中央电视台教育节目用书

统计数学基础知识

洪含淳 编

中国统计出版社

中央电视台教育节目用书

统计数学基础知识

洪含淳　编

中国统计出版社

中央电视台教育节目用书

统计数学基础知识

洪含泽 编

中国统计出版社出版发行
清华大学印刷厂排版
湖北汉阳县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 13.8125印张 30万字
1984 年 3 月第 1 版 1984年12月 北第二次印刷
印数：460001～480000

统一书号：4006.033 定价1.40元

目　录

第一章　一些必要的初等代数知识

§1　数的概念

数是怎样产生的？和一切事物一样，是广大劳动人民由于生产实践的需要逐渐产生和发展起来的。在古时候，人们是不知道用自然数来计算物体的个数的。例如牧童放羊群出去吃草，每走出一支羊，就随即拿进一块石子。到了傍晚赶着羊群回来，每走进一只羊，就随即拿出一块石子，假如羊都进来了，石子刚巧拿完，他就能放心地去睡觉；假如羊都进来了，屋内还有石子，他就知道丢了羊，赶快出去寻找。牧童就是这样拿一块石子对应一只羊来计算羊的只数的。这种计算方法很不方便。

随着生产的发展和生活实践的需要人们想出一个办法，把一个物体叫做一个单位。一个单位上加上一个单位，在所得结果上再加上一个单位，这样依次做下去，就得到一列自然数

一、二、三、四、五、六、七、……

这样人们便可以数数及计算劳动果实了。

随着商品交换次数的增加，自然数和零便不能满足人们需要。如一件工作，三个人完成，每个人完成多少呢？这就要引进分数。我们称这些数为算术数。随着人类社会的发展，收入与支出、前进与后退，上升与下降等等成对具有相反方向（或相反意义）的量大量出现，如果我们仍然只用算术数表示，就会含糊不清，因此就必须引进新的数，从而使数的范围不断扩

大。现将在中学数学里我们已经学过的数列表如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（也叫自然数），如 1，2，3，……
      - 零
      - 负整数，如 −1，−2，−3，……
    - 分数
      - 正分数，如 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，0.2，0.68，……
      - 负分数，如 $-\frac{1}{2}$，−0.2，−0.68，……
  - 无理数
    - 正无理数，如 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$，$\pi=3.14159\cdots$，…
    - 负无理数，如 $-\sqrt{2}$，$-\pi=-3.14159\cdots$，…

在统计工作中，除了要用到有理数外，无理数也是常用的，如计算标准差及抽样误差时要运用开平方根的方法，就需要无理数的概念。所谓无理数，就是无限不循环小数。这种数主要是由根式运算而产生的。自然对数的底 $e=2.71828\cdots\cdots$，就是一个特殊而重要的无理数。它在微积分中非常有用。另外，实数的性质有以下五点：

1．有序性。所有的实数，都可用数轴上的点来表示，任意两实数都可以比较它们的大小。

2．稠密性。任意两实数之间必然还有实数存在。

3．连续性。所有的实数与数轴上的所有点能建立一一对应的关系。

4．在实数中，无最小的数，也无最大的数。

5．在实数范围中，永远能施行加、减、乘、除四种运算（除数不得为零）。

§2 指数与根式

一、指数

1．正整指数定义：当 n 个 a 相乘时，即

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}$$

记作 a^n，读作 a 的 n 次方。

若 $a^n=b$，则 b 叫做 a 的 n 次幂，a 叫做底数，n 叫做指数，例如 $3^4=81$，81 叫做 3 的 4 次幂，3 是底数，4 是指数。

2． 指数的运算法则：

设 m、n 都是自然数即正整数，有：

法则 1： $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

证 $$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{个}}\times\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{(m+n)\text{个}}=a^{m+n}$$

例 1 计算 $2^4\times 2^5$

解 $2^4\times 2^5=2^{4+5}=2^9=512$

例 2 计算 $2^3\times 2^4\times 3^2$

解 $2^3\times 2^4\times 3^2=2^{3+4}\times 3^2=2^7\times 3^2=1152$

法则 2： $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}(a\neq 0,\ m>n)$

证 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{m\text{个}}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}}=a^{m-n}\quad(m>n)$$

例 3 计算 $\frac{3^5}{3^2}$

解 $$\frac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3=27$$

法则 3：$(a^m)^n=a^{mn}$

证 $$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdots a^m}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{个}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{个}}\cdots\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{个}}}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\cdot m\text{个}}$$

$$=a^{mn}$$

例 4 计算 $(3^2)^4$

解 $$(3^2)^4=3^{2\times4}=3^8=6561$$

法则 4：$(ab)^n=a^nb^n$

证 $$(ab)^n=\underbrace{ab\cdot ab\cdots ab}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n\text{个}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdots b)}_{n\text{个}}$$

$$=a^nb^n$$

例 5 计算 $(2\times5)^3$

解 $$(2\times5)^3=2^3\times5^3=8\times125=1000$$

法则 5：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\quad(b\neq0)$

证 $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n\text{个}}$$

$$=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n\text{个}}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n\text{个}}}=\frac{a^n}{b^n}$$

例 6 计算 $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^2$

解 $$\left(1\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$$

注意，不要发生以下的错误，如：

(1) $a^3+a^4=a^{3+4}$

(2) $\dfrac{a^3+b^2}{a^2}=a+b^2$

(3) $a^2\cdot a^3=a^{2\times3}$

(4) $a^{2^3}=a^{2\times3}$

3． 指数概念的推广：

(1) 零指数：定义 $a^0=1\quad(a\neq0)$

证　在 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 中，当 $m=n$ 时，

$$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0$$

而 $\frac{a^n}{a^n}=1$

$\therefore\quad a^0=1$

例 7　计算　2^0，$(-1)^0$，0^0

解　$2^0=1$

$(-1)^0=1$

0^0 无意义

(2) 负指数：定义 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$　($a\neq0$，n 为正整数)

证　在 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 中，当 $m=0$ 时

$$\frac{a^0}{a^n}=a^{0-n}=a^{-n}$$

而 $\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}$

$\therefore\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

例 8　计算　3^{-2}；$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$；

解 $$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{1}{8}}=-8$$

(3) 分数指数

1° 正分数指数 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（当 $a<0$，m 为奇数而 n 为偶数时，无意义）。

2° 负分数指数 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（当 $a\neq0$，且 $a<0$，m 为奇数，n 为偶数时，无意义）。

证 1° ∵ $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$

而 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$

∴ $(a^{\frac{m}{n}})^n=(\sqrt[n]{a^m})^n$

即 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

（2° 证明略）

例 9 计算 $81^{\frac{1}{2}}$； $9^{-\frac{3}{2}}$；

解 $81^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9$

$$9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9^3}}=\frac{1}{27}$$

指数运算法则，对于以上推广后的零指数、负指数、分数

指数完全适用。分数指数的规定，不仅使根式与指数式得到统一，而且也使许多根式运算及有关根式的变形问题大为简化。

4． 指数运算的例题：

(1) 计算 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}$

解 原式 $=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}+1+1=4+1+1=6$

(2) 计算 $(-3)^{3}-(-3)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}$

解 原式 $=(-27)-\frac{1}{(-3)^{3}}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}}-\left(-\frac{1}{27}\right)$

$=-27+\frac{1}{27}-27+\frac{1}{27}$

$=-54+\frac{2}{27}=-53\frac{25}{27}$

(3) 计算 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$

解 原式 $=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}\times\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}\div 1$

$=\frac{27}{8}\times 4\div 1=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$

(4) 计算 $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$

解　原式 $=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{2+3}{6}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}$

(5) 计算 $a^{\frac{3}{2}}\div a^{-\frac{1}{2}}$

解　原式 $=a^{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=a^2$

(6) 计算 $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^0-0.125^{-\frac{1}{3}}$

$$
\begin{aligned}
\text{解　原式} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+1-\frac{1}{0.125^{\frac{1}{3}}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times\frac{1}{2}}+1-\frac{1}{(0.5^3)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{2}{3}+1-\frac{1}{0.5} \\
&= \frac{2}{3}+1-2 \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

二、根式：

1. 方根的定义：

在指数式 $x^n=a$ 中，若已知 a、n，求 x，则称 x 为 a 的 n 次方根。a 叫做被开方数，n 叫做根指数。求 a 的 n 次方根的运算，叫做开 n 次方。习惯上，当 $n=2$ 时，$\sqrt[2]{a}$ 简记为 $\sqrt{a}$。

必须注意：

(1) a 的 n 次方根，如果只有一个，就用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示（其中记号 $\sqrt{\ }$ 叫根号）；如果有正负两个，就用符号

$\sqrt[n]{a}$ 表示正的一个，而 $-\sqrt[n]{a}$ 表示负的一个。

例如，32 的五次方根只有一个 2，用符号表示就是 $\sqrt[5]{32}=2$；-1 的 7 次方根只有 1 个 -1，用符号表示就是 $\sqrt[7]{-1}=-1$。

又如，4 的平方根有两个，一个是 2，另一个是 -2，所以 4 的平方根用符号表示就是 $\sqrt{4}=2$ 和 $-\sqrt{4}=-2$，其中正根叫算术根。

(2) 在实数范围内，负数无偶次根，如 -4 的平方根在实数范围内是不存在的（因为任何实数的平方不会得负数），即 $\sqrt{-4}$ 无意义。

2．根式的意义：

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，当 n 是奇数时，a 可以是任何实数；在 n 是偶数时，a 必须大于或等于零，否则，根式无意义。

例如，$\sqrt[3]{-5}$，$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ 等都是根式；

而 $\sqrt{-2}$，$\sqrt[4]{-\frac{1}{3}}$ 等就不是根式；

又如 $\sqrt{x-1}$，当 $x\geqslant1$ 时根式才有意义。

当 n 为奇数时，只有一个奇次根

如 $\sqrt[3]{8}=2$；$\sqrt[3]{-8}=-2$.

当 n 为偶数，$a\geqslant0$ 时，偶数根有两个

如 $\sqrt{9}=3$，$-\sqrt{9}=-3$

$\sqrt[4]{16}=2$，$-\sqrt[4]{16}=-2$

3．根式的运算：

在统计中计算平均发展速度及抽样误差等时，常需要用这种运算。

由于根式可以写成分数指数的形式，所以根式运算可化成指数运算去做。

例 1 $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}=2a^{\frac{1}{n}}=2\sqrt[n]{a}$

例 2 $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{m}}\cdot a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=a^{\frac{m+n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$

例 3 化简 $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}$

解 原式 $=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x\cdot x^{\frac{1}{6}}}$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}{x^{1+\frac{1}{6}}}$$

$$=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{6}}=x^{0}=1$$

例 4 化简 $\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}\right)^3$

解 原式 $=\{[a\cdot(a\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\}^3$

$$=\{[a\cdot(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\}^3$$

$$=\{[a\cdot a^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}}\}^3$$

$$=\{[a^{\frac{5}{3}}]^{\frac{1}{2}}\}^3$$

$$=\{a^{\frac{5}{6}}\}^3=a^{\frac{5}{2}}=\sqrt{a^5}=a^2\sqrt{a}$$