北京市职工初中文化补课课本

代数

下册

北京出版社

北京市职工初中文化补课课本

代　　数

下　册

北 京 出 版 社

北京市职工初中文化补课课本

代　数

下　册

北京市工农教育研究室编

•

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街51号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

•

1983年1月第1版　　1984年4月第3次印刷

书号：K 7071·856　　定价：0.38元

目　录

第五章　二元一次方程组……………………………（1）
第六章　分式……………………………………………（18）
　　一　分式及其基本性质…………………………（18）
　　二　分式的运算……………………………………（30）
第七章　数的开方和二次根式……………………（51）
　　一　数的开方………………………………………（51）
　　二　二次根式………………………………………（63）
第八章　一元二次方程………………………………（99）
　　一　一元二次方程及其解法……………………（99）
　　二　一元二次方程根的判别式及根与系数的关系…………………………………（118）
第九章　分式方程和无理方程……………………（132）
　　一　分式方程………………………………………（132）
　　二　无理方程………………………………………（150）

第五章　二元一次方程组

5.1　二元一次方程组

在实际问题中，有时要求几个未知数，由于数量关系复杂，如果仅用一元一次方程来解，列方程就比较困难．因此，需要学习新的知识．

先看下面的问题：

某车间有 28 名工人，生产螺栓和螺母，每人每天平均能生产螺栓 12 个或螺母 18 个．应分配多少人生产螺栓，多少人生产螺母，才能使螺栓和螺母刚好配套（一个螺栓套两个螺母）？

在这个问题中有两个未知数，生产螺栓人数和生产螺母人数，可以设生产螺栓的人数为 x，生产螺母的人数为 y．未知数与已知数之间有以下的等量关系：

（1）生产螺栓的人数与生产螺母的人数共 28 人；

（2）每天生产螺母的总数是生产螺栓总数的 2 倍．

根据上述关系，我们可以列出两个方程：

$$x+y=28; \tag{1}$$

$$2\times 12x=18y，即\ 24x=18y. \tag{2}$$

方程（1）和（2）都是含有两个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1，这样的方程叫**二元一次方程**，能够适合于二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一组解．比如方程（1）的解，如下表：

如果 x	…	0	…	1	…	10	…	12	…	18	…
那么 y	…	28	…	27	…	18	…	16	…	10	…

方程（2）的解，如下表：

如果 x	…	3	…	6	…	9	…	12	…	18	…
那么 y	…	4	…	8	…	12	…	16	…	24	…

可见，每个二元一次方程都有无数组解。

但是，上面的问题是要求既适合于方程（1），又适合于方程（2）的 x 和 y 的值，也就是要求出这两个方程的公共解。

从表上可以看出，$\begin{cases} x=12, \\ y=16 \end{cases}$ 就是方程（1）与（2）的公共解。

由于 x 和 y 的值要同时适合于方程（1）与方程（2），因此，我们把这两个方程联合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=28, \\ 24x=18y, \end{cases}$$

叫做二元一次方程组。

一般地，由几个方程组成的一组方程，叫做**方程组**。由几个一次方程组成的、含有两个未知数的方程组，叫做**二元**

一次方程组．例如

$$\begin{cases}x-13=0,\\x+y=7;\end{cases}\quad\begin{cases}2x+y=5,\\4y+x=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1,\\\dfrac{x}{3}+4y=0\end{cases}\text{等．}$$

方程组里各个方程的公共解，叫做这个**方程组的解**．求方程组的解的过程，叫做**解方程组**．

本章中所说的二元一次方程组，都是指由两个一次方程组成的二元一次方程组．

5.2 代入消元法

前面我们用列表的方法可以求得方程组的解，但这种方法太麻烦，因此，需要另找解法．

二元一次方程组与一元一次方程的根本区别在于多了一个未知数，所以求解的基本思路是消去一个未知数（称为消元法），化方程组为一元一次方程来解．

例 1 解方程组 $\begin{cases}x+y=28, & (1)\\24x=18y. & (2)\end{cases}$

解：把方程（1）变成

$$x=28-y. \tag{3}$$

如果（3）和（2）有公共解，那么（3）、（2）中同一个未知数应取相同的值，因此（2）中的 x 可用（3）中表示 x 的代数式 $28-y$ 来代替．把（3）代入（2），得

$$24(28-y)=18y. \tag{4}$$

由（4），得 $672-24y=18y$,

$42y=672$,

$y=16$.

把 $y=16$ 代入 (3)，得　$x=12$.

检验：把 $x=12$，$y=16$ 代入 (1)，得

左边 $=12+16=28$，右边 28，

左边 $=$ 右边.

再代入 (2)，得

左边 $=24\times12=288$，右边 $=18\times16=288$，

左边 $=$ 右边.

$\therefore\ \begin{cases}x=12,\\ y=16\end{cases}$ 是原方程组的解.

(以后检验可不必写出)

例 2　解方程组 $\begin{cases}5x+2y=11, & (1)\\ 3x-2y=-3. & (2)\end{cases}$

解：由 (1) 得

$$y=\frac{11-5x}{2}. \tag{3}$$

把 (3) 代入 (2)，得

$$3x-2\cdot\frac{11-5x}{2}=-3. \tag{4}$$

由 (4)，得　$x=1$.

把 $x=1$ 代入 (3)，得　$y=3$.

$\therefore\ \begin{cases}x=1,\\ y=3\end{cases}$ 是原方程组的解.

代入消元法的一般步骤：

1. “变”——把方程组中的一个方程变形，用含有一个

未知数的代数式表示另一个未知数。

2. "代"——把变形后的等式代入另一个方程，这样就消去了一个未知数.

3. "解"——解所得的一元一次方程，得到一个未知数的值，然后再设法求另一个未知数的值，从而得到方程组的解。

习 题 一

1. 在 $\begin{cases}x=0,\\y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=1,\\y=-5\end{cases}$ 各对数值中，

(1) 哪些是方程 $2x-y=7$ 的解？

(2) 哪些是方程 $x+2y=-4$ 的解？

2. 用含 x 的代数式表示下列方程中的 y：

(1) $2x+y=3$；　(2) $3x-y=2$；

(3) $x+3y=0$；　(4) $2x-3y+5=0$.

3. 下列方程组中，哪些是二元一次方程组？哪些不是？为什么？

(1) $\begin{cases}x+3y=5,\\2x-y=3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x+3y=6,\\x^2-y^2=8;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+3y=3,\\\dfrac{x}{6}+\dfrac{2y}{3}=1;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x+3y=2,\\\dfrac{6}{x}-2y=3.\end{cases}$

4. 用代入法解下列方程组，并写出检验：

(1) $\begin{cases}y=2x,\\7x-3y=1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x+5z=6,\\3x-6z=4.\end{cases}$

---

5. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 6x-5y=-1, \\ x=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2s=3t, \\ 3s-2t=5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3m-4n=7, \\ 9m-10n-25=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{u}{4}+\dfrac{v}{4}=5, \\ \dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{6}=1; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 15x-2.5y-20=0, \\ 4x-10y+32=0. \end{cases}$

5.3 加减消元法

有些方程组还可以用更简捷的方法来解．如上节中的例2，这个方程组有一个特点，方程（1）和（2）中，未知数y的系数互为相反数，把（1）和（2）相加，正好消去未知数y，得到一个一元一次方程．

(1)+(2)，得

$$8x=8,$$

$$x=1.$$

把$x=1$代入（1），得　$y=3$．

经过检验，$\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$是原方程组的解．

如果所给的方程组中，某个未知数的系数的绝对值不相等，直接把这两个方程的两边分别相加或相减，都不能消去一个未知数．此时，可以根据等式的性质，把每个方程分别乘以一个适当的数，使得同一个未知数的系数的绝对值相等，然后再进行加或减．

例 1 解方程组 $\begin{cases} x+y=2, & (1) \\ 2x+3y=5. & (2) \end{cases}$

解：(1)×2，得

$$2x+2y=4. \quad (3)$$

(2)—(3)，得　$y=1$.

把 $y=1$ 代入(1)，得　$x=1$.

∴ $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 是原方程组的解.

例 2 解方程组 $\begin{cases} 2x+3y=7, & (1) \\ 3x-2y=-9. & (2) \end{cases}$

解：(1)×3－(2)×2，得

$$13y=39,$$

$$y=3.$$

把 $y=3$ 代入 (1)，得

$$x=-1.$$

∴ $\begin{cases} x=-1, \\ y=3 \end{cases}$ 是原方程组的解.

加减消元法的一般步骤：

1. “变”——把方程组中某个未知数的系数变成绝对值相等的数.

2. “加或减”——把变形后的两个方程相加或相减，从而消去一个未知数.

3. “解”——解所得的一元一次方程，得到一个未知数

的值，再设法求另一个未知数的值，从而得到方程组的解。

例 3 解方程组 $\begin{cases} 3x+2y-z=3, & (1) \\ 2x+3y+z=12, & (2) \\ x+y+2z=11. & (3) \end{cases}$

解：由（1），（2）消去 z：

$(1)+(2)$，得 $5x+5y=15.$ (4)

由（1），（3）消去 z：

$(1)\times 2+(3)$，得 $7x+5y=17.$ (5)

由（4），（5）消去 y：

$(5)-(4)$，得 $2x=2,$

$x=1.$

把 $x=1$ 代入（4），得 $y=2.$

把 $x=1$，$y=2$ 代入（2），得 $z=4.$

$\therefore \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=4 \end{cases}$ 是原方程组的解。

象例 3 这样的方程组，叫做**三元一次方程组。**

习 题 二

1. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+y=8, \\ 2x-y=7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3m+2n=16, \\ 3m-2n=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2z=9, \\ 3x-z=-1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x+2y=25, \\ 3x+4y=15; \end{cases}$

(5) $\begin{cases}3x-7y=1,\\5x-4y=17;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}4x-15y-17=0,\\6x-25y-23=0.\end{cases}$

2．用两种方法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{m}{5}-\dfrac{n}{2}=2,\\2m+3n=4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x-z=5,\\5x+2z=25.2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}6x+5z=25,\\3x+4z=20;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2s+5t=\dfrac{1}{2},\\3s-5t=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

3．解方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y+z=4,\\2x+3y-z=12,\\x+y+z=6;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}z=x+y,\\2x-3y+2z=5,\\x+2y-z=3.\end{cases}$

4．解下列方程组：

(1) $\begin{cases}v=2.6+9.8t,\\\dfrac{v}{3}-3t=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x+y=2800,\\96\%x+64\%y=2800\times 92\%.\end{cases}$

5.4．一次方程组的应用题

例 1 运往某地的两批物资，第一批 360 吨，用 6 节火车车皮和 15 辆汽车装完；第二批 440 吨，用 8 节火车车皮和 10 辆汽车装完．问每节火车车皮和每辆汽车平均各装多少吨？

分析：这个问题里有两个未知数——每节火车车皮和每辆汽车平均所装的吨数．未知数与已知数之间有两个等量关系：

(1) 6×每节火车车皮平均所装的吨数+15×每辆汽车平均所装的吨数=360；

(2) 8×每节火车车皮平均所装的吨数+10×每辆汽车平均所装的吨数=440。

解：设每节火车车皮平均装x吨，每辆汽车平均装y吨．根据题意可列出方程组：

$$\begin{cases}6x+15y=360, & (1)\\ 8x+10y=440. & (2)\end{cases}$$

(2) $\times\frac{1}{2}-(1)\times\frac{1}{3}$，得

$$2x=100,$$

$$x=50.$$

把$x=50$代入(2)，得

$$8\times50+10y=440,$$

$$10y=40,$$

$$y=4.$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x=50,\\ y=4.\end{cases}$$

答：每节火车车皮平均装50吨，每辆汽车平均装4吨。

例2 玻璃厂熔炼玻璃液，原料是由石英砂和长石粉混合而成，要求配料中含二氧化硅70%，根据化验，石英砂中含二氧化硅99%，长石粉中含二氧化硅67%。在3.2吨原料中，石英砂和长石粉各需多少吨？

分析：这个问题中有两个未知数——石英砂的吨数与长石粉的吨数．未知数与已知数之间有两个等量关系：

（1）石英砂的吨数＋长石粉的吨数＝3.2；

（2）石英砂的吨数×99%＋长石粉的吨数×67%＝3.2×70%．

解：设需石英砂 x 吨，长石粉 y 吨．根据题意，可以列出方程组：

$$\begin{cases} x+y=3.2, & (1) \\ x\cdot 99\%+y\cdot 67\%=3.2\times 70\%. & (2) \end{cases}$$

由（1），得

$$x=3.2-y. \quad (3)$$

把（3）代入（2），得

$$(3.2-y)\cdot 99\%+y\cdot 67\%=3.2\times 70\%. \quad (4)$$

由（4），得　$32y=92.8$，

$$y=2.9.$$

把 $y=2.9$ 代入（3），得

$$x=0.3.$$

$$\therefore \begin{cases} x=0.3, \\ y=2.9. \end{cases}$$

答：需石英砂 0.3 吨，长石粉 2.9 吨．

例 3　汽车从甲地到乙地，若每小时行驶 45 公里，就要延误 $\frac{1}{2}$ 小时到达，若每小时行驶 50 公里，就可提前 $\frac{1}{2}$ 小时到达，求甲乙两地间的距离及原计划行驶的时间．

分析：这个问题中，有两个未知数——甲乙两地间的距

离，及原计划行驶的时间．未知数与已知数之间有两个等量关系：

(1) $\dfrac{\text{甲乙两地间的距离}}{45\text{ 公里}}-\dfrac{1}{2}$小时＝原计划行驶的时间；

(2) $\dfrac{\text{甲乙两地间的距离}}{50\text{ 公里}}+\dfrac{1}{2}$小时＝原计划行驶的时间．

解：设甲乙两地间的距离为 s 公里，原计划行驶的时间为 t 小时．根据题意，可列出方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{s}{45}-\dfrac{1}{2}=t, & (1)\\[2ex] \dfrac{s}{50}+\dfrac{1}{2}=t. & (2)\end{cases}$$

(1)－(2)，得

$$\frac{s}{45}-\frac{s}{50}-1=0. \qquad (3)$$

由 (3)，得　$s=450$。

把 $s=450$ 代入 (1)，得　$t=9.5$。

$$\therefore\quad \begin{cases}s=450,\\ t=9.5.\end{cases}$$

答：甲乙两地间的距离为 450 公里，原计划行驶的时间为 9.5 小时．

习　题　三

1．机械厂加工一种齿轮，需要车铣两道工序．一台车床每天可以加工齿轮 30 个，一台铣床每天可以加工齿轮 10 个．现在有机工 8 人担任加工这批齿轮任务．需要几人上车床，几人上铣床，才能使两道工序每天加工的齿轮

数相同？

2. 用火车车皮运送一批物资，如果每节装 35 吨，还剩 17 吨装不下，如果每节多装 5 吨，还剩 28 吨的空位．问共用多少节车皮，这批物资有多少？

3. 有两种酒精，一种含水 15%，另一种含水 5%。要配制含水 12%的酒精 500 克，每种酒精各需多少克？

---

4. 有一只驳船，载重量是 800 吨，容积是 795 立方米。现在装运生铁和棉花两种物资，生铁每吨的体积是 0.3 立方米，棉花每吨的体积是 4 立方米，生铁和棉花各装多少吨，才能充分利用船的载重量和容积？

5. 某生产队兴修水利，派出 48 人完成挖土和运土工作。如果每人每天平均挖土 5 方或运土 3 方，应怎样分配挖土和运土的人数，才能使挖出的土及时运走？

6. 某工厂接受一批农具的定货任务，按计划天数，如果每天平均生产 20 件，就差 100 件不能完成任务；如果每天平均生产 23 件，就可超额 20 件完成任务，这批任务有多少件？原计划几天完成？

7. 一种烧碱溶液的浓度是 5%，另一种烧碱溶液的浓度是 53%．用这两种烧碱溶液混合配制成浓度为 25% 的烧碱溶液 300 公斤，问需用这两种烧碱溶液各多少公斤？

8. 甲乙两人从相距 18 公里的两地同时出发，相向而行，$1\frac{4}{5}$小时相遇，如果甲比乙先出发$\frac{2}{3}$小时，那么在乙出发后$1\frac{1}{2}$小时两人相遇，甲乙两人每小时各走多少公里？

小　　结