“代数”中，教师可以找到无理数作为“与单位长度无公度的綫段长”的定义，并且可以看見怎样在这个定义的基礎上进一步給出无理数的加法与乘法运算的定义．

卽使是当文章的作者对于中学无理数教学上的一般見解和欣欽，菲赫金哥尔茨，亚力山大罗夫与哥尔摩哥罗夫等人的文章中所含有的基本思想充分一致，但是細心的讀者却往往能在这些文章中发現对自已有益的新的和有趣的細节，或者在处理教材的某些关鍵上发現新的情景．譬如 B. M. 伯拉基斯“中学数学教学法”中．“无理数的引入．实数集．”这一段就带有这样的性質．

这里所概略介紹的教学法文献虽然还是不完全的，但似乎已經可以使教师認識到，无理数教学上修养的基本源泉是书籍．任何通常所見的那种专門的“教学法研究”都不能代替它．

下面我們将对教学法与教材組織提出一些附注．某些附注是对前面所提几篇文章的作者們的某些見解加以发揮或具体化．

1. 无理数的初步教学应当建立在代数与几何的緊密的关系上面．当代数課依照教学大綱講过“冪”以及方根的初步知識，而几何課講过“两条綫段的公度”与“求最大公度”以后，在学习无理数的这一整段时間內，代数課与几何課的形式上的差别最好能够廢除．由于課的联合，本来根据两套計划、两套大綱而平行地进行講授的課，現在用前后相继的課来代替，那么教师在講解互相关联着的代数与几何的教材部分时，就用不着勉强地去赶时間，并且在教学法上必須联合的部分就可以在联合課上去講．

2. 教师在八年級講授无理数时所面临的主要任务可以說是：引导学生去認識扩充数域的必要性，然后由此出发，使学生对无理数获得正确而且清楚的观念.

在大綱的說明部分說："在介紹复数以前，必須吸引学生的注意力轉到数的概念的发展."这当然是必須的. 但是，就在引入无理数的准备工作計划中，注意討論一下数的概念如何逐步扩充以致形成有理数集，这也将带来极大的好处.

数的概念的发展，这种思想有着如此巨大的教育意义，以致在两年之內把学生間断地重复两次地引到这个問題上面来，这是不能反对的. 而且这也不是簡单的重复：在八年級，扩充数域的必要性自然仅仅是由于直接的实用需要而引起的；而在十年級，除了狭义的实际需要之外，关于数学本身的內在需要的思考也在学生的意識中找到了立足点.

在引入无理数以前的这个序論的基本目的，是要把学生的思想引导到这个方向上去，即：正象以前一样，我們現在所有的数还不足以解决某些重要的实际問題. 因此在这个序論中应当特别着重指出，当时引出分数的原因之一是度量的問題，特别是綫段的度量問題. 在解决这个問題时曾經闡明，当被度量的綫段不恰好是单位綫段的整数倍数时，整数就不足以滿足度量的需要了. 和上面的情况相同，現在如果我們观察在綫段度量时所可能出現的一切情况，要最完滿的解决这个問題的話，那么我們就发現，一切有理数也还不能滿足度量的需要.

3. 在說明了在一切有理数中沒有能表达出$\sqrt{2}$的眞值这样的数以后，就应当指出，用数来表达和所选定的单位长沒有公度的綫段的长，有理数也不足以滿足这种需要. 2 的开方过程的无止境性以及和选定的单位长无公度的綫段的十分制度量法的无止境性直接就引导到一种新的，前所未見的数——无限不循环十进小数.

这样学生就有了完全的准备去理解通过引入新数——无限不循环十进小数来扩充他們的現有数域的必要性. 这些新的数不同于前此已有的用有限十进小数或无限循环十进小数表达出来的有理数, 这些数我們称它为"无理数". 无理数概念的定义至此就水到渠成了: 任何无限不循环十进小数都称为**无理数**. 并且最后, 把一切有理数与一切无理数合并成一个单一的数集, 就导向实数概念的形成.

在說明了任何与单位长无公度的綫段用十进制度量时, 它的长度要用无限不循环十进小数来表示以后, 就要說明它的逆命题, 即公設: 任何实数(有理数或无理数)都表达一定綫段的长度. 并且利用图象来对这个公設加以說明.

通过几何的途徑来引入无理数, 不仅是由于几何与代数的密切配合而产生鮮明的直观性, 而且非常重要的是, 可以使学生产生那样的一种糊涂观念的可能性降低, 即: 以为任何无理数都是开不尽的方根.

4. 数軸应当是利用来对整个单元中所碰到的各种命题进行解释的基本工具, 这是为了使講解几何化而广泛地使用的主要工具. 它可以帮助学生形象地理解到: 当在数軸上只引进有理点时, 軸上就出現"点漏洞", 而引进无理数以后, 这些"漏洞"就完全被填满了. 同时也可以使学生更好地掌握基本的命题: 軸上一切点所成的点集与实数集之間有着一一对应的关系.

5. 在建立起无理数相等与不相等的概念以后(通过相应的数值例子的驗証, 对于这些概念的定义加以掌握, 通常是不会有什么特殊困难的), 就应当討論无理数的运算. 必須指出, 正是在这里, 教师碰上了最大的困难, 而且到現在为止在現有的教材——教学法文献中, 对于这一部分教材究竟采取怎样的一种教学方法才算妥善, 也还是一个未曾完全解决的問題.

实际上, 一方面学生从早期学习中所受的訓練应当理解到, 旧的

数的运算定义和它們的性質不能机械地搬用到新数上面去.譬如說,在他們的意識中应当清晰地牢記着,当引入新数时,数的乘法运算每一次都必須重新討論和重新下定义,他們应当記得,在引入新的定义以前,分数或負数的运算是沒有意义的. 但是另一方面,毫无疑問,要在八年級对无理数乘法的定义和它們的性質作邏輯上任何有价值的討論,都会使学生感到不能胜任的(也許在十年級是可以的).那么这一部分教材应当怎样教呢?我們認为,解决这个問題的一种可能方法是象下面所講的那样.

大綱只要求获得关于无理数运算的"概念",因此显然可以仅仅討論以下的一些問題:一般說来,无理数是否可以相加(这时要記住,它們是用无限十进小数表达出来的),也就是,是否有这样的数可以作为它們的和?并且如果这些数是可以相加的話,那么如何进行加法运算?关于无理数的乘法可以提出同样的問題.

我們認为对八年級的学生来說,关于无理数的和与积是否存在这个根本的原则性問題,只能在几何直观的基础上求得解决.两个无理数的和(或者一个有理数与一个无理数的和)可以看作两条綫段的和,而綫段的和总可以通过作图的方法求出来的,——这也就表示,存在着并且是唯一地存在着一个数,它是两个无理数的和.接着可以通过数值的例子来說明,无理数的和总是包含在相加項的不足近似值的和与过剩近似值的和之間,因此也就可以求出作为所給无理数的和的无限十进小数的任何多位数来(也就是說,求出和的近似值到任何的精确度).关于无理数相乘的問題,可以类似地解决.只要把它們的积看作为这样的一个数,它表示矩形的面积,而矩形的两条边是表示所給因子的綫段.应当注意,一个很值得注意的数值例子是$\sqrt{2}$乘$\sqrt{2}$,而用无限十进小数把$\sqrt{2}$表达出来.

6.在学习无理数时,必須經常使学生自觉地并巩固地运用以往課程中——主要地是算术課程中的一些重要結論. 在象无理数这样

的一些难于掌握的題材中，把学生的注意力从講解的主要綫索轉移到重温业已遺忘的法則或結論上去，那是一种危险的作法. 特别是，如果为了理解当前的教材而去复习已忘的教材以致显著地花費时間的話，那就更加应該避免的了. 因此在这里(在其他更复杂地方也是一样)最好事先选出以后要用到的一些东西，在特設的复习課中去复习.

必須彻底复习的教材应該包括以下的一些:

a) 把普通分数化为十进小数.

b) 説明普通分数能化为有限十进小数的条件.

c) 説明普通分数化为无限十进循环小数的条件.

d) 十进小数的精确到 0.1, 0.01 等等的不足近似值与过剩近似值.

复习課也可以用来完成某些練习，这些練习的結果在将来学习无理数要用到的. 例如最好事先造出$\sqrt{2}$的近似值的表.

7. 凡是不損害教科书对教材的处理的地方，都可以加以簡化. 这种可能性不应当被忽視. 譬如，用比較簡单明了的証明来代替(教科书中所給的) 某些比較复杂的証明，毫无疑問会使学生感到輕松愉快. 我們試看两个命題:

a) 任何有理数的平方都不等于 2.

b) 正方形的对角綫与它的一边不可公度.

对于第一个命題，最好就采用欧几里得的古典証明，而对于第二个命題，最好不用算术中所用的逐步分割的学生比較难于接受的方法，而用基于比較两个正方形面积的非常簡单而巧妙的方法. 鉴于吉西略夫的課本中沒有这两个簡单的証明，我們在这里写出来，将是有好处的.

定理. 任何有理数的平方都不等于 2.

因为 $1^2<2<2^2$，所以显然任何整数的平方都不等于 2. 下面利

用反証法.

設有既約分数$\frac{p}{q}$(p与q皆为自然数),使$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. 則 $p^2=2q^2$,因而 p^2 可被 2 整除. 这就必須 p 为偶数. 但因$\frac{p}{q}$为既約分数,所以 q 为奇数. 以 $2n$ 表示这偶数 p,则得 $4n^2=2q^2$, 亦卽 $2n^2=q^2$, 也就是説, q 也是偶数. 这个矛盾就証明了定理的結論.

推論. $\sqrt{2}$ 的眞值不能用任何有理数来表示.

定理. 任何正方形的对角綫与它的一边都不可公度.

也用反証法: 設正方形 $ABCD$ 的对角綫(AC)与一边(AB)可以公度, 这就表示有某一綫段——卽 AB 与 AC 的公度——使 AC 与 AB 都为它的整数倍数. 設 AC 为它的 p 倍, 而 AB 为它的 q 倍. 选取这条綫段作为度量单位, 則正方形 $ABCD$ 含有 q^2 个单位面积, 而以对角綫 AC 为边所作的正方形 $AEFC$ 含有 p^2 个单位面积.

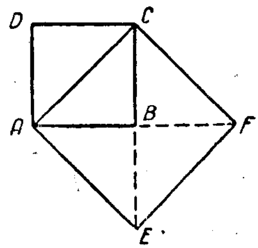


图 1

$$\triangle ACD=\triangle ABC=\triangle AEB=\triangle BEF=\triangle BFC,$$

因此正方形 $AEFC$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积的两倍. 也就是説, $p^2=2q^2$. 由此得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. 但$\frac{p}{q}$是有理数.

揭发出的矛盾(2 的平方根竟能用有理数$\frac{p}{q}$表达出来!)就証明了定理的結論的正确性.

8. 卽使教师仔細地鉆研过教材, 对它的內容和教学方法有了清晰的概念,他在这个单元的課堂教学組織工作中还会碰到很多困难. 必須想到一桩无可爭辯的事实,那就是課的类型、家庭作业的內容与形式、向学生提問的特点、檢查家庭作业的方法等等都不能够是一成不变的. 所有这些工作无疑地是与題材的內容、特点与其困难程度以及学生的一般知識与数学知識的发展水平有着密切关系的. 譬如,

在十年级完全可以容許某些演講式的教学，但是在八年级，演講式的課会完全丧失它的教育作用．在八年級无理数的教学工作中，在課的类型、家庭作业的形式、提問的性質等方面都发現过不少根本的缺陷．其中主要的是下面的一些：

新教材的講解用近于演講的形式进行．間歇只是为了使学生能够根据教师的口授記下某些句子来．

学生在整堂課的大部分时間中都是很不主动的．

在一堂課中，練习与理論性的檢查問題、計算工作、制作图象工作等等都十分不够．課上得很单調，学生的注意力不集中．

家庭作业并不反映課堂工作的全部內容，而仅仅包含为数不多的要求背熟的一些定义和法則．須要在家中独立地去完成的作业很少．

課堂提問是依据学生的家庭作业的性質来进行的．家庭作业的檢查也是这样．

这就是无理数課的一般情景．无怪乎学生对无理数理解含糊，有时甚至于完全曲解了．

当然，在包括八到十年級的整个数学課程的教学法参考书的范圍之內，不可能詳尽地討論到与課程各部分的課堂組織工作有关的各方面的問題．但是我們认为：前面提出了在无理数教学过程組織上的一些典型的缺点也就指出了克服这些缺点的道路了．

現在我們只来討論一下最大的缺点之一，即过分偏重于抽象理論的学习．这种偏向的主要表現之一是在于在講課和家庭作业中缺少各种各样的練习．而如果这些練习經过精选以后，毫无疑問是能够帮助学生不是形式地而是充分自覺和牢固地掌握八年級无理数課的基本內容的．

首先应当指出，在拉里切夫的习題集中，关于无理数有着大量的好习題，这些习題应当比在目前的教学实踐中所見的更多地采用．我

們所指的是第145—151与374—376题(1952年版)，其中每一题都包含几个問題和練习. 除此以外，在某些場合下，可以容易編造出一些練习作为家庭作业，通过这些練习可以檢查出学生对課堂上所講的东西究竟是否自覚地掌握了. 例如，如果学生完全了解“任何有理数的平方都不等于2”这个定理的証明，那么就可以让他們証明一下:“任何有理数的平方都不等于3”，甚至于可以让他們証明:“$\sqrt[3]{5}$的眞值不能用有理数来表达.”

最后，广泛地使用口头的与半口头的練习，会使上課变得生动活潑，幷且也会带来很大的好处. 这些練习包括理論上的問題，“短小精悍”的习題，計算的与制图的作业(就在課堂上做或拿回家去做). 下面就是一些这样的練习（其中一部分是拉里切夫习題集中的練习的复制品):

1）能否断定: 与单位綫段有公度的綫段的长必为整数或有限十进小数.

2）綫段a的长等于单位綫段的十六分之一的21倍. 試把綫段a的长表达为十进小数.

3）綫段a的长等于单位綫段的七分之一的15倍. 試問綫段a的长为有限十进小数或无限十进小数? 指出这小数的准确到0.001的不足近似值与过剩近似值.

4）为什么把普通小数化为十进小数时，不能得到无限不循环十进小数?

5）无理数π表达为无限十进不循环小数是3.141592……. 試問π与$\sqrt{10}$那个大些?

6）以綫段b为单位綫段时，綫段a与綫段b不可公度. 試問以綫段a为单位綫段时，它們是否可公度?

7）能否断定: 等腰直角三角形的边与弦必不可公度?

8）能否断定: 等腰直角三角形的边与弦上的高不可公度?

9）設綫段 a 与 b 不可公度．試問綫段 $\frac{a}{5}$ 与 $\frac{b}{2}$ 是否可公度？

10）順次联結已知正方形各边中点得到一个內接的正方形，用同样方法作出这內接正方形的內接正方形．試問第三个正方形的边与已知正方形的边是否可公度？

11）我們証明过，$\sqrt{2}$ 的眞值不能表达为既約分数 $\frac{p}{q}$．能否認为：有非既約分数，它的平方可以等于 2？

12）証明："任何有理数的平方都不等于 5．"

13）$\sqrt{3}$，$\frac{97}{56}$ 与 $\frac{71}{41}$ 三数中，哪个最大，哪个最小？

14）3.4842 与 $6\sqrt{2}$ 哪个大？

15）2 与 $\sqrt{2}$ 能否相加？

16）利用数軸，作出和 $2+\sqrt{2}$ 的值．

17）計算 $2+\sqrt{2}$ 准确到 0.001．

18）計算两个无理数：1.232332333…… 与 $\sqrt{3}$ 的和准确到 0.001．

19）两个无理数的和能否等于有理数？并举例子說明．

20）有理数与无理数的和能否等于有理数？并举例子說明．

21）两个无理数的差能否等于有理数？并举例子說明．

22）两个无理数的积能否等于有理数？并举例子說明．

23）是否每个实数都对应着数軸上一点？

24）是否数軸上每一点都对应着一个实数？

25）解釋下面的命題的涵义："一切实数所成的集与数軸上一切点所成的集成一一对应的关系．"

以上所举練习連同拉里切夫的习題集以及依格納捷夫的习題集中的練习一起，就已足够用来使学生巩固知識，使上課变得生动活潑丰富多彩并且使学生的主动性显著提高了．