Advanced Mathematics Guidance for Medical Science

医用高等数学学习指导

张世强 主编 张选群 主审

Zhang Shiqiang Zhang Xuanqun

清华大学出版社 Springer

Advanced Mathematics Guidance for Medical Science

医用高等数学学习指导

张世强　主编　　张选群　主审

Zhang Shiqiang　Zhang Xuanqun

清华大学出版社　Springer

北京

内容简介

本书系统地介绍了医科院校各专业常用的高等数学的基本概念、知识要点、学习要求，详细地给出了典型例题分析和完整的习题解答.包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分、常微分方程、概率论基础和线性代数基础共7章内容.每章有知识要点、基本要求、典型例题分析、张选群主编的卫生部规划教材《医用高等数学》全部习题的解题步骤、自测题及其解答提示.

本书起点低，跨度大，主干清晰，层次分明，说理清楚，通俗易懂.能有效地帮助医科院校专业的学生提高分析问题和解决问题的能力，引导学生融会贯通前后内容，提炼和升华所学知识，以达到理解概念、掌握方法、学会运用及举一反三的目的.

本书可作为医科院校的本科生学习高等数学的学习指导书，也可供数学教师、研究生及医、药学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导/张世强主编.—北京：清华大学出版社，2004.9
ISBN 7-302-09022-X

Ⅰ.医…　Ⅱ.张…　Ⅲ.医用数学—医学院校—教学参考资料　Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第067890号

出 版 者：清华大学出版社　　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：王海燕
印 装 者：北京市清华园胶印厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：140×203　**印张**：9.5　**字数**：237千字
版　　次：2004年9月第1版　2004年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-09022-X/O・377
印　　数：1～5000
定　　价：16.00元

前　言

从培养21世纪医学人才的角度看，需要进一步拓宽大学生的知识面，增强创新能力．因此，提高医科院校各专业大学生的数学素质理应引起重视．

结合我国国情，一方面高等教育已从精英教育迅速地转向大众教育，并开始向普及教育迈进（北京市与上海市已成为首批高等教育普及化的城市），另一方面医学的发展又对医科院校各专业学生的数学素质提出了更高的要求．为了解决这个矛盾，以利于提高医科院校大学生的数学素质，我们总结了多年医用高等数学的教学经验，编写了这本“医用高等数学学习指导”辅导教材．在教材结构上大胆创新，进行了大量精选、优化及浓缩．

编书的指导思想是：起点低；跨度大．前者是指着重内容的实用性，适当兼顾理论体系．对于医科院校各专业的大学生来说，学习内容的实用性显得更加重要，因此，在选择题材和叙述重点上我们都把实用性放在首位．后者是指尽量覆盖医、药学领域中常常涉及的数学知识，让读者能在较少的时间内获得尽可能多的信息．

本教材按张选群主编的《医用高等数学》（人民卫生出版社出版）及张世强主编的《医学高等数学》（科学出版社出版）的章节顺序编排，以利于学生学习及教师教学．每章包括以下内容：

- 知识要点：将本章的主要内容融为一体．
- 基本要求：简明扼要地阐述本章的学习重点．
- 典型例题分析：针对本章的主要内容和学习重点，以及学生在学习时经常问及的具有普遍意义的问题，精选出若干个有代表性的、针对性强的典型例题予以分析、解答，达到帮助学生释疑解难的目的．

- 习题解答：简明扼要地给出张选群主编的《医用高等数学》第三版全部习题的解题步骤，以利于学生自学及教师备课.
- 自测题：将本章的主要内容融为一体，以模拟考试题的方式给出，供学生复习及查漏补缺之用，以达到理解概念、掌握方法、学会运用及举一反三的目的.

医科院校各专业的学生一学期的高等数学课内容涵盖了理工科学生一年以上的课程内容，其知识要点像一颗颗珍珠散落在课本之中，本书的目的是将零零星星的珍珠有机地串联起来，节省拾贝者的时间与精力，引导学生融会贯通前后内容，提炼和升华所学知识，达到事半功倍的效果. 学完教材的每一章，将本书对应的章节浏览一遍，会有查漏补缺的效果；学完教材后，翻阅本书，会发现原来数学并非想象中那么难；对照本书的知识要点、典型例题分析及自测题浏览一遍，必要时动动笔，你就会有成就感，考试时就会充满信心，胸有成竹. 如果达到了以上几个方面全部或部分效果，编者花费的心血就没有白费，我们就感到欣慰了.

在本书编写和出版工作中，卫生部规划教材主编张选群教授承担了本书的立项、审稿工作；刘庆欧教授参与了本书编写大纲的制定并审阅了部分稿件；各位编委几易其稿，将各自20多年乃至近40年的医学数学教学经验浓缩在所编写的章节中，在此谨致谢意.

一本好教材理应经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验. 但愿这本教材会使读者开卷有益，同时也期待得到读者的悉心指教.

张世强

2004年1月

医用高等数学学习指导

主　编　张世强

主　审　张选群

编　委（按姓氏笔画排序）

刘庆欧　刘早清　张世强

陈宇丹　罗明奎　罗建平

姚　莉

目　　录

第 1 章

函数与极限

1.1 知识要点

1.1.1 函数的概念和简单性质

1. 有限区间与无穷区间

如下区间均是有限区间：

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in\mathbb{R}\};$$
$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbb{R}\};$$
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in\mathbb{R}\};$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in\mathbb{R}\}.$$

其中 a 和 b 为实常数，且 $a<b$.

如下区间均是无穷区间：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a, x\in\mathbb{R}\};$$
$$(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a, x\in\mathbb{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

其中 $+\infty$（读作正无穷大）与 $-\infty$（读作负无穷大）是引进的记号，不是数.

2. 函数的定义

设同一变化过程中存在两个变量 x,y，若对于变量 x 在其变

化范围 D 内的每一个值，按照某个对应规律 f，都有变量 y 的一个确定的值与之对应，则称在规律 f 下，变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中，称变量 x 为自变量，变量 y 为因变量，D 为函数的定义域或存在域. 当 x 任取 D 中一个值时，与之对应的 y 值称为函数值. 当 x 遍取 D 中各值时，相应的 y 值构成的集合称为函数的值域.

函数的两大因素是：对应规律 f 及定义域或存在域 D. 一般地，函数的定义域由数学上函数有无意义来确定；当函数关系由实际问题给出时，定义域应由实际问题本身来确定. 医学生尤其应该注意这一点.

3. 函数的表示方法

函数有三种常用的表示方法：解析法、列表法和图像法. 其中解析法中一类重要的函数——分段函数及列表法、图像法是医学上常用的.

4. 函数的几种简单性质

函数的有界性 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在某正数 M，使得对任意 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，并称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数. 有界函数的图形必落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间的带形区域内.

上(下)有界函数：若存在某正数 M，使得对任意 $x\in D$，若 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上上有界；若 $f(x)\geqslant -M$，则称 $f(x)$ 在 D 上下有界.

函数的单调性 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 对 D 中任意两个数 x_1，x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增；若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递减. 单调递增与单调递减函数均称为单调函数. 若 $f(x)$ 在某区间内是单调的，则该区间称为 $f(x)$ 的单调区间.

函数的奇偶性 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 D 是关于原点

对称的数集. 若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数；若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数. 奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

函数的周期性　设函数 $y=f(x)$,$x\in D$. 若存在某正数 T,使得对 D 内任何 x,关系式 $f(x+T)=f(x)$总成立,则称 $f(x)$为周期函数,并称 T 为 $f(x)$的一个周期. 通常所说的函数周期是指最小正周期.

1.1.2　复合函数与隐函数

复合函数　设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$. 如果当 x 在定义域内变化时,由 $u=\varphi(x)$所确定的值 u 的部分或全部使得函数 $y=f(u)$有定义,这时称 y 为 x 的复合函数. 称 u 为中间变量.

分清复合函数的结构是复合函数求导、换元积分的重要基础,也是学好《医学高等数学》的基本功之一.

显函数　若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系由方程 $y=f(x)$确定,表达式 $f(x)$中不含变量 y,这种形式的函数称为显函数.

隐函数　若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系由方程 $F(x,y)=0$ 确定,对于 x 取定的每一个值,代入方程后,可解出对应的 y 值,称这种函数关系为隐函数. 例如由方程 $y-x-a\sin y=0$ 所确定的函数.

1.1.3　初等函数

基本初等函数　中学所学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复

合运算步骤而构成的,可用一个解析式表示的函数,叫做初等函数.

例如 $\sin 2x$, $\arcsin 8x+\dfrac{\tan^2 x}{x}$, $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\cos x$ 等都是初等函数.

《医学高等数学》教材所研究的函数,主要是初等函数.

非初等函数 那些不是初等函数的函数,统称为非初等函数.

如分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

不能用一个解析式表示,是非初等函数.

某些分段函数就其整体而言不是初等函数,但它的每一段都是初等函数.

1.1.4 极限的概念

数列极限 已知数列$\{x_n\}$,A 是某确定常数.当 n 无限增大时,若 x_n 与常数 A 的距离$|x_n-A|$任意小,则称当 n 趋于无穷大时,$\{x_n\}$以 A 为极限,记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to+\infty).$$

这时,称数列$\{x_n\}$是收敛的;否则,称$\{x_n\}$是发散的.

$x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限 设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内有定义,A 是某确定常数.若 x 趋于无穷大时,$f(x)$与 A 的距离$|f(x)-A|$任意小,则称当 x 趋于无穷大时,$f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

$x\to+\infty$时,函数 $f(x)$的极限 设函数 $f(x)$在区间$(a,+\infty)$内有定义,A 是某确定常数.若 x 趋于正无穷大时,$f(x)$与 A 的距离$|f(x)-A|$任意小,则称当 x 趋于正无穷大时,$f(x)$以 A 为极

限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

$x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 内有定义，A 是某确定常数. 若 x 趋于负无穷大时，$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小，则称当 x 趋于负无穷大时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty).$$

$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，A 是某确定常数. 若 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小，则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义中只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义，而不要求 $f(x)$ 在 x_0 有定义.

函数 $f(x)$ 的左极限　设 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0)(\delta>0)$ 内有定义，A 是某常数. 若 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小，则称当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为左极限，记作

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

函数 $f(x)$ 的右极限　设 $f(x)$ 在区间 $(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内有定义，A 是某常数. 若 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小，则称当 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为右极限，记作

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A.$

1.1.5 极限的四则运算

若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

1.1.6 极限存在的判别法则

若在同一极限过程中，三个函数 $g(x)$、$f(x)$和 $h(x)$之间有如下关系：

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且

$$\lim g(x)=\lim h(x)=A,$$

则

$$\lim f(x)=A.$$

以上法则可简称为“夹逼法则”.

1.1.7 无穷小与无穷大

无穷小量 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数(变量)$f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.例如：x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，$\sin(x-a)$是 $x\to a$ 时的无穷小量.

无穷小量不是一个很小的数，而是以零为极限的函数或变量.

注意 函数 $f(x)=0$ 是 $x\to x_0$ 时的特殊的无穷小量.

无穷小量的性质 (1)有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；(2)有界函数与无穷小量的乘积仍是无穷小量；(3)有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

无穷小量阶的比较 设 $x\to x_0$ 时，$f(x)$，$g(x)$均为无穷小量.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$为 $g(x)$的高阶无穷小量,亦称 $g(x)$为 $f(x)$的低阶无穷小量,记作

$$f(x)=o[g(x)]\quad(x\to x_0).$$

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k(k\neq 0)$,则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$与 $g(x)$为同阶无穷小量,记作 $f(x)=O[g(x)]\quad(x\to x_0)$. 特别地,若 $k=1$,称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$与 $g(x)$为等价无穷小量,记作 $f(x)\sim g(x)\quad(x\to x_0)$.

无穷大量　若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$,则称函数 $f(x)$为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

无穷大量是指无限增大的变量,它显然不是很大的数.

无穷小量与无穷大量之间的关系　无穷小量(不恒为零)的倒数为无穷大量;无穷大量的倒数为无穷小量. 由此可知,对无穷大量的研究完全可以转换为对无穷小量的研究.

1.1.8　两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\quad(x$ 为弧度数);

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　或　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

1.1.9　函数的连续与间断

变量的增量　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 附近取值时,称 $\Delta x=x-x_0$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量;称 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$(或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$)为函数 $f(x)$在 x_0 处的增量.

函数在某点连续的定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 及其附近有定义,若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

函数在某点连续的定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数在某点左连续 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ $(\delta>0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

函数在某点右连续 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

函数在某点连续的充分必要条件 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左、右都连续.

函数在区间连续的定义 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，则称 $f(x)$ 为区间 I 内的连续函数，并称区间 I 为函数 $f(x)$ 的连续区间. 从几何直观上看，连续函数的图形是一条连绵不断的曲线.

重要结论 初等函数在其定义区间内连续. 即若 $f(x)$ 为初等函数，x_0 为 $f(x)$ 定义区间内的任意点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 所以，初等函数在其定义区间内求极限时可用代入法.

函数在 x_0 处连续有 3 个必要条件：(1) $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处间断 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不满足上述 3 个必要条件中的至少一个，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点的分类 若函数在间断点 x_0 处的左右极限都存在，则称 x_0 为第Ⅰ类间断点；若函数在间断点 x_0 处至少一侧的单侧极限不存在，则称 x_0 为第Ⅱ类间断点.

1.1.10　闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的 2 个重要性质：

(1) 闭区间上的连续函数必有最大值 M 与最小值 m；

(2) 闭区间上的连续函数必取得介于 M 和 m 之间的任何值.

1.2　基本要求

- 理解函数的概念；了解复合函数、分段函数、初等函数的定义；掌握函数复合与分解的方法.
- 理解极限(包括单侧极限)的描述性定义；熟练掌握极限的四则运算法则.
- 理解无穷小量的概念；了解无穷小与无穷大的关系；掌握无穷小量的性质.
- 理解两个重要的极限 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right)$；会利用两个重要的极限、无穷小量的性质及初等方法计算各类函数的极限.
- 理解连续与间断的概念；了解闭区间上连续函数的性质.

1.3　典型例题分析

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

解　欲使函数有定义，则 $x^2-4>0$，即 $x<-2$ 或 $x>2$，故该函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

例 2　先求下列各对函数的定义域、值域，然后判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同.